Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia

Jesús Mosterín y Roberto Torretti

Alianza Editorial

Esta obra ha sido publicada con la ayuda de la Dirección General del Libro, Archivos y Bibliotecas del Ministerio de Educación y Cultura.

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid; teléf. 91 393 88 88
www.alianzaeditorial.es
ISBN: 84-206-3000-4
Depósito legal: M. 43.262-2002
Fotocomposición: EFCA, S. A.
Parque Industrial "Las Monjas". 28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)
Impresión: Lavel, S. A.
Printed in Spain

Índice

Prólogo

La necesidad ampliamente sentida de un Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia a la altura de nuestro tiempo nos llevó a buscar una obra de este tipo en otras lenguas, a fin de recomendar su traducción al castellano. Pronto nos dimos cuenta de que tal obra no existía, por lo que decidimos ponernos manos a la obra y redactarla nosotros mismos.

La filosofía de la ciencia se sitúa en la frontera o interfaz entre la ciencia y la filosofía, que es el terreno donde se plantean muchas de las cuestiones más fascinantes del pensamiento actual. Tanto el lector curioso como el estudiante o el docente profesional, si quieren seguir tales discusiones y tomar parte activa en ellas, tienen que entender las cuestiones fundamentales que se plantean en las ciencias más avanzadas, al menos en sus líneas generales, y para ello necesitan una mínima comprensión de sus nociones más básicas. Por eso este diccionario no se limita a exponer las polémicas y doctrinas filosóficas, sino que suministra también la definición precisa y algunas explicaciones sobre los conceptos centrales de la física y la cosmología, así como de las matemáticas subyacentes y de la lógica que permite analizarlas con rigor.

Este diccionario busca ser ante todo una herramienta de trabajo para quienes leen, estudian y enseñan lógica y filosofía de la ciencia en España e Hispanoamérica. Con suerte, podría contribuir también a regularizar y afinar el uso de quienes escriben sobre estas materias en castellano. Hemos reunido en él una colección de términos de uso común en estas disciplinas que no figuran o no se explican bien en los diccionarios de la lengua y a veces tampoco en los filosóficos. Por su procedencia, se los puede clasificar en varios grupos:

1° Términos pertenecientes a la lógica, en un sentido amplio que incluye la teoría de conjuntos, la metamatemática, la teoría de modelos, la teoría de la recursión y otras materias afines.

2° Términos básicos de las grandes teorías de la física matemática: mecánica y electrodinámica clásicas, relatividad especial y general, mecánica cuántica y física de partículas.

3° El vocabulario propiamente matemático empleado en la exposición de los elementos de estas teorías.
4° Términos que se han ido introduciendo y estableciendo, sobre todo en el último medio siglo, como propios de la filosofía de las ciencias en general o de alguna de sus corrientes características.
5° Unos pocos términos centrales de la biología, como *evolución*, *gen*, *especie*, cuya elucidación filosófica merece especial atención.

Los términos del primer y el tercer grupo admiten definiciones exactas, que hemos procurado enunciar concisamente, de acuerdo con el mejor uso profesional contemporáneo. En particular, hemos tratado de incluir una lista bastante completa de términos de lógica, en el amplio sentido descrito, con explicaciones a veces bastante detalladas. También los términos del segundo grupo se pueden definir o explicar de un modo preciso y generalmente aceptado y hemos procurado hacerlo. En este terreno hemos creído necesario a veces incluir breves indicaciones históricas. La elucidación de los términos biológicos del quinto grupo se ciñe también a la práctica preponderante.

Por otra parte, los términos del cuarto grupo, esto es, los propiamente filosóficos, rara vez admiten una definición única y precisa. Mientras la deducción matemática se monta sobre el significado inequívoco y rígido de términos artificiales o artificialmente redefinidos, la dialéctica filosófica se nutre de toda la riqueza semántica del lenguaje corriente, explota la natural ambigüedad de sus palabras y frases y las exprime y estira hasta extraerles el último matiz de significado. Debido a esto, los esfuerzos invertidos en fijar mediante definiciones el sentido de los vocablos filosóficos son infructuosos y hasta contraproducentes. De los términos de este grupo ofrecemos, pues, solo elucidaciones, tan liberalmente como lo permite el espacio disponible en un diccionario de este tamaño. Sería utópico pretender que nuestras explicaciones de estos términos sean aceptables para todos. Pero esperamos que muchos las hallen convincentes.

Una empresa de este tipo es por su propia naturaleza inacabable y en algún momento hay que cortar. Aunque cada lector inevitablemente echará en falta alguna cosa que busque y no encuentre, pensamos que el tratamiento que reciben la lógica, la matemática, la física y la filosofía de las ciencias más avanzadas es razonablemente suficiente para un diccionario de este tipo y tamaño. Sin embargo, somos conscientes de que la biología y la filosofía de la biología no han recibido la atención que se merecen, aunque hemos introducido un cierto número de entradas al respecto. Las ciencias sociales y su problemática se han quedado fuera. Quizás el futuro depare la oportunidad de colmar estas lagunas.

En este diccionario, salvo expresa indicación contraria, siempre utilizamos unidades del Sistema Internacional (SI). En general, en cuestiones terminológicas hemos dado la preferencia a la nomenclatura internacional. Ello se debe a dos razones. Por un lado, las peculiaridades nacionales de nomenclatura varían de un país de lengua española a otro, por lo que no vemos justificación alguna para imponer a los hablantes de un país las idiosincrasias terminológicas de otro, máxime teniendo en cuenta que la tendencia creciente en todos ellos es a ir adoptando las convenciones internacionales. Por otro lado, rara es la persona interesada en los temas de que trata este diccionario que no acceda a veces, a través de libros, revistas, congresos, bases de datos y páginas web de Internet, a datos y textos publicados en otros idiomas, sobre todo en inglés, por lo que no conseguiríamos más que marear a dicho lector si lo obligásemos a cambiar de acrónimos o de unidades cada vez que cambia de fuente de información. Por eso damos la preferencia a "DNA" sobre "ADN" o a "joule", "hertz" o "newton" sobre "julio", "hertzio" o "neutonio", por ejemplo. Solo en el caso de "voltio" hemos hecho una concesión al uso español.

Cada voz va seguida de una lista de sus equivalentes en alemán (A.), francés (F.) e inglés (I.). Tales equivalentes se omiten cuando no difieren de la voz española. Se omite asimismo el alemán o el francés en el caso de dos o tres términos que en esos idiomas suelen usarse en inglés. La definición o explicación de cada voz echa mano frecuentemente de otras voces que también están explicadas en el diccionario; para señalarlo, las voces a que se hace referencia se imprimen en VERSALITAS la primera vez que figuran en una entrada. A veces, la conveniencia de consultar una de estas voces se indica enfáticamente mediante el signo ↗ antepuesto a la mención en versalitas de la misma.

Los términos formados por varias palabras figuran en el orden alfabético como se los dice en castellano; por ejemplo, **teorema de Pitágoras** (no **Pitágoras, teorema de**), **velocidad de la luz** (no **luz, velocidad de la**), etc. En todo caso, para facilitar la búsqueda de conceptos que pueden expresarse de distintas maneras, se incluye al final de la obra una Relación de voces, que despliega en orden alfabético todas las entradas del diccionario (en **negrita**) y otras expresiones importantes (en redonda) que no tienen entrada propia, pero que están explicadas en las entradas que se mencionan (en VERSALITAS) frente a cada una.

Se incluye asimismo al final una lista de autores —filósofos, matemáticos y científicos— mencionados en el diccionario y ya fallecidos, con mención de los años en que nació y murió cada uno. Esta lista se presenta dos veces: primero en orden alfabético, para facilitar la búsqueda de las fechas de nacimiento y muerte de un autor determinado; luego en orden cronológico,

para dar una idea de la posición temporal de cada autor en relación con los demás.

El diccionario termina con una bibliografía, dividida en dos partes: (*a*) *Obras de consulta utilizadas*, destinada ante todo a expresar nuestro reconocimiento hacia otros lexicógrafos o tratadistas cuyas obras nos han ayudado en la redacción de nuestras definiciones y elucidaciones, y (*b*) *Fuentes citadas*, que contiene justamente lo que este título indica, esto es, una lista de fichas precisas de todas las obras que hemos juzgado necesario mencionar en alguna entrada. A este respecto, conviene tener presente que en general hemos sido parcos en la mención de fuentes. Pero al explicar algunas acepciones especiales importantes de ciertos términos, hemos juzgado oportuno a veces decir quién y dónde los usa de ese modo. Como es habitual, damos en el texto el nombre del autor seguido por la fecha de publicación entre paréntesis; luego, en la parte (*b*) de la bibliografía, damos la ficha completa.

En las entradas pertinentes se dan los valores de las principales constantes de la naturaleza, obtenidos en el sitio web http://physics.nist.gov/cuu/Constants/ del National Institute of Standards and Technology de los Estados Unidos. Casi todos ellos terminan con dos dígitos entre paréntesis; estos expresan la incertidumbre igual a una desviación estándar (↗ERROR) en los últimos dígitos del valor citado. Por ejemplo, el valor indicado para la masa del electrón es $9{,}109\ 381\ 88(72) \times 10^{-31}$ kg; esto significa que los valores medidos de dicha masa se distribuyen en torno al valor medio $9{,}109\ 381\ 88 \times 10^{-31}$ kg, con una desviación estándar igual a $\pm\ 0{,}000\ 000\ 72 \times 10^{-31}$ kg. Por definición, hay una probabilidad de aproximadamente 0,68 de que el valor correcto difiera del valor medio en menos de una desviación estándar, y caiga, por ende, en nuestro ejemplo, entre $10^{-31} \times 9{,}109\ 381\ 16$ kg y $10^{-31} \times 9{,}109\ 382\ 60$ kg. Hay asimismo una probabilidad de 0,95 de que el valor correcto diste del valor medio menos de dos desviaciones estándar y una probabilidad de 0,997 de que diste menos de tres.

Mientras escribíamos el libro y mientras corregíamos la pruebas hemos recurrido una y otra vez a amigos y colegas que han contestado preguntas, nos han alertado sobre problemas, han propuesto mejoras de forma y de fondo, sugerido ideas, recomendado libros y transmitido copias de escritos propios y ajenos. Por ello damos las gracias a Juan Arana, Joan Bagaría, Xavier Caicedo, Enrique Casanovas, Carla Cordua, Newton da Costa, John Earman, Miguel Espinoza, José Ferreirós, César Gómez, Alfonso Gómez-Lobo, Rosario Gómez-Lobo, Christian Hermansen, Dominga Hermansen, Ramón Lapiedra, Olimpia Lombardi, John Norton, Miguel Orellana, Massimo Pauri, Wilfredo Quezada y Henrik Zinkernagel. Estamos muy agradecidos también a Belén Urrutia por el gran cuidado que ha puesto en la edición del libro y a Elsa Otero por sus valiosas indicaciones.

Relación de símbolos y abreviaturas

No se anotan los símbolos y abreviaturas más familiares, como +, °, ∴, sen, cos, etc.

↗	véase
A	AMPERE
A.	alemán
AC	AXIOMA DE ELECCIÓN (I. *Axiom of Choice*)
AD	AXIOMA DE DETERMINACIÓN
ATP	trifosfato de adenosina (↗ATP)
c	VELOCIDAD DE LA LUZ en el vacío
C	COULOMB
CH	HIPÓTESIS DEL CONTINUO (I. *Continuum Hypothesis*)
cosh	coseno hiperbólico
DNA	ácido desoxirribonucleico (↗DNA)
e	carga eléctrica del electrón; *también* la base de los logaritmos naturales
EPR	Einstein-Podolski-Rosen (↗PARADOJA DE EPR)
eV	ELECTRÓN-VOLTIO
F.	francés
FRW	Friedmann-Robertson-Walker (↗MÉTRICAS DE FRW)
GCH	Hipótesis generalizada del continuo (I. *Generalized Continuum Hypothesis*; ↗HIPÓTESIS DEL CONTINUO)
h	CONSTANTE DE PLANCK
$\hbar$	h-BARRADA, esto es, $h/2\pi$
H_0	"constante" de Hubble, esto es, el valor del PARÁMETRO DE HUBBLE en la actualidad

I.	inglés
J	JOULE
K	KELVIN
kg	KILOGRAMO
log	logaritmo natural (salvo que se indique la base)
m	METRO
N	NEWTON
NBG	teoría axiomática de conjuntos de von Neumann, Bernays y Gödel
RNA	ácido ribonucleico (↗RNA)
s	SEGUNDO
senh	seno hiperbólico
tanh	tangente hiperbólica
V	VOLTIO
W	WATT
ZF	teoría axiomática de conjuntos de Zermelo y Fraenkel
ZFC	teoría axiomática de conjuntos de Zermelo y Fraenkel con axioma de elección AC
$\neg$	negación: "no es el caso que..."
$\wedge$	conjunción: "...y..."
$\vee$	disyunción: "...o..." (no excluyente)
$\Rightarrow$	condicional: "...solo si..." (para una definición exacta, ↗CONDICIONAL)
$\Leftrightarrow$	bicondicional: "...si y solo si..."
$\forall x$	CUANTIFICADOR universal: "para todo objeto x,..."
$\forall x \in A$	"para todo objeto x perteneciente al conjunto A..."
$\exists x$	CUANTIFICADOR existencial: "hay un objeto x tal que..."
$\exists x \in A$	"hay un objeto x perteneciente al conjunto A, tal que..."
$\iota x \varphi(x)$	el único x tal que $\varphi(x)$ (↗DESCRIPCIÓN)
$\Diamond P$	es posible que P
$\Box P$	es necesario que P
$\vdash$	deducibilidad: en el sistema lógico considerado, el objeto mencionado a la derecha es deducible del mencionado a la izquierda

$\models$	CONSECUENCIA lógica (en sentido semántico): en el lenguaje considerado, el objeto mencionado a la derecha es una consecuencia del mencionado a la izquierda y este último implica al de la derecha
$\cup$	UNIÓN (de conjuntos)
$\cap$	INTERSECCIÓN (de conjuntos)
$\bigcup$	gran unión (↗UNIÓN)
$\bigcap$	gran intersección (↗INTERSECCIÓN)
$\in$	es un elemento de
$\notin$	no es un elemento de
$\{x: \varphi(x)\}$	el conjunto de todos los x tales que $\varphi(x)$
$\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$	el n-TUPLO cuyos n términos son $x_1,\ldots, x_n$
$A \subseteq B$	el conjunto A está incluido en el conjunto B
$\wp A$	CONJUNTO POTENCIA del conjunto A, esto es, conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A
ω	omega, tipo de orden de los números naturales, el primer ordinal transfinito, esto es, el mínimo ordinal mayor que todos los ordinales finitos
$\aleph$	ÁLEF; $\aleph_0$ (álef cero) es el cardinal del conjunto de los números naturales y, por ende, de cualquier conjunto numerable
$\mathbb{N}$	el sistema estructurado de los NÚMEROS NATURALES; también, el conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	el ANILLO de los NÚMEROS ENTEROS; también, el conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	el CUERPO de los NÚMEROS RACIONALES; también, el conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	el CUERPO de los NÚMEROS REALES; también, el conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	el CUERPO de los NÚMEROS COMPLEJOS; también, el conjunto de los números complejos
$f : A \to B$	la FUNCIÓN f con dominio A y codominio B
$f : x \mapsto y$	la FUNCIÓN f, que asigna a cada argumento x el valor y
$f\restriction A$	la RESTRICCIÓN de la función f al conjunto A
$f[A]$	la imagen del conjunto A por la función f, esto es, el conjunto $\{x : \exists y \in A(x = f(y))\}$; si A es el dominio de f, $f[A]$ es el recorrido de f

f^{-1}	la función INVERSA de la función f
$f^{-1}[A]$	la preimagen del conjunto A por la función f, esto es, el conjunto $\{x : f(x) \in A\}$; este conjunto existe aunque f no tenga una inversa (por no ser una función inyectiva)
$f \circ g$	la FUNCIÓN COMPUESTA de g por f; la COMPOSICIÓN de f y g
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	suma de todos los términos x_i, esto es, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	producto de todos los términos x_i, esto es, $x_1 x_2 \ldots x_n$
∇	NABLA
$\approx$	aproximadamente igual a
df/dx	DERIVADA ordinaria de la función f respecto a la variable x
$\partial f/\partial x$	DERIVADA PARCIAL de la función f respecto a la variable x
$\int$	INTEGRAL
$\oint_C$	integral curvilínea tomada sobre toda la curva cerrada C
$\sim$	relación de EQUIVALENCIA
$\equiv$	relación de EQUIVALENCIA ELEMENTAL
$\cong$	relación de ISOMORFÍA
$\preccurlyeq$	precede o es igual a (en un ORDEN PARCIAL)
$\prec$	precede y no es igual a (en un ORDEN PARCIAL)
$x \sqcap y$	el ÍNFIMO de x e y (en un RETÍCULO)
$x \sqcup y$	el SUPREMO de x e y (en un RETÍCULO)
$\complement A$	COMPLEMENTO de A en un ÁLGEBRA DE BOOLE cualquiera
$\mathbf{C}A$	COMPLEMENTO del conjunto A en el álgebra potencia de un conjunto
$a \cdot b$	el producto de los números a y b (por multiplicación ordinaria); también se lo designa con ab o con $a \times b$
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$	el PRODUCTO INTERNO o —en su caso— el PRODUCTO ESCALAR de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (notación corriente)
$\langle \mathbf{v} \vert \mathbf{w} \rangle$	el PRODUCTO INTERNO o —en su caso— el PRODUCTO ESCALAR de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (notación de Dirac)
$\vert \mathbf{w} \rangle$	el ket $\mathbf{w}$ (un vector: terminología y notación de Dirac)
$\langle \mathbf{v} \vert$	el bra $\mathbf{v}$ (un covector: terminología y notación de Dirac)

$\times$	entre dos números o entre los nombres de dos conceptos métricos con valores numéricos, significa *multiplicación*; pero se usa también como se indica en las dos líneas siguientes
$A \times B$	el PRODUCTO CARTESIANO de los conjuntos A y B
$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$	el PRODUCTO VECTORIAL de los vectores **v** y **w**
$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$	el PRODUCTO TENSORIAL de los vectores **v** y **w**
$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$	el PRODUCTO TENSORIAL de los espacios vectoriales $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$
$\oplus$ y $\otimes$	se usan también ocasionalmente para simbolizar operaciones análogas a la suma y la multiplicación de números naturales
$\exp(x)$	e^x; la base de los logaritmos naturales elevada a la potencia x
$\mathrm{p}(H \mid E)$	probabilidad condicional de H dado E

A

a priori / a posteriori. Desde Kant, dícense *a priori* los conocimientos y representaciones que no proceden o dependen de la EXPERIENCIA; *a posteriori*, los que proceden o dependen de ella. No obstante su significado literal, estas expresiones, en el uso filosófico, no connotan un orden temporal, puesto que, como señaló el mismo Kant, "todos nuestros conocimientos comienzan con la experiencia". Kant enumera como representaciones a priori las "intuiciones puras" de espacio y tiempo y las CATEGORÍAS o "conceptos puros": uno, muchos, todo, realidad, negación, limitación, sustancia y atributo, causa y efecto, comunidad, necesidad, existencia y posibilidad. Para él son proposiciones a priori aquellas que enuncian verdades lógicas, teoremas de la geometría y la aritmética, y también algunas leyes fundamentales de la naturaleza, como el principio de conservación de la materia y un supuesto principio de interacción instantánea a distancia entre las cosas que existen simultáneamente (el cual tomaría a posteriori, en el mundo en que vivimos, la forma específica de la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON). Según Kant, lo distintivo de estas proposiciones es su *necesidad* y *universalidad*; en contraste con ellas, las proposiciones a posteriori serían, pues, *contingentes* y *particulares*. Esta partición arroja un velo de sombra —que Kant nunca llega a despejar— sobre la condición de las leyes empíricas de la naturaleza, que, claro está, no son necesarias, pero deberían ser universales. En relación con esto, conviene recordar que Kripke (1972) ha sostenido que hay proposiciones a priori que son contingentes (como esta: "La masa del dado metálico adoptado como estándar por la Conferencia Internacional de Pesos y Medidas es exactamente igual a un kilogramo") y otras a posteriori que son necesarias (como esta: "El elemento número dos de la TABLA PERIÓDICA, helio, no forma compuestos químicos con otros elementos").

Según Kant, las representaciones y proposiciones a priori son válidamente aplicables al mundo que conocemos por la experiencia porque expresan las condiciones de posibilidad de esta, dependientes de la estructura de la razón humana. Con el triunfo de la concepción evolucionista del hombre, se ha vuelto insostenible la idea de que su mente tenga una estructura definitiva; ade-

más, un mejor conocimiento de la diversidad de las culturas y de la historia de las ciencias ha puesto en claro la inconstancia de casi todos los ingredientes del pensamiento humano que Kant reputó fijos. Como persiste entre los filósofos la convicción kantiana de que cada modo o sector de la experiencia se articula conforme a principios y supuestos que determinan su peculiar "racionalidad" y, en este sentido, lo hacen posible, se puede y se suele hablar de un a priori histórico, propio de tal o cual empresa intelectual, de tal o cual especialidad o teoría científica, que no se puede desechar sin socavarla.

aberración de la luz (A. *Aberration des Lichts*, F. *aberration de la lumière*, I. *aberration of light*). Cuando intentaba medir el PARALAJE de una estrella, y confirmar así el movimiento de traslación de la Tierra postulado por Copérnico, Bradley (1728) observó que, a lo largo de un año, las estrellas describen pequeñas elipses en la bóveda celeste. En particular, una estrella próxima al polo traza un círculo con un diámetro de 41″. Este fenómeno, llamado *aberración de la luz*, refleja la traslación de la Tierra alrededor del Sol y fue por mucho tiempo el único hecho empírico que permitía constatar dicho movimiento.

El fenómeno se explica muy fácilmente en el contexto de una teoría corpuscular de la luz. Piénsese cómo, según la dirección en que caminamos, tenemos que darle distintas inclinaciones al paraguas para que no nos moje la lluvia, aunque no haya viento que la incline. Sean L la longitud del telescopio, c la velocidad de la luz y v la velocidad de la Tierra relativa al marco de las estrellas fijas. Entonces, en el tiempo Lc^{-1} que un corpúsculo de luz tarda en recorrer la distancia entre el objetivo y el ocular, este último avanza con la Tierra una distancia $d = vLc^{-1}$. Por lo tanto, para apuntar a una estrella situada verticalmente sobre el observador hay que inclinar el telescopio en la dirección en que la Tierra avanza, de modo que forme con la vertical el ángulo $\alpha \approx dL^{-1} = vc^{-1}$. (La expresión del lado derecho es igual a sen α y, por ende, prácticamente igual a $\alpha < 22''$.) La explicación se hace más difícil si la luz está constituida por ondas en el éter, pero vuelve a facilitarse si —conforme a la teoría especial de la RELATIVIDAD— la trayectoria de un pulso de luz dentro del telescopio es la proyección, en el espacio del observatorio, de una geodésica espaciotemporal nula. La corrección relativista del ángulo de inclinación α incluye el factor v^2c^{-2}, siendo pues sumamente pequeña.

abscisa (A. *Abszissa*, F. *abscisse*, I. *abscissa*). ↗COORDENADAS CARTESIANAS.

acción de un grupo (A. *Wirkung einer Gruppe*, F. *action d'un groupe*, I. *group action*). Sea S un conjunto cualquiera. El GRUPO G *actúa* sobre S (por

la derecha) si hay una función $S \times G \rightarrow S$ cuyo recorrido es S, que asigna a cada par $\langle s,g \rangle$ ($s \in S$, $g \in G$) el valor $sg \in S$ y es tal que, para todo $s \in S$ y todo g, $h \in G$, $(sg)h = s(gh)$. Dícese que G actúa *transitivamente* sobre S si para todo s y $s' \in S$ hay un $g \in G$ tal que $s' = sg$. Dícese que G actúa *efectivamente* (o *libremente*) sobre S si $sg = s$ para todo $s \in S$ solo si g es el elemento neutro de G. Para cada $s \in S$, la *órbita* de G por el punto s es el conjunto $\{sg : g \in S\}$. Evidentemente, $s' \in G$ pertenece a la órbita de G por s si y solo si s pertenece a la órbita de G por s'. Por lo tanto, la clasificación de S en órbitas por la acción de G constituye una PARTICIÓN de S. G actúa transitivamente sobre S si y solo si la órbita de G por cada punto de S es igual a todo S.

acción instantánea a distancia (A. *augenblickliche Fernwirkung*, F. *action instantanée à la distance*, I. *immediate action at a distance*). La fuerza atractiva ejercida desde una partícula material sobre todas las otras, con arreglo a la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON, actúa sin dilación sobre cada una de ellas, no importa cuán lejos esté. Esto significa que si una partícula de masa m llega en el instante t al punto P, una partícula de masa 1 situada en ese instante en el punto Q experimenta en ese mismo instante una fuerza dirigida hacia P, directamente proporcional a m e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre P y Q. Este modo de *acción instantánea a distancia* es un atributo que comparten las FUERZAS CENTRALES que predominaron en la física hasta el triunfo de las ideas de Faraday y Maxwell sobre el CAMPO electromagnético en el último tercio del siglo XIX.

aceleración (A. *Beschleunigung*, F. *accélération*, I. *acceleration*). La aceleración mide los cambios de velocidad. El concepto científico de *aceleración* se basa en el concepto científico de VELOCIDAD. Si el vector $\mathbf{r}(t)$ representa la posición de una partícula en el instante t, en ese instante su velocidad $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ y su aceleración $\mathbf{a}(t)$ está dada por

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \left.\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}\right|_t = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h} = \left.\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\right|_t = \ddot{\mathbf{r}}(t)$$

donde uno o dos puntos sobre el nombre de una función significan diferenciación de la misma —una o dos veces— respecto al tiempo (simbolismo de Newton). Obsérvese que según esta definición, la aceleración es un VECTOR cuya dirección —conforme a la segunda LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON— apunta en la misma dirección que la FUERZA que la imprime.

ácido nucleico (A. *Nukleinsäure*, F. *acide nucléique*, I. *nucleic acid*). POLÍMERO compuesto por una secuencia de NUCLEÓTIDOS. Los principales ácidos nucleicos son el DNA (compuesto de nucleótidos con el azúcar desoxirribosa) y el RNA (compuesto de nucleótidos con el azúcar ribosa). Los ácidos nucleicos son las moléculas de la información biológica y constituyen la base de los mecanismos de la herencia y del código genético de los organismos. La reproducción con herencia de estructura requiere un sistema de almacenamiento y transmisión de la información. En los organismos de nuestro planeta este sistema se basa en la doble hélice del DNA. En la célula, el DNA almacena la información genética; el RNA la copia, traduce y expresa en forma de proteínas. Ambos ácidos nucleicos constan de una "columna vertebral" de elementos repetitivos (el azúcar y el fosfato), portadores de las diversas bases, cuya secuencia codifica y almacena la información.

agujero negro (A. *schwarzes Loch*, F. *trou noir*, I. *black hole*). Región del ESPACIOTIEMPO, limitada en el espacio, donde el campo gravitacional es tan intenso que, conforme a la teoría general de la RELATIVIDAD, solo puede absorber materia y radiación del Universo alrededor, pero no puede emitirlas. Esta región está tan curvada sobre sí misma, que nada detectable, ni siquiera la luz, puede escapar de ella. En 1967 Wheeler bautizó tales regiones como *agujeros negros*. El nombre de "agujero" se debe a que es más bien una especie de vacío que un cuerpo y lo de "negro" alude a que la luz no puede escapar de su confinamiento gravitatorio.

A la vista de la SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD de las ecuaciones de Einstein cabe predecir que, si una esfera de masa m se contrae más allá de cierto radio crítico (el llamado *radio de Schwarzschild*, igual a $2Gmc^{-2}$, donde G es la CONSTANTE DE GRAVITACIÓN y c es la VELOCIDAD DE LA LUZ), el espaciotiempo se alabea o curva tan intensamente que el tiempo se para y el corrimiento hacia el rojo de la luz (la longitud de onda) se hace infinito, con lo que la luz deja de existir como tal. El agujero negro es una región prácticamente vacía, con toda su masa concentrada en una singularidad central. El horizonte o superficie del agujero negro es una esfera que marca la frontera de no retorno entre los puntos internos, de los que nada puede salir, y los externos, capaces de emitir radiación; es como una membrana que permite la entrada, pero no la salida.

Para una estrella de masa dada, el radio de Schwarzschild indica hasta dónde habría que comprimirla para que formase un agujero negro. Para nuestro Sol ese radio sería de unos tres kilómetros. El Sol tendría que contraerse hasta una esfera de tres km de radio para formar un agujero negro. No se contraerá tanto, por lo que se estabilizará como enana blanca. Chandrasekhar probó que una enana blanca solo es estable si tiene una masa menor que 1,4

masas solares. Si su masa es mayor, sigue colapsando hasta formar una estrella de neutrones. Cuando una estrella masiva explota como supernova, su residuo forma una estrella de neutrones, si su masa es de entre 1,4 y 3 masas solares. Si su masa es superior a tres masas solares, sigue colapsando hasta formar un agujero negro, que es el resultado final del colapso gravitatorio de una estrella masiva.

La idea de que puede haber regiones del Universo en que la gravitación sea tan intensa que la luz emitida en su interior quede confinada dentro de sus fronteras había sido anticipada ya en el siglo XVIII por John Michell, en el contexto de la teoría de la gravedad de Newton y la teoría corpuscular de la luz. Einstein nunca aceptó los agujeros negros de Schwarzschild. Durante los años 1920s y 1930s tanto Einstein como Eddington se opusieron vehementemente a ellos. Primero Einstein ignoró la posibilidad de singularidades irreductibles. En 1939 publicó un artículo técnico tratando de mostrar que eran imposibles. Sus cálculos eran correctos, pero su interpretación de ellos era errónea, pues excluía la posibilidad de que la estrella colapsara e implosionara, al superar la gravitación a cualquier otra fuerza que se le pudiera oponer. Con ello negaba una consecuencia de su propia teoría. De hecho, hasta 1970 la comunidad física no se tomó en serio los agujeros negros. Desde entonces se han convertido en uno de los temas centrales de la relatividad general.

Un agujero negro "carece de pelo", es decir, solo posee tres propiedades que lo definen: masa, carga eléctrica y momento angular. Diversas métricas o soluciones a las ecuaciones de Einstein describen diversos tipos de agujeros negros. Todos tienen masa. Un agujero negro sin carga eléctrica y sin rotación es descrito por la métrica de Schwarzschild. Un agujero negro sin carga eléctrica, pero en rotación, como parecen ser los agujeros negros reales, es descrito por la métrica de Kerr.

Los agujeros negros, por definición, no son directamente detectables, pues no emiten luz ni radiación detectable alguna. Sin embargo, pueden ser inferidos indirectamente, por los efectos que producen en su entorno. Si un agujero negro orbita en un sistema binario en torno a un estrella normal, atrae o chupa materia de esa estrella que, al caer hacia el agujero negro, forma un disco de acreción a temperatura enorme, que emite una gran cantidad de rayos X detectables a distancia. Así se descubrió en los 1970 el famoso (candidato a) agujero negro Cygnus X-1. El número de agujeros negros en sistemas binarios en nuestra galaxia se estima en más de 10^8. La mayor dificultad observacional consiste en distinguir los agujeros negros de las estrellas de neutrones. El principal criterio de distinción es la masa inferida del objeto invisible del sistema binario; si su masa es superior a tres masas solares, debe de tratarse de un agujero negro. Otra manera de detectar agujeros negros es-

telares es por su efecto como lentes gravitacionales sobre la luz procedente de galaxias o cuásares situados detrás de ellos en nuestra línea de visión.

Los núcleos de las galaxias (incluso de la nuestra) y de los cuásares parecen estar constituidos por agujeros negros supermasivos (a veces de más de 10^9 masas solares). Algunos teóricos han propuesto la hipótesis especulativa sobre la presencia de muchísimos mini-agujeros negros primordiales, formados en el *Big Bang* y que constituirían gran parte de la masa oscura del universo, pero hasta hoy no hay indicio empírico alguno que apoye dicha hipótesis.

La TERMODINÁMICA de los agujeros negros se probó intratable dentro del marco de la relatividad general, pero Hawking (1975) resolvió la dificultad mediante una audaz aplicación de la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS. Según ella, hay en todas partes minúsculas fluctuaciones de los campos que ocupan el espacio. Estas fluctuaciones producen pares de partícula y antipartícula (por ejemplo, de electrón y positrón), que a continuación se atraen y se aniquilan; duran tan poco, que se llaman *partículas virtuales*. Esto ocurre también en los puntos exteriores próximos al horizonte, pero allí puede ocurrir que una de las dos partículas sea absorbida por este antes de tener tiempo de aniquilar a su compañera, que, así liberada de la aniquilación, puede alejarse del agujero. Esa partícula, producida por el campo gravitacional del agujero negro, se lleva un poco de la energía de este campo. En la práctica, los agujeros negros astrofísicos habituales están absorbiendo continuamente otras partículas de su entorno, por lo que la disminución energética debida a esta "radiación" o "evaporación" de Hawking es más que compensada. Sin embargo, en agujeros negros suficientemente pequeños o suficientemente aislados, la radiación de Hawking puede acabar evaporando el agujero entero. Esta radiación confiere una cierta temperatura al agujero negro astrofísico, aunque extremadamente baja e indetectable, del orden de 10^{-7} K.

El estudio de los agujeros negros constituye un caso extraordinario de ciencia de lo inobservable, en que la teoría ha ido siempre por delante de la imposible observación, aunque en los últimos años se acumula la evidencia indirecta de su existencia.

aleatorio (A. *Zufällig*, F. *aléatoire*, I. *random*). Adjetivo derivado del latín *alea*, 'dado, juego de azar, azar'; úsase para calificar lo que es puramente casual y no está sujeto a ningún género de necesidad o regularidad. Como no parece posible atribuir objetivamente este carácter a un suceso aislado, *aleatorio* se utiliza en ciencia y filosofía más bien como calificativo de colecciones y secuencias.

Espacio aleatorio es sinónimo de *espacio de probabilidad*, la estructura estudiada por el CÁLCULO DE PROBABILIDADES. Es, pues, un triple $\langle \Omega, \mathcal{B}, p \rangle$,

donde Ω es un conjunto cualquiera de "eventos elementales"; $\mathcal{B}$, el conjunto de "eventos", es una σ–ÁLGEBRA constituida por subconjuntos de Ω, y p, la "medida de probabilidad", es una función con dominio $\mathcal{B}$ y codominio [0,1], que satisface los axiomas del cálculo de probabilidades.

VARIABLE ALEATORIA es el nombre, cuestionable pero firmemente arraigado, que se da a una función con valores reales definida sobre el conjunto de eventos elementales de un espacio aleatorio.

Una *muestra aleatoria* es una colección de objetos escogidos dentro de otra mayor conforme a un método tal que cualquier miembro de la colección tenga la misma probabilidad que cualquier otro de quedar entre los objetos seleccionados. (Claramente, lo *aleatorio* en este caso es cada acto de selección.)

En la filosofía de la PROBABILIDAD cumple una función importante el concepto de *secuencia aleatoria* (I: *random sequence*). Sea *S* una secuencia de eventos a_1, a_2,..., que, para mayor simplicidad, supondremos repartidos entre solo dos clases diferentes, llamadas 0 y 1. Intuitivamente, diríamos que *S* es *aleatoria* si no es posible, basándonos en la composición de un segmento inicial de *S* (por largo que este sea), diseñar un método de hacer apuestas a 1 y 0 que nos garantice una ganancia. El concepto de *colectivo* de R. von Mises (↗PROBABILIDAD) fue un primer intento fallido para definir *secuencia aleatoria* con precisión. Kolmogorov (1963) abordó el asunto desde otra perspectiva. Para él, una secuencia binaria es aleatoria si es máximamente compleja, esto es, si su longitud no excede al más breve programa computacional requerido para calcularla (↗COMPLEJIDAD). Desde la misma perspectiva, Martin-Löf (1966) caracterizó las secuencias aleatorias infinitas de un modo que ha encontrado aceptación general. Llamemos *ley de aleatoriedad* (I. *law of randomness*) a cualquier aseveración concerniente a un espacio aleatorio que vale demostrablemente con probabilidad 1; por ejemplo, la LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS fuerte. Es tentador caracterizar como *aleatorias* a las secuencias infinitas que satisfacen *todas* las leyes de aleatoriedad. Pero ello tropieza con la dificultad siguiente: dado un espacio aleatorio ⟨Ω,$\mathcal{B}$,p⟩ tal que Ω es innumerable, p(Ω–{*a*}) = 1 para cada *a* ∈ Ω; por lo tanto, la intersección de todos los eventos de probabilidad 1 es ∅. La caracterización propuesta implicaría que *no hay secuencias aleatorias*. Martin-Löf observó que todas las leyes de aleatoriedad conocidas son efectivas en el sentido siguiente: es posible establecer efectivamente que una secuencia infinita *S* no satisface una ley de aleatoriedad *L* mediante un test algorítmico τ(*L*,*S*) de que *L* es violada por segmentos iniciales de *S* de longitud creciente. τ(*L*,*S*) corresponde a una función recursiva parcial. Caracterizamos, entonces, como *aleatorias* a las secuencias infinitas que pertenecen a la intersección de todos los conjuntos de medida 1 cuyos complementos son recursivamente enumerables.

Puede probarse que esta intersección también tiene medida 1. Por lo tanto, casi todas las secuencias infinitas son *aleatorias* conforme a esta caracterización. Tales secuencias se distinguen porque —superada cierta longitud mínima que varía de una secuencia a otra— todos sus segmentos iniciales finitos son máximamente complejos y por ende aleatorios en el sentido de Kolmogorov.

álef (A. *Aleph*, F. *aleph*, I. *aleph*). Cantor eligió la primera letra del alfabeto hebreo, ℵ (álef), para designar los CARDINALES infinitos. De hecho, ℵ es una función ordinal, que a cada ordinal asigna otro ordinal, que es un cardinal infinito. La serie de los álefs abarca todos los cardinales infinitos. La cardinalidad de un conjunto infinito siempre es un álef, $\aleph_\alpha$, para algún ordinal α. La función $\aleph(\alpha) = \aleph_\alpha$ puede definirse por RECURSIÓN TRANSFINITA sobre los ordinales:

1) $\aleph_0 = \omega$
2) $\aleph_{\alpha+1}$ = el mínimo γ tal que $\aleph_\alpha < \gamma$
3) $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$

En la cláusula 2) el signo < representa la relación de menor CARDINALIDAD, por lo que γ ha de ser un cardinal.

ℵ es una biyección entre la clase de todos los ordinales y la clase de los cardinales infinitos. Por tanto, hay tantos cardinales infinitos como ordinales, lo cual puede parecer paradójico, pues la inmensa mayoría de los ordinales no son cardinales, pero la paradoja se disipa recordando que el principio de que el todo es mayor que sus partes propias no vale para los conjuntos INFINITOS.

alfabeto (A. *Alphabet*, F. *alphabet*, I. *alphabet*). El alfabeto de un sistema simbólico de representación o comunicación es el conjunto de los signos primitivos del sistema, cuya concatenación da lugar a los signos compuestos y a los diversos tipos de expresiones que en él pueden formarse. Así, el alfabeto del sistema posicional binario de numeración consta de solo dos signos: 0 y 1. El alfabeto del sistema posicional decimal de numeración consta de diez signos o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. A partir de ellos se forman todos los NUMERALES decimales, por ejemplo 327. El alfabeto latino consta de las letras habituales, eventualmente complementadas por signos de puntuación, con cuya ayuda se escriben las diversas palabras y oraciones. El alfabeto de un LENGUAJE FORMAL consta de VARIABLES, PARÁMETROS y CONSTANTES LÓGICAS. A estos signos suelen añadirse, para mayor facilidad de lectura del usuario, los PARÉNTESIS. A partir de estos signos primitivos se for-

man los TÉRMINOS y las FÓRMULAS de acuerdo con las REGLAS DE FORMACIÓN correspondientes.

álgebra de Boole (A. *Boolesche Algebra*, F. *algèbre de Boole*, I. *Boolean algebra*). Un álgebra de Boole es un sistema $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, \complement, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ —donde $B \neq \varnothing$, $\sqcup$ y $\sqcap$ son operaciones binarias en B, $\complement$ es una operación unaria en B, $\mathbf{0} \in B$ y $\mathbf{1} \in B$— que satisface los siguientes axiomas:

$x \sqcup y = y \sqcup x$	$x \sqcap y = y \sqcap x$
$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$	$x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$
$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$
$x \sqcup \complement x = \mathbf{1}$	$x \sqcap \complement x = \mathbf{0}$
$x \sqcup \mathbf{0} = x$	$x \sqcap \mathbf{1} = x$

Otra definición equivalente, basada en las nociones de orden, es que un álgebra de Boole es un RETÍCULO distributivo y complementado.

En función de las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ del álgebra de Boole se define su orden canónico:

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \sqcup y = y$$
$$x \prec y \Leftrightarrow x \sqcup y = y \wedge x \neq y$$

Las álgebras de Boole se llaman así en honor de George Boole, que en 1847 aplicó técnicas matemáticas al estudio del razonamiento en lo que se llamó el ÁLGEBRA DE LA LÓGICA. Boole, Jevons, Peirce y Schröder desarrollaron el estudio de la estructura algebraica común a las proposiciones y a las clases mediante una teoría abstracta de las operaciones $\sqcup$, $\sqcap$ y $\complement$ y de los objetos $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$, es decir, de lo que posteriormente se llamaría el álgebra de Boole. En 1904 Huntington demostró la equivalencia de la noción de álgebra de Boole con la de retículo distributivo y complementado.

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la teoría de las álgebras de Boole. Si en una fórmula φ de $\mathcal{L}$ reemplazamos los parámetros $\sqcup$, $\sqcap$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ por los parámetros $\sqcap$, $\sqcup$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, respectivamente, dejando $\complement$ fijo, la fórmula así obtenida es la fórmula dual de φ, simbolizada φ^D. Para cualquier fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$, $(\varphi^D)^D = \varphi$. Como se aprecia en la lista de axiomas arriba indicada, la fórmula dual de cada axioma es también un axioma. En general, el principio de dualidad dice que si φ es verdadera o satisfecha en toda álgebra de Boole (es decir, es un teorema de la teoría booleana), entonces su dual φ^D también lo es.

Para cualquier CONJUNTO A, el *álgebra potencia* de A, es decir, el sistema $\langle \wp A, \cup, \cap, \mathbf{C}, \varnothing, A \rangle$, es un álgebra de Boole. Aquí, $\wp A$ es el CONJUNTO POTENCIA de A; $\varnothing$, el conjunto vacío $\{x : x \neq x\}$; y $\cup$, $\cap$ y $\mathbf{C}$, respectivamente, las

operaciones de UNIÓN, INTERSECCIÓN y COMPLEMENTO. Una subálgebra de un álgebra potencia es un *álgebra de conjuntos*. M. Stone probó en 1936 el teorema de representación que lleva su nombre: toda álgebra de Boole es isomorfa a un álgebra de conjuntos. Desde el principio, las álgebras de conjuntos y las álgebras de proposiciones (o, más precisamente, las ÁLGEBRAS DE LINDENBAUM) han sido consideradas como las álgebras de Boole por antonomasia, aunque posteriormente la teoría ha encontrado otras aplicaciones, por ejemplo en el análisis de los circuitos eléctricos y electrónicos que están en la base de los computadores actuales y que incorporan también la estructura de álgebra de Boole.

Un *átomo* de un álgebra de Boole es un elemento que está inmediatamente precedido por el **0** del álgebra, es decir, tal que ningún otro está entre el **0** y él. Por tanto, a es un átomo de un álgebra de Boole $\mathcal{B}$ si y solo si (1) $a \in B$, (2) $a \neq \mathbf{0}$ y (3) no hay ningún $z \in B$ tal que $\mathbf{0} < z < a$. Un átomo de un álgebra de Boole con universo B es un elemento minimal de $B - \{\mathbf{0}\}$. Un álgebra de Boole es *atómica* si y solo si cada elemento distinto del **0** es un átomo o está precedido por un átomo. Por tanto, un álgebra de Boole atómica satisface el axioma

$$\forall x(x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists y(y \preccurlyeq x \wedge y \neq \mathbf{0} \wedge \forall z\,(z < y \Rightarrow z = \mathbf{0} \vee z = y)))$$

Las nociones de átomo y de álgebra de Boole atómica fueron introducidas por Schröder (1891).

Un álgebra de Boole es *sin átomos* si y solo si carece de átomos. Por tanto, un álgebra de Boole sin átomos satisface el axioma

$$\neg\exists y(y \neq \mathbf{0} \wedge \forall z(z < y \Rightarrow z = \mathbf{0} \vee z = y))$$

Dos álgebras de Boole numerables y sin átomos son isomorfas. La teoría de las álgebras de Boole sin átomos es $\aleph_0$-categórica. Y es completa (por el TEOREMA DE ŁOS-VAUGHT). Esta teoría no es κ-categórica para ningún otro cardinal $\kappa \neq \aleph_0$. El álgebra de Lindenbaum es, salvo isomorfía, la única álgebra de Boole numerable sin átomos.

Un álgebra de Boole carece de átomos si y solo si su orden $<$ es denso, es decir, si verifica

$$\forall x \forall y(x < y \Rightarrow \exists z\,(x < z \wedge z < y))$$

Un álgebra de Boole es completa si su correspondiente retículo es completo, es decir, si cada subconjunto $S \subseteq B$ tiene un ínfimo y un supremo (simbolizados inf S y sup S, respectivamente). Toda álgebra de Boole atómica y

completa es isomorfa al álgebra potencia del conjunto de sus átomos. Equivalentemente, y usando la relación de orden canónico, si $\langle B,\leqslant\rangle$ es un álgebra de Boole atómica y completa y A es el conjunto de sus átomos, entonces $\langle B,\leqslant\rangle \cong \langle \wp A,\subseteq\rangle$.

Toda álgebra de Boole finita es atómica, completa e isomorfa a un álgebra potencia. Las álgebras potencia son las únicas álgebras de Boole atómicas y completas, salvo isomorfismo.

álgebra de la lógica (A. *Algebra der Logik*, F. *algèbre des propositions*, I. *algebra of logic*). Boole fue el primero en usar métodos algebraicos para estudiar el razonamiento humano. Pensaba que la validez del álgebra no dependía de la interpretación de sus símbolos, sino solo de sus leyes de combinación. Tanto él como sus continuadores pretendían interpretar cierta álgebra abstracta como refiriéndose tanto a las proposiciones y sus conexiones lógicas, por un lado, como a las clases y sus operaciones conjuntistas, por otro, pues intuían una semejanza estructural en ambas interpretaciones. Esa estructura común acabó siendo precisada más tarde y ahora es conocida como el ÁLGEBRA DE BOOLE. De todos modos, Boole mismo nunca llegó a definir el álgebra de Boole. En especial, usó el signo + (su signo de disyunción o unión) para la disyunción exclusiva y para la unión de clases disjuntas y no para la disyunción inclusiva y la unión de clases cualesquiera, que es lo que se requiere, como luego pusieron de relieve Jevons, Peirce y Schröder.

Si el álgebra de la lógica debía dar cuenta de todos los razonamientos correctos, no podía limitarse a ser un álgebra de clases, sino que tenía que tomar en consideración las relaciones. La lógica o álgebra de relaciones fue iniciada por de Morgan y desarrollada por Peirce y Schröder, que no solo aplicaron a las relaciones las operaciones conjuntistas como unión e intersección, sino que además definieron nuevas operaciones específicas de las relaciones, como la INVERSA de una relación o la composición de dos relaciones. Las relaciones fueron también independientemente introducidas en la lógica en la tradición calculística de Frege y Russell. Aunque la tradición calculística de Frege acabó siendo preponderante en la lógica, la tradición algebrista continuó su desarrollo con Löwenheim, culminando más recientemente en la teoría de modelos. De hecho, desde Gödel y Tarski, la lógica actual es una síntesis de las dos tradiciones.

álgebra de Lindenbaum (A. *Lindenbaumsche Algebra*, F. *algèbre de Lindenbaum*, I. *Lindenbaum algebra*). Álgebra sobre las clases de fórmulas equivalentes cuyas operaciones corresponden a las conexiones lógicas. Consideremos la relación de equivalencia entre fórmulas cualesquiera del lenguaje lógico $\mathscr{L}$: α *equiv* β si y solo si $\vdash(\alpha \Leftrightarrow \beta)$. Obviamente, *equiv* es una rela-

ción de equivalencia en $\mathcal{L}$. Formemos el espacio cociente $\mathcal{L}/equiv$ cuyos elementos son las clases de equivalencia $[\alpha] = \{\beta \in \mathcal{L} : \alpha \; equiv \; \beta\}$ para cada $\alpha \in \mathcal{L}$. Este espacio cociente es el universo de un sistema con las operaciones binarias $\sqcup$ y $\sqcap$, la operación unaria C y los individuos **0** y **1**, donde $[\alpha]\sqcup[\beta] = [(\alpha \vee \beta)]$, $[\alpha]\sqcap[\beta] = [(\alpha \wedge \beta)]$, $C[\alpha] = [\neg\alpha]$, $\mathbf{0} = [(\varphi \wedge \neg\varphi]$ y $\mathbf{1} = [(\varphi \vee \neg\varphi)]$ para alguna fórmula φ. El sistema $\langle \mathcal{L}/equiv, \sqcup, \sqcap, C, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ se denomina el *álgebra de Lindenbaum* (de la lógica proposicional o de primer orden) o, a veces, el álgebra de Lindenbaum-Tarski. Aunque la lógica proposicional o la de primer orden no son álgebras de Boole, sí lo es su álgebra de Lindenbaum. Boole y sus continuadores desarrollaron la teoría de las álgebras de Boole con la intención de que representase el álgebra de la lógica, la cual es en realidad el álgebra de Lindenbaum, que representa la estructura conectiva de la lógica y efectivamente es un álgebra de Boole.

algoritmo (A. *Algorithmus*, F. *algorithme*, I. *algorithm*). En el siglo IX el matemático islámico al-Khwarizmi describió la manera de sumar, restar, multiplicar y dividir en el sistema decimal de numeración. Este sistema fue introducido por los árabes en Europa, donde se dio el nombre de algoritmo al arte de computar usando numerales arábigos. Más recientemente, el significado de la palabra *algoritmo* se ha ampliado hasta cubrir cualquier procedimiento de computación o manipulación de signos sometido a reglas automáticas, explícitas y precisas. Un algoritmo debe cumplir las siguientes condiciones: 1) Deben estar bien definidos los tipos de signos e hileras de signos que pueden servir como inputs, entradas o argumentos del algoritmo, así como los que puedan servir de outputs, salidas o valores. 2) El procedimiento debe constar de reglas de manipulación de las hileras de signos que sean tan precisas, unívocas y explícitas que su aplicación no deje lugar a duda alguna ni requiera ningún tipo de iniciativa o decisión por parte de la persona o la máquina que las aplica. 3) La operación correspondiente a cada regla debe ser siempre efectiva, es decir, debe poder llevarse a cabo de hecho en un tiempo finito. Un algoritmo de computación o de decisión (aunque no uno de enumeración) debe cumplir además otra condición suplementaria: 4) La aplicación del algoritmo debe llevarse a cabo siempre en un número finito de pasos, tras los cuales el algoritmo se para o termina. Ejemplos de algoritmos son el procedimiento escolar para multiplicar dos números, o el algoritmo euclídeo para encontrar el máximo común divisor de dos números, o el procedimiento de las tablas de verdad para comprobar si una fórmula proposicional dada es válida o no, o el procedimiento usado por un procesador de textos para detectar las faltas de ortografía o por una hoja electrónica para actualizar una tabla en función de los nuevos datos.

En el siglo XX se han ofrecido diversas elucidaciones formales de la noción intuitiva de algoritmo. Quizá la más conocida es la que identifica un algoritmo con una MÁQUINA DE TURING. En este sentido un problema es algorítmicamente soluble si y solo si hay una máquina de Turing que lo soluciona. Propuestas alternativas se deben a Post, Church, Fitch, Kleene, Markov, Malcev y Minski, entre otros. De todos modos, se ha logrado demostrar que todas estas propuestas son equivalentes entre sí. Por ejemplo, el problema de computar los valores de una función es soluble si y solo si la función es computable. Una *función* es *computable* en el sentido de Turing (es calculable por una máquina de Turing) si y solo si es computable en el sentido de Church (es λ-definible), lo cual ocurre si y solo si se trata de una FUNCIÓN RECURSIVA. Otros problemas algorítmicos (de decisión, de búsqueda, de generación de una lista, etc.) son fácilmente reducibles al problema de la computación. Por ejemplo, un conjunto es decidible si su FUNCIÓN CARACTERÍSTICA es computable. La TESIS DE CHURCH, hoy generalmente admitida, dice que la noción de función recursiva (o cualquiera de sus equivalentes) capta perfectamente el significado de la noción de algoritmo de computación. Por tanto, puede considerarse que la dilucidación general de la noción de algoritmo ha sido uno de los grandes éxitos de la lógica y la teoría de la computación. Dado un algoritmo concreto, hay que probar que es correcto, es decir, que siempre da la respuesta correcta a las preguntas que se le formulan, computando, por ejemplo, el valor adecuado para cada argumento. Varios algoritmos que llevan a cabo la misma tarea pueden hacerlo de modo más o menos simple y más o menos rápido o eficiente, por lo que los teóricos de la computación tratan de medir su COMPLEJIDAD y eficacia.

aminoácidos (A. *Aminosäuren*, F. *acides aminés*, I. *amino acids*). Los aminoácidos son los componentes estructurales o monómeros de ese tipo especial de POLÍMEROS que son las PROTEÍNAS. Estos monómeros se llaman *aminoácidos* porque (con una excepción, la prolina) contienen un grupo amino (BNH_2) y un grupo carboxilo (BCOOH). Todos los aminoácidos están construidos de acuerdo con el mismo diseño básico: un átomo de carbono central, enlazado con un grupo amino, un grupo carboxilo, otro átomo de hidrógeno y un grupo variable, llamado cadena lateral. La cadena lateral es específica del aminoácido de que se trate y le confiere sus características peculiares. El resto es idéntico en todos los aminoácidos. Aunque hay una inmensa variedad de aminoácidos posibles, tantos como cadenas laterales orgánicas, tan sólo 20 tipos distintos de aminoácidos (glicina, alanina, valina, leucina, etc.) son usados por la vida en la Tierra para fabricar proteínas. En 1952 Miller y Urey realizaron el primer experimento que pretendía reproducir las condiciones prevalentes en la Tierra cuando se originó la vida. Reprodujeron en un

matraz una "atmósfera" consistente en una mezcla de vapor de agua (H_2O), metano (CH_4), amoniaco (NH_3) e hidrógeno (H_2), sometida a frecuentes descargas eléctricas (los "rayos"). El experimento produjo dentro del matraz varios aminoácidos encontrados en las proteínas, como la glicina o la alanina, pero también otros aminoácidos no encontrados en las proteínas, como la norvalina o la sarcosina.

Todos los aminoácidos son asimétricos en torno a su átomo de carbono central, por lo que tienen quiralidad o simetría especular, como la mano (χείρ, en griego). Cada aminoácido puede presentarse en dos versiones: levógiro o destrógiro, de mano izquierda o derecha. Los compuestos abióticos presentan el mismo número de aminoácidos destrógiros que levógiros. Los aminoácidos que se obtienen en los experimentos como los de Miller y Urey, al igual que los aminoácidos hallados en los meteoritos, son de quirilidad mixta, en torno al 50% izquierda y el otro 50% derecha. Sin embargo, todos los aminoácidos usados por la vida en la Tierra (con la excepción de la glicina, que carece de mano) son levógiros, nunca destrógiros. La quiralidad izquierda de los aminoácidos biogénicos surgió presumiblemente al azar y ha sido preservada por herencia.

ampere. Unidad internacional de corriente eléctrica. Según la definición adoptada en la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1948, 1 *ampere* (1 A) es aquella corriente constante que, si se mantiene en dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y sección circular desdeñable, separados en el vacío por la distancia de un metro, produce entre esos conductores una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud (1 newton es la fuerza que imprime a una masa de 1 kg una aceleración de 1 m/s^2).

análisis dimensional (A. *Dimensionalanalyse*, F. *analyse dimensionelle*, I. *dimensional analysis*). Las cantidades cuya igualdad aseveran las ecuaciones de la física frecuentemente son cantidades dimensionadas; en tal caso, la cantidad que figura al lado izquierdo de una ecuación y la que figura al lado derecho tienen necesariamente la misma dimensión (si el lado izquierdo es una energía y se mide en joules, el lado derecho no puede ser una diferencia de potencial y medirse en voltios). Suele llamarse, con cierta solemnidad, *análisis dimensional* a cualquier reflexión encaminada a derivar de este requisito obvio conclusiones interesantes para la física. Por ejemplo, se dice que, si el periodo T del péndulo depende únicamente de su longitud l y la aceleración de gravedad g, la relación de dependencia no puede ser otra que $T = a\sqrt{l/g}$, donde la constante a es un número puro, pues solo así se igualan las dimensiones del lado izquierdo y el lado derecho. Y se ha sostenido que la conocida ecuación de Einstein $E = mc^2$ no establece una relación de

identidad entre la masa *m* y la energía *E*, pues el factor de proporcionalidad c^2 que aparece en el lado derecho tiene la dimensión (*espacio/tiempo*)^2.

análisis no estándar (A. *Nichtstandard-Analysis*, F. *analyse non-standard*, I. *non-standard analysis*). Inspirado en los MODELOS NO ESTÁNDAR de los NÚMEROS NATURALES descubiertos por Skolem (1933), Abraham Robinson (1966) propuso un modelo no estándar de la teoría de los NÚMEROS REALES, un cuerpo $^*\mathbb{R}$, que incluye al modelo estándar $\mathbb{R}$. Además de los números reales ordinarios, $^*\mathbb{R}$ contiene números infinitesimales, esto es, tales que el producto de uno de ellos por un entero, por grande que este sea, es menor que cualquier elemento de $\mathbb{R}$. El análisis en $^*\mathbb{R}$ vindica así, en cierto modo, la referencia a infinitesimales, común en los primeros tiempos del cálculo y desdeñada luego, como exenta de rigor matemático, por los sucesores de Cauchy.

analítico / sintético (A. *analytisch/synthetisch*, F. *analytique/synthétique*, I. *analytic/synthetic*). Clasificación de las proposiciones introducida por Kant y caracterizada por él así: una proposición es *analítica* si su predicado está contenido en el concepto del sujeto, *sintética* si su predicado no está contenido en el concepto del sujeto. Puesta en estos términos, la clasificación se aplica solo a las proposiciones que atribuyen un predicado a un sujeto, esto es, a las proposiciones categóricas afirmativas. Es fácil extenderla a las categóricas negativas como sigue: la proposición '*S* no es *P*' es *analítica* si *P* es incompatible con un predicado contenido en el concepto de *S*; de otro modo, '*S* no es *P*' es *sintética*. Pero Kant de hecho esgrime la clasificación como si fuese aplicable a *toda clase de proposiciones* —hipotéticas, disyuntivas, relacionales— sin limitación alguna. Sirve mejor a este propósito la caracterización propuesta un siglo más tarde por Frege: una proposición es *analítica* si se deduce de definiciones y las leyes de la lógica; de otro modo, es *sintética*. (Obsérvese que, si *p* es una definición o una ley lógica, *p* se deduce por MODUS PONENS de *p* y la ley lógica $\vdash(p \rightarrow p)$; por lo tanto, contra lo que a veces se lee, tanto las leyes lógicas como las definiciones son *analíticas* conforme a la caracterización de Frege.) Es claro, en todo caso, que el propósito de la clasificación kantiana era separar aquellas proposiciones cuyo valor veritativo queda determinado con solo enunciarlas (aunque no siempre salte a la vista) de aquellas cuyo valor veritativo no depende exclusivamente de los conceptos que el enunciado pone en relación.

El valor veritativo de las proposiciones sintéticas A POSTERIORI depende de la experiencia sensible. Kant concentra su atención en las proposiciones sintéticas A PRIORI, que él entiende haber sido el primero en señalar. A este grupo pertenecen según él las proposiciones de la aritmética y la geometría y los principios a priori de la ciencia natural (conservación de la materia, prin-

cipio de causalidad, etc.), y pertenecerían también las proposiciones interesantes de la metafísica, si tuviesen un fundamento a nuestro alcance. Mas no lo tienen, pues la única base extraconceptual de que disponemos para cimentar nuestras proposiciones sintéticas a priori radica en las condiciones de posibilidad de la experiencia misma, y en particular en las "formas a priori de la sensibilidad", espacio y tiempo.

En la primera mitad del siglo XX, cuando la aritmética ha sido aparentemente reducida a la lógica por Frege y sus seguidores, la geometría ha dejado de verse como un conocimiento a priori y las nuevas teorías físicas han barrido con los supuestos principios a priori de la ciencia natural kantiana, la existencia y la posibilidad de proposiciones sintéticas a priori se pierde de vista. Los pares *analítico* y *a priori*, por una parte, y *sintético* y *a posteriori*, por otra, son reputados equivalentes y —sobre todo en la literatura del EMPIRISMO LÓGICO— se los trata como sinónimos. De esta doble identificación (o confusión) arranca la crítica del distingo entre *proposiciones analíticas* y *sintéticas* por Quine (1951) y otros. A la luz de esa crítica, la división no puede sostenerse como algo fijo y absoluto, sino más bien como relativa a cada sistema discursivo, "juego de lenguaje" o proyecto intelectual; fácil de establecer y mantener en el ámbito de las jergas especializadas y los lenguajes artificiales, no es obvia ni mucho menos estable en el terreno movedizo del discurso filosófico y la conversación ordinaria.

anarquismo metodólogico (A. *methodologischer Anarchismus*, F. *anarchisme méthodologique*, I. *methodological anarchism*). Postura sostenida por Feyerabend en su ensayo *Contra el método* (1975) y conforme a la cual la investigación científica no tiene que seguir un método único, gobernado por principios fijos y universales; al contrario, en cuestiones de método, "todo está permitido" (*anything goes!*). Por lo mismo, no hay criterios objetivos para juzgar por su sola metodología un proyecto de investigación que aún no ha producido resultados.

anillo (A. *Ring*, F. *anneau*, I. *ring*). Sea $\langle A, \oplus\rangle$ un GRUPO ABELIANO, con elemento neutro **0**. Sea $\otimes : A \times A \rightarrow A$ una función que cumple las siguientes "leyes de distribución" respecto a $\oplus$, para cualesquiera $a, b, c \in A$:

(i) $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
(ii) $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

(donde $z \otimes y$ y $z \oplus y$ denotan, respectivamente, el valor de $\otimes$ y de $\oplus$ en el argumento $\langle z,y\rangle$). Entonces, $\mathbb{A} = \langle A, \oplus, \mathbf{0}, \otimes\rangle$ es un *anillo*. Sea $a \in A$. El inverso de a por la operación $\oplus$ se designa normalmente con $-a$.

El anillo $\mathbb{A}$ es *asociativo* si la función $\otimes$ es asociativa, esto es, si para todo a, b, $c \in A$, $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$. El anillo $\mathbb{A}$ es *conmutativo* si la función $\otimes$ es conmutativa, esto es, si para todo a, $b \in A$, $a \otimes b = b \otimes a$. En general, los anillos se presumen asociativos y esta propiedad no suele mencionarse explícitamente. Por otra parte, en vista de la importancia que tienen los anillos no conmutativos (vgr., los anillos de MATRICES), la conmutatividad de un anillo normalmente no se da por descontada. El anillo $\mathbb{Z}$ de los NÚMEROS ENTEROS es asociativo y conmutativo.

anomalía (A. *Anomalie*, F. *anomalie*, I. *anomaly*). Thomas Kuhn llamó *anomalías* a las discrepancias constatadas por la CIENCIA NORMAL entre los resultados de la observación y la experimentación y las predicciones que ella deriva de modelos teóricos inspirados por su PARADIGMA. La acumulación de anomalías no resueltas acaba desencadenando, según Kuhn, una REVOLUCIÓN CIENTÍFICA con cambio de paradigma. El término se utiliza en un sentido similar en la METODOLOGÍA DE LOS PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN de Imre Lakatos.

En las TEORÍAS CUÁNTICAS DE CAMPOS se llama, por antonomasia, *anomalía* la ruptura de una SIMETRÍA clásica —y la ruptura concomitante del correspondiente principio de conservación (↗TEOREMA DE NOETHER)— por un efecto cuántico. Algunas anomalías de esta clase, que entrañan la ruptura de una simetría global, son aceptables e incluso oportunas desde un punto de vista fenomenológico; pero la ruptura de simetrías locales (simetrías *GAUGE*) es inadmisible, pues da lugar a inconsistencias fatales.

Propiamente, el vocablo —del griego ἀνωμαλία— significa 'falta de uniformidad' y designaba en la astronomía geocéntrica el ángulo descrito en el cielo por un planeta desde su último perigeo (tal vez porque el incremento cotidiano del mismo está lejos de ser uniforme). En la astronomía moderna, heliocéntrica, el término pasó automáticamente a designar el ángulo descrito por cada planeta desde su último perihelio (solo 'la anomalía de la Luna' conserva su significado anterior). Pero también se ha llamado *anomalía* al desplazamiento angular de un planeta con respecto a la posición que le correspondería conforme al modelo teórico del sistema solar adoptado por los astrónomos. En este sentido se hablaba de las anomalías de Urano y de Mercurio. La primera fue eliminada con la construcción, por Leverrier y Adams, de un nuevo modelo del sistema solar con ocho planetas, en lugar de los siete observados hasta entonces. (En 1846 Galle descubrió Neptuno en la región del cielo donde debía estar el octavo planeta según los cálculos de Leverrier.) En cuanto a la segunda, su primera solución satisfactoria, debida a Einstein, supone un cambio drástico en la teoría de la gravitación (↗PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO, RELATIVIDAD). Este caso de una anomalía astronómica cuya superación

vino aparejada con un "cambio de paradigma" en la mecánica celeste puede haber motivado el uso que da Kuhn a la palabra 'anomalía'.

antecedente (A. *Antezedens*, F. *antécédent*, I. *antecedent*). La cláusula hipotética de una proposición CONDICIONAL es el antecedente del condicional. En 'si *P*, entonces *Q*', *P* es el antecedente y *Q*, el consecuente. El antecedente de un condicional es condición suficiente de su consecuente. Una manera frecuente de probar un condicional consiste en suponer su antecedente y, bajo ese supuesto, proceder a probar su consecuente.

antinomia (A. *Antinomie*, F. *antinomie*, I. *antinomy*). Término introducido por Kant para designar lo que él consideró como un inevitable conflicto de la razón consigo misma (en el cual ésta va contra, ἀντί, su propia ley, νόμος). Consiste dicho conflicto en la posibilidad de demostrar tesis contradictorias concernientes a (i) la duración y extensión finitas o infinitas del Universo, (ii) la divisibilidad finita o infinita de la materia, (iii) el determinismo y la libertad y (iv) la contingencia o necesidad del acontecer. El propio Kant inicia la práctica de llamar *antinomias* a cada uno de estos pares de tesis contradictorias. Ella da lugar más tarde al uso generalizado de *antinomia* para designar cualquier contradicción reputada fundamental e insuperable, y especialmente las surgidas en la teoría de CONJUNTOS a fines del siglo XIX, aunque en este diccionario se ha preferido llamarlas *paradojas*, conforme al uso prevaleciente hoy (↗PARADOJA DE BURALI-FORTI, PARADOJA DE CANTOR, PARADOJA DE RUSSELL).

aplicación (A. *Abbildung*, F. *application*, I. *mapping*). ↗FUNCIÓN.

argumento del agujero (A. *Loch-Schluss*, F. *argument du trou*, I. *hole argument*). Argumento presentado por Einstein (1914) para justificar el hecho de que las ecuaciones de campo de la teoría de la gravitación publicada por él y Grossmann en 1913 no fuesen generalmente covariantes, esto es, no preservasen su validez bajo transformaciones arbitrarias de coordenadas (↗RELATIVIDAD). Supongamos que el campo gravitacional esté gobernado por ecuaciones generalmente covariantes que relacionen la métrica espaciotemporal $\mathbf{g}$ con el TENSOR DE ENERGÍA $\mathbf{T}$. Einstein imagina un hoyo o agujero en el universo, esto es, una región finita $\mathcal{H}$, sobre la cual $\mathbf{T}$ es idéntico a 0. Sea f un DIFEOMORFISMO del espaciotiempo sobre sí mismo, tal que f concuerda con la identidad en todas partes excepto en $\mathcal{H}$. f "arrastra" los campos tensoriales; designamos con $f_*\mathbf{g}$ y $f_*\mathbf{T}$, respectivamente, la métrica y el tensor de energía resultantes del "arrastre". Es claro entonces que $f_*\mathbf{T} = \mathbf{T}$, pero $f_*\mathbf{g} \neq \mathbf{g}$; esto implica que, si γ es la cosmolínea geodésica de una partícula de prueba

en caída libre a través de $\mathcal{H}$, $f \circ \gamma$ es una geodésica de la métrica f_*g que normalmente diferirá de γ. Por lo tanto, una misma distribución espaciotemporal de la materia prescribe dos cosmolíneas diferentes a nuestra partícula de prueba. Para Einstein este argumento demostraba que una teoría de la gravitación cuyas ecuaciones de campo cumpliesen el requisito de covariancia general no sería una teoría determinista y, por lo tanto, según las ideas de ese tiempo, no sería admisible como teoría física.

El argumento del agujero no fue nunca más mencionado por Einstein, al menos en público —ni siquiera para admitir su error—, después que publicó en 1915 las ECUACIONES DE CAMPO que llevan su nombre, las cuales por cierto son universalmente covariantes. Fue revivido por Earman y Norton (1987), que ven en él un corolario de la tesis filosófica que atribuye realidad sustancial al espaciotiempo. Como la mera existencia de las ecuaciones de campo de Einstein exhibe la falsedad del argumento del agujero, ella constituiría también una refutación *de facto* de la tesis sustancialista.

aritmética cardinal transfinita (A. *Arithmetik der Kardinalzahlen*, F. *arithmétique cardinale transfinie*, I. *arithmetic of cardinal numbers*). Cantor introdujo los números CARDINALES transfinitos y nos enseñó a operar con ellos. La aritmética cardinal es mucho menos fina que la ordinal, pero resulta más útil y manejable cuando solo nos interesan las meras relaciones de cantidad entre conjuntos. Las operaciones aritméticas cardinales, restringidas a los números finitos o naturales, coinciden con las ordinales. Así, si llamamos $+_o$, $+_c$, $\cdot_o$ y $\cdot_c$ a la adición ordinal y cardinal y a la multiplicación ordinal y cardinal, respectivamente, tenemos:

$$\forall x \forall y\ (x \in \omega \wedge y \in \omega \Rightarrow x +_o y = x +_c y \wedge x \cdot_o y = x \cdot_c y)$$

Sin embargo, las operaciones aritméticas ordinales y cardinales son muy distintas cuando se trata de números infinitos. Por ejemplo, aunque $\omega = \aleph_0$, ocurre que $\omega +_o 1 \neq \omega$ y $\omega +_o \omega \neq \omega$, mientras que $\aleph_0 +_c 1 = \aleph_0$ y $\aleph_0 +_c \aleph_0 = \aleph_0$. En el resto de esta entrada nos referiremos solo a las operaciones aritméticas cardinales, por lo que ya no usaremos el subíndice $_c$ para indicarlo.

Supongamos que μ y ν son los cardinales de dos conjuntos disjuntos A y B. $A \cap B = \varnothing$, $|A| = \mu$ y $|B| = \nu$. Entonces la suma cardinal de μ y ν es la cardinalidad de la unión de A y B: $\mu + \nu = |A| + |B| = |A \cup B|$. Dos cardinales μ y ν no son nunca disjuntos, salvo si uno de ellos es 0. Por tanto, para aplicarles la definición de la adición cardinal, sustituimos μ por $\mu \times \{0\}$ y ν por $\nu \times \{1\}$. He aquí la definición de la adición de cardinales: $\mu + \nu = |(\mu \times \{0\}) \cup (\nu \times \{1\})|$. La adición cardinal es asociativa y conmutativa y tiene el 0 como elemento neutro. En la adición cardinal en que intervienen cardinales infinitos vale

aquello de que el pez grande se come al chico, es decir, el cardinal infinito se come al finito, lo absorbe. Por ejemplo. $\aleph_0+1 = \aleph_0+2 = \aleph_0+3 = \aleph_0$. Caso de que los dos sumandos sean infinitos, el mayor se come al chico, lo absorbe. Por ejemplo, $\aleph_0+\aleph_1 = \aleph_1$. En general, para cada dos cardinales infinitos μ y ν ocurre que $\mu+\nu = \max(\mu,\nu)$.

Supongamos que μ y ν son los cardinales de dos conjuntos A y B, $|A| = \mu$ y $|B| = \nu$. Entonces el producto cardinal de μ y ν es la cardinalidad del producto cartesiano de A y B: $\mu\cdot\nu = |A|\cdot|B| = |A\times B|$. He aquí la definición del producto de cardinales: $\mu\cdot\nu = |\mu\times\nu|$. La multiplicación cardinal es asociativa y conmutativa y tiene el 1 como elemento neutro. En la multiplicación cardinal en que intervienen cardinales infinitos de nuevo vale aquello de que el pez grande se come al chico, es decir, el cardinal infinito se come al finito, lo absorbe. Por ejemplo, $\aleph_0\cdot 1 = \aleph_0\cdot 2 = \aleph_0\cdot 3 = \aleph_0$. Caso de que los dos sumandos sean infinitos, el mayor se come al chico, lo absorbe. Por ejemplo, $\aleph_0\cdot\aleph_1 = \aleph_1$. En general, para cada dos cardinales infinitos μ y ν ocurre que $\mu\cdot\nu = \max(\mu,\nu)$.

Cantor introdujo las operaciones de adición y multiplicación cardinales en 1887 y la operación de exponenciación cardinal en 1895. Supongamos que ν y μ son los cardinales de dos conjuntos A y B, $|A| = \nu$ y $|B| = \mu$. Consideremos el conjunto de todas las funciones de A en B, B^A. ¿Cuántas tales funciones hay? $|B|^{|A|} = \mu^\nu$. He aquí la definición de la exponenciación de cardinales: $\mu^\nu = |\{f\colon \nu \rightarrow \mu\}|$. La exponenciación cardinal tiene muchas de las propiedades esperables de una exponenciación, por ejemplo, para cualesquiera cardinales μ, ν, κ: $(\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu\cdot\nu}$, $(\mu\cdot\nu)^\kappa = \mu^\kappa\cdot\nu^\kappa$, $\kappa^\mu\cdot\kappa^\nu = \kappa^{\mu+\nu}$, $\kappa^0 = 1$, etc. La base infinita absorbe al exponente finito. Si $n\in\omega$ y $n \neq 0$, entonces para cualquier α, $\aleph_\alpha{}^n = \aleph_\alpha$. Sin embargo, los axiomas habituales de la teoría de conjuntos no determinan el valor de $2^{\aleph_0}$ y dejan indecidida la cuestión de la HIPÓTESIS DEL CONTINUO, es decir, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ o no.

aritmética ordinal (A. *Arithmetik der Ordinalzahlen*, F. *arithmétique ordinale*, I. *ordinal arithmetic*). Cantor no se limitó a introducir los números ordinales como los tipos de orden de los buenos órdenes, sino que en 1895 mostró cómo extender las operaciones aritméticas sobre números naturales a ordinales cualesquiera, de tal modo que el cálculo aritmético fuese aplicable también a lo transfinito. Esta extensión de las operacciones aritméticas es conservadora en el sentido de que su restricción a los ordinales finitos (números naturales) es idéntica a las operaciones aritméticas habituales sobre números naturales.

Sean $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$ dos órdenes lineales, tales que $A \cap B = \varnothing$. La *unión ordenada* de esos dos órdenes lineales es otro orden lineal, designado como $\langle A,R\rangle \oplus \langle B,S\rangle$ y definido del siguiente modo:

$$\langle A,R\rangle \oplus \langle B,S\rangle = \langle A \cup B,\ R \cup S \cup (A \times B)\rangle$$

Por tanto, la unión ordenada tiene como universo la unión de A y B. Dado un par de elementos $\langle x,z\rangle$ de $A \cup B$, si ambos son elementos de A, se mantiene el orden R entre ellos; si lo son de B, el orden S; y si uno es elemento de A y el otro de B, el elemento de A precede al de B en cualquier caso. Así pues, si $x, w \in A$, x precede a w si y solo si xRw; si $x, w \in B$, x precede a w si y solo si xSw; y si $x \in A$ y $w \in B$, entonces x precede a w incondicionalmente. El efecto práctico de unir ordenadamente dos órdenes lineales consiste en colocar el segundo orden lineal a continuación del primero. Por ejemplo, $\langle a,b,c\rangle \oplus \langle k,l\rangle = \langle a,b,c,k,l\rangle$. Así también, $\omega^*+\omega = \langle\ldots-3,-2,-1\rangle \oplus \langle 0,1,2,3,\ldots\rangle = \langle\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\rangle = \zeta$.

Ahora podemos introducir la *adición de tipos de orden*. Sean ρ y σ tipos de orden tales que ρ = tipo de orden de $\langle A,R\rangle$, σ = tipo de orden de $\langle B,S\rangle$ y $A \cap B = \varnothing$. Definimos la adición + de los tipos de orden ρ y σ del siguiente modo:

$$\rho+\sigma = \text{tipo de orden de } \langle A,R\rangle \oplus \langle B,S\rangle$$

Esta definición es independiente de los representantes elegidos. La adición de tipos de orden es asociativa. Para cualesquiera tipos de orden ρ, σ, τ: $(\rho+\sigma)+\tau = \rho+(\sigma+\tau)$. Sin embargo, la adición de tipos de orden no es conmutativa. Por ejemplo, $1+\omega \neq \omega+1$. En efecto, tipo de orden de $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$ + tipo de orden de $\langle a\rangle$ = tipo de orden de $\langle 0,1,2,3,\ldots,a\rangle = \omega+1 \neq \omega$ = tipo de orden de $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$, ya que $\langle 0,1,2,3,\ldots a\rangle$ y $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$ no son isomorfos, pues el primero tiene un máximo, y el segundo, no. Por otro lado, tipo de orden de $\langle a\rangle$ + tipo de orden de $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$ = tipo de orden de $\langle a,0,1,2,3,\ldots\rangle = 1+\omega = \omega$ = tipo de orden de $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$, ya que $\langle a,0,1,2,3,\ldots\rangle$ es isomorfo a $\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle$ bajo el isomorfismo $f(a) = 0$ y $f(n) = n+1$. Por tanto, $1+\omega = \omega \neq \omega+1$. En general, $n+\omega = \omega \neq \omega+n$ (siendo n un número natural distinto de 0). Para cada tipo de orden ρ: $\rho+0 = 0+\rho = \rho$.

Entre 1923 y 1928 John von Neumann renovó la teoría de los números ordinales, justificando en su teorema general de RECURSIÓN TRANSFINITA una manera mucho más fácil y directa de definir las funciones ordinales y deducir sus propiedades. Así, la *adición de ordinales* puede definirse por recursión:

1) $\alpha+0 = \alpha$
2) $\alpha+s(\beta) = s(\alpha+\beta)$
3) $\alpha+\lambda = \sup\{\alpha+\gamma : \gamma<\lambda\} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha+\gamma$ para todo ordinal límite λ

Desde luego, la adición ordinal así definida tiene las mismas propiedades que la anteriormente definida como el tipo de orden de la unión ordenada.

La *multiplicación de ordinales* puede definirse farragosamente como el tipo de orden del producto lexicográficamente ordenado, pero aquí nos limitaremos a indicar su definición recursiva:

1) $\alpha \cdot 0 = \alpha$
2) $\alpha \cdot s(\beta) = (\alpha \cdot \beta)+\alpha$
3) $\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \lambda\} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \cdot \gamma$ para todo ordinal límite λ

De modo similar se pueden definir las otras operaciones con números ordinales, como la exponenciación. Algunas propiedades de las operaciones aritméticas ordinales son las mismas que las de las correspondientes operaciones con números naturales. Por ejemplo, en ambos casos la adición y la multiplicación son asociativas y ambas operaciones son distributivas por la izquierda. En efecto, para cualesquiera α,β,γ, $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$. Otras propiedades de las operaciones aritméticas ordinales son distintas a las naturales. Por ejemplo, ya vimos que la adición ordinal no es conmutativa; tampoco lo es la multiplicación ordinal. Y para estas dos funciones no vale en general la distributividad por la derecha. Por ejemplo, $(1 + 1) \cdot \omega \neq (1 \cdot \omega) + (1 \cdot \omega)$. En efecto, $(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega = (1 \cdot \omega) + (1 \cdot \omega)$. Otras propiedades, finalmente, no tienen correspondencia en el caso finito, como la de que $\alpha + \lambda$ siempre es un ordinal límite, como también lo es $\alpha \cdot \lambda$, si $\alpha \neq 0$, o α^λ, si $\alpha > 1$.

atlas (A. *Atlas*, F. *atlas*, I. *atlas*). ↗CARTA.

atomismo lógico (A. *logischer Atomismus*, F. *atomisme logique*, I. *logical atomism*). Doctrina filosófica que concibe el mundo como un agregado de hechos irreducibles, cada uno de los cuales consiste en que un objeto simple tiene una propiedad inanalizable, o en que dos o más objetos simples sostienen una relación inanalizable. Tales hechos elementales se expresan mediante "enunciados atómicos" de la forma Pu o $Ru_1u_2...u_n$, donde P es un predicado unario, R un predicado n-ario (relacional) y u, u_1, u_2, ..., u_n son nombres propios de objetos simples. Todo enunciado dotado de sentido es, o bien (i) un enunciado atómico, o bien (ii) la negación de un enunciado dotado de sentido, o bien (iii) la disyunción de dos o más enunciados dotados de sentido. En particular, un enunciado existencial de la forma $\exists xPx$, donde el predicado P significa una propiedad simple, equivale a una disyunción de enunciados atómicos, $Pu_1 \vee Pu_2 \vee ... \vee Pu_n$, donde n es un entero positivo suficientemente grande (¿infinito, tal vez?); y un enunciado universal de la forma

$\forall xPx$ equivale a la negación $\neg\exists x\neg Px$ del enunciado existencial $\exists x\neg Px$, esto es, a $\neg(\neg Pu_1 \vee \neg Pu_2 \vee \ldots \vee \neg Pu_n)$. Según los atomistas lógicos, el lenguaje del conocimiento no requiere más recursos que estos. El atomismo lógico fue formulado independientemente por Russell (1918) y Wittgenstein (1922), a partir de ideas que intercambiaron en 1914 o antes.

átomo (A. *Atom*, F. *atome*, I. *atom*). Del griego ἄτομος, 'sin cortar, indivisible'. Término usado tradicionalmente para designar los corpúsculos indestructibles que, según muchas filosofías naturales, serían los elementos últimos del mundo físico. Hoy llamamos *átomos* a los sistemas estables de PARTÍCULAS ELEMENTALES de que constan los ELEMENTOS químicos y que intervienen como ingredientes irreductibles en cada reacción química. Tales sistemas, por cierto, se pueden dividir y destruir, como ocurre por ejemplo en la llamada "bomba atómica". El tránsito de una a otra acepción del término *átomo* ilustra el desenfado con que los científicos manejan su vocabulario (como todo el mundo.)

Para los griegos Leucipo y Demócrito todo lo que existe son átomos, separados por el vacío. Los átomos difieren entre sí solamente por el tamaño, la forma y la orientación espacial. La rica y cambiante variedad de los fenómenos no es más que una interpretación humana del acontecer real, que consiste únicamente en el desplazamiento de los átomos en el vacío. Por su parte, Platón, en el *Timeo*, puso en boca del filósofo pitagórico de ese nombre una cosmología atomista que en cierto modo anticipa algunos aspectos de la física de partículas actual. En ella, cada uno de los cuatro elementos tradicionalmente reconocidos consta de corpúsculos idénticos que tienen la forma de uno de los cinco poliedros regulares: tetraedro (el fuego), cubo (la tierra), octaedro (el aire) e icosaedro (el agua). Ello explica el comportamiento observable de estos elementos, por ejemplo, que las partes del agua se deslicen con facilidad las unas respecto de las otras, mientras que las de la tierra se consolidan en cuerpos rígidos. Pero los ingredientes irreductibles de los cuerpos no son estos corpúsculos, sino los dos tipos de triángulo con que pueden construirse las caras de esos cuatro poliedros; el triángulo rectángulo isósceles y el triángulo rectángulo con un ángulo de 30° y otro de 60°. (En la cosmología de Timeo, la forma del dodecaedro queda reservada para el Universo mismo.)

Una variante del atomismo de Leucipo y Demócrito fue adoptada por Epicuro y Lucrecio, quienes se valieron de ella en su lucha contra la superstición y la superchería religiosas. La asociación del atomismo con el epicureísmo azuzó la hostilidad de las iglesias cristianas y las comunidades judías durante la Edad Media. Sin embargo, la escuela islámica de los *mutakallimun* fue capaz de concebir una forma de atomismo *ad maiorem Dei gloriam*: tan-

to los cuerpos como el tiempo constan, según ella, de pequeñísimas partes indivisibles; cada partícula corporal, con sus cualidades, dura solo un instante; las cualidades manifiestas de las cosas parecen perdurar porque Dios crea nuevamente, una y otra vez, las mismas partículas. Hubo también atomistas cristianos, como Nicolás de Autrecourt, condenado en 1347 a retractar sus doctrinas y quemar sus escritos.

El atomismo tuvo un desarrollo independiente en la India, donde posiblemente surgió antes que en Grecia y fue cultivado por hinduistas, budistas y jainistas.

El hallazgo de un manuscrito del poema de Lucrecio en 1414 y su difusión como libro impreso desde 1473 impulsaron el renacimiento del atomismo en Europa. Adoptado por Bruno y Galileo, tuvo un incansable propagandista en Gassendi, sacerdote católico que luchó por cristianizarlo. Boyle propugna lo que podemos llamar un atomismo *de facto*: todos los cuerpos están formados por pequeñísimos corpúsculos, cuyos movimientos y combinaciones producen las apariencias sensibles (por interacción, desde luego, entre los corpúsculos que constituyen el cuerpo de cada uno de nosotros y los que chocan con él); dichos corpúsculos, aunque físicamente estables, no tienen, sin embargo, la propiedad metafísica de la indestructibilidad. Esta concepción corpuscularista es compartida por Newton y Locke. Kant (1756) y Boscovic (1758) introdujeron independientemente una nueva forma de atomismo, en la cual cada partícula elemental de materia es un punto sin extensión, dotado de MASA, que es el centro de un campo de FUERZAS atractivas y repulsivas ejercidas sobre todas las demás partículas. Para Boscovic, la fuerza centrada en cada partícula oscila con la distancia entre la atracción y la repulsión. Para Kant, la fuerza atractiva no es otra que la gravedad newtoniana, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; la fuerza repulsiva, en cambio, es inversamente proporcional al cubo de la distancia y a distancias cortas prevalece sobre la atractiva, lo que explica la impenetrabilidad de los cuerpos.

Para ganar aceptación como parte de la ciencia natural moderna, el atomismo tenía que dejar de ser solo una fantasía especulativa y ofrecer explicaciones precisas de hechos y regularidades observables. Daniel Bernoulli (1738) demostró que un gas formado por partículas masivas y elásticas confinadas en un recipiente rígido dentro del cual se mueven, en ciertas condiciones, conforme a las LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON obedece a la LEY (fenomenológica) DE BOYLE. Este teorema de Bernoulli inaugura una de las dos vertientes del atomismo científico, resurgida un siglo más tarde en la teoría cinético-molecular de los gases de Maxwell y Boltzmann. La otra vertiente procede de la nueva química de Lavoisier, en el marco de la cual Proust propuso la *ley de las proporciones constantes*: en cada muestra de un compuesto químico dado están presentes los elementos componentes en la misma pro-

porción (según la masa). Dalton agregó la *ley de las proporciones múltiples simples*, en virtud de la cual, si dos elementos forman dos o más compuestos diferentes, las masas de uno de ellos que se combinan con una masa fija del otro son entre sí como el cociente entre enteros pequeños; por ejemplo, los compuestos que hoy llamamos CO y CO_2 combinan carbono y oxígeno en las proporciones de 3:4 y 3:8, respectivamente, de modo que las masas de oxígeno combinadas en ellos con una masa fija de carbono están en la proporción de 1:2. Como Dalton (1808) hizo ver, estas dos leyes fenomenológicas se explican fácilmente si cada elemento consta de átomos iguales que se combinan en pequeños números con los de otro u otros elementos para formar los corpúsculos —hoy llamados *moléculas*— de que constan los compuestos químicos. Aunque aceptado por varios científicos eminentes, como Berzelius y Ampère, el atomismo químico de Dalton fue rechazado y vigorosamente resistido por otros, como Berthollet y Dumas, en parte porque contrariaba su ideología positivista, pero también por inconsistencias debidas a que inicialmente no se tuvo en cuenta que los elementos puros en estado de gas existen en la forma de moléculas diatómicas. Avogadro lo había sostenido ya en 1811, como parte de la célebre hipótesis según la cual un volumen dado de gas a presión y temperatura dadas, cualquiera que sea su naturaleza química, consta siempre del mismo número de moléculas (NÚMERO DE AVOGADRO); pero su obra permaneció olvidada hasta 1860, cuando Canizzaro la señaló a la atención de los químicos de Europa, reunidos en Karlsruhe. Desde ese momento, la hipótesis atómica gana cada vez más adherentes, jugando un papel decisivo en la formulación de la TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS QUÍMICOS por Mendeleieff, aunque siguió siendo resistida por Ostwald (premio Nobel de química, 1909), así como por los adversarios de la teoría cinético-molecular de los gases: Mach, Duhem y el propio Planck.

Solo a comienzos del siglo XX la oposición se desbanda ante los brillantes experimentos de Perrin, quien pudo determinar el número de Avogadro por diversos métodos, con resultados aproximadamente concordantes, confirmando además la explicación cinético-molecular del MOVIMIENTO BROWNIANO propuesta por Einstein. Para entonces, el descubrimiento de la RADIACTIVIDAD y del ELECTRÓN y el estudio acucioso de las LÍNEAS ESPECTRALES impedían concebir como entes indivisibles e inmutables a los que desde Dalton se llaman átomos, esto es, a los ingredientes inanalizables de una reacción química. En las próximas décadas la física de vanguardia dirige su atención a la estructura interna de los átomos. Los experimentos de Geiger y Marsden en el laboratorio de Rutherford llevan a éste a proponer su modelo "planetario" del átomo, con toda la carga positiva y casi toda la masa concentradas en un núcleo pequeñísimo en torno al cual circulan a distancias variables, como planetas, los electrones, negativamente cargados. Este modelo no calza con la fí-

sica clásica, conforme a la cual los electrones circulantes irradiarían ininterrumpidamente señales electromagnéticas hasta perder toda su energía y caer sobre el núcleo. Aun suponiendo que este proceso fuese sumamente lento, la emisión continua de radiación por electrones de energía decreciente no sería compatible con la estabilidad de las LÍNEAS ESPECTRALES. Bohr (1913) concibe el átomo "planetario" de un modo novedoso y audaz, pero en definitiva insostenible. El electrón único del átomo de hidrógeno puede asumir una serie de estados de energía estacionaria, en cada uno de los cuales circula alrededor del núcleo en una órbita kepleriana conforme a las leyes de la mecánica clásica (o de la relativista, según la acertada corrección de Sommerfeld); de cuando en cuando, espontáneamente, salta de una órbita a otra, emitiendo o absorbiendo un cuanto de radiación. Aunque Bohr y sus seguidores tuvieron grandes éxitos en la explicación del espectro del hidrógeno, la generalización del modelo a átomos menos simples se estrelló con dificultades insalvables, que vino a resolver la nueva MECÁNICA CUÁNTICA a partir de 1925. A través de varias teorías complementarias del enlace químico basadas en ella, la mecánica cuántica logró también, por fin, explicar el gran enigma que el atomismo había pasado por alto durante toda su historia: ¿Cómo se combinan los átomos unos con otros para formar sustancias compuestas, con nuevas propiedades que no poseen sus componentes?

Aunque para Demócrito y sus continuadores no serían 'átomos' los que hoy llamamos así, suele decirse que su visión de la naturaleza está siendo vindicada hoy por el MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS. Ello es admisible solo en un sentido lato y siempre que no se pierdan de vista ciertas importantes características que distinguen a las PARTÍCULAS ELEMENTALES de la física actual de los corpúsculos indivisibles del atomismo filosófico: 1° Las partículas elementales son consideradas como tales, en parte, porque se las puede contar; pero a la hora de contar sus posibles configuraciones hay que aplicar las reglas de la ESTADÍSTICA DE PARTÍCULAS de Fermi-Dirac (si son FERMIONES) o de Bose-Einstein (si son BOSONES), no las reglas de Maxwell-Boltzmann que reflejan el modo natural de contar las configuraciones de lo que ordinariamente llamamos partículas. 2° Las partículas elementales también son consideradas así porque es posible localizarlas y atribuirles una masa y velocidad definidas; pero la posición y el momento cinético de una partícula elemental obedecen conjuntamente al PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG, que introduce una indeterminación irremisible en sus valores combinados. 3° Cualquier haz de partículas elementales es capaz de exhibir fenómenos de INTERFERENCIA (por ejemplo, DIFRACCIÓN), como los tradicionalmente observados en la radiación óptica. 4° Las partículas elementales no son eternas ni indestructibles: si un electrón choca con un positrón, ambos se aniquilan y convierten totalmente en radiación; a la inversa, dos cuantos de

radiación suficientemente energética pueden ocasionalmente convertirse en un electrón y un positrón. 5º El VACÍO de la física actual no se concibe —al modo de Leucipo y Demócrito— como una mera nada y ausencia de partículas, sino como un hervidero activísimo en que éstas constantemente surgen y desaparecen. 6º Teoremas matemáticos de Malament (1996) y Hegerfeldt (1998a y 1998b) indican que la existencia de partículas localizables no sería compatible con los supuestos propios de una teoría cuántica relativista (cf. Halvorson y Clifton, 2002).

ATP (A. *ATP*, F. *ATP*, I. *ATP*). Todos los seres vivos están en desequilibrio termodinámico con su entorno y tienen que gastar energía en permanecer vivos. Consumen energía para hacer funcionar las bombas de las membranas de sus células, para replicar su DNA, para sintetizar las macromoléculas orgánicas que están siendo ensambladas continuamente, para contraer los músculos, para moverse, para secretar hormonas, para crecer, para reproducirse. Toda esta energía es generada en los procesos de fermentación, respiración o fotosíntesis, e inmediatamente es guardada (ahorrada, por así decir) en forma de ATP (trifosfato de adenosina), $C_{10}H_{14}O_{13}N_5P_3$, un NUCLEÓTIDO con tres fosfatos. La célula invierte la energía así obtenida en la operación de enlazar esos fosfatos. Los enlaces fosfoanhídridos entre los fosfatos almacenan la energía ahorrada. Cuando estos enlaces son rotos por hidrólisis, generan energía libre, inmediatamente usable para realizar cualquier tipo de trabajo. Cuando se hidroliza el tercer enlace fosfoanhídrido del ATP, se produce ADP (difosfato de adenosina) y energía libre. Ese ATP cargado de energía se transporta y se gasta allí donde se necesite. La energía se obtiene al desprenderse el grupo terminal de fosfato, reconvertiéndose el ATP en ADP. El ATP es la moneda energética universal de la vida terrestre. Todos los seres vivos, desde las bacterias hasta los primates, ahorramos la energía en forma de ATP, que luego gastamos en llevar a cabo nuestras actividades.

automorfismo (A. *Automorphismus*, F. *automorphisme*, I. *automorphism*). ISOMORFISMO cuyo dominio y codominio son idénticos.

axioma (A. *Axiom*, F. *axiome*, I. *axiom*). La concepción antigua o tradicional del método axiomático aparece ya formulada con claridad en los *Analíticos Posteriores* de Aristóteles. La ciencia demostrativa procedería por deducciones formalmente correctas (silogismos) a partir de principios verdaderos, primeros e indemostrables, los axiomas. Aunque los *Elementos* de Euclides son posteriores a la muerte de Aristóteles, no sabemos si fueron escritos bajo su influencia o si más bien fue Aristóteles quien se inspiró de la previa práctica de los geómetras griegos, cuya obra se ha perdido. En cualquier caso, los

Elementos de Euclides quedarían en la tradición de Occidente como el paradigma del método axiomático, imitado luego no solo por matemáticos, sino también por filósofos y físicos, como Spinoza y Newton, con más o menos fortuna.

Una teoría axiomática, según esta tradición, es un conjunto de verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad, organizado de tal manera que casi todos los conceptos empleados en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos indefinidos, y casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras indemostradas (los axiomas). Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues ya los conocemos previamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición. La verdad de los teoremas se hereda de los axiomas que los implican. Aplicar el método axiomático a un ámbito determinado de la realidad consiste en organizar nuestro saber acerca de ese ámbito en forma de teoría axiomática.

Esta concepción del método axiomático permaneció básicamente inalterada hasta finales del siglo XIX, si bien algunos detalles terminológicos y epistemológicos sufrieron modificaciones. Así, a los principios primeros indemostrados, a los que Aristóteles llamaba axiomas (ἀξιώματα) e hipótesis (ὑποθέσεις), los comentaristas de Euclides los llamaron principios comunes (κοιναὶ ἔννοιαι) y postulados (αἰτήματα). Con el tiempo acabó generalizándose el nombre de axioma para todos ellos. Así, también, mientras que Aristóteles pensaba que captamos la verdad de los axiomas de la geometría mediante una facultad de intelección inmediata (νοῦς), Kant consideraba que la verdad de los axiomas de la geometría se capta por una especial intuición pura del espacio. Pero en que los axiomas son verdades evidentes, captadas por algún tipo de intuición, prácticamente todos estaban de acuerdo. Incluso los empiristas extremos, que pretendían que llegábamos a los axiomas por inducción, aceptaban al menos que los axiomas eran verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad. De todos modos, no se conserva ninguna observación de Euclides acerca del método axiomático y es posible que no suscribiera la interpretación de Aristóteles. De hecho, varios de sus postulados son estipulaciones sin aparente pretensión evidencial.

El desarrollo de las geometrías no euclídeas en el siglo XIX puso en entredicho esta concepción tradicional. Si tanto el postulado de las paralelas como cualquiera de sus alternativas que lo contradecían podían tomarse como axiomas de teorías distintas, los axiomas no podían ser todos verdaderos. Entre los geómetras se abrió paso la opinión de que no había más razón para considerar verdadero a uno de esos axiomas que a los otros. Más bien había que considerarlos a todos como meros esquemas abstractos, que en sí mis-

mos no eran verdaderos ni falsos, aunque pudieran serlo algunas de sus presuntas aplicaciones, realizaciones o interpretaciones. Un análisis más cuidadoso de los *Elementos* de Euclides condujo a descubrir sus lagunas y defectos, superados por las presentaciones axiomáticas de la geometría proyectiva por Pasch y de la geometría euclídea por Hilbert. Además y sobre todo por obra de Hilbert, surgió una manera distinta de concebir los axiomas. Hilbert presentó sus axiomas de la geometría euclídea sin suponer que eran ciertos ni que se referían a nada en particular y sin invocar conocimiento ni intuición previa alguna de ellos. Lo único que es lícito suponer acerca de los puntos, rectas y planos es lo que explícitamente se dice sobre estos en los axiomas. A la inversa, cualquier sistema de cosas de las que se pueda decir lo mismo que los axiomas dicen sobre los puntos, rectas y planos puede considerarse como una realización de la teoría. El nuevo método axiomático rápidamente se impuso en la comunidad matemática. En esta concepción actual, los axiomas de una teoría definen una determinada estructura abstracta, común a todas las realizaciones de la teoría. La teoría está caracterizada por sus teoremas. Cualquier subconjunto decidible de teoremas de la teoría que implique a todos los teoremas de la teoría sirve como sistema de axiomas para esa teoría, que es por tanto una teoría axiomatizable. El hecho de que un teorema sea un axioma de la teoría o no lo sea no es una propiedad intrínseca de dicho teorema, sino un mero artefacto de nuestra manera de axiomatizarla. Y siempre hay muchas maneras alternativas y equivalentes de axiomatizar la misma teoría. De todos modos, es pragmáticamente preferible elegir como axiomas teoremas especialmente diáfanos, simples y ricos de contenido, que faciliten la comprensión, el aprendizaje y el uso de la teoría así axiomatizada.

axioma de constructibilidad (A. *Gödelsches Konstruktibilitätsaxiom*, F. *axiome de constructibilité*, I. *axiom of constructibility*). Axioma introducido por Gödel en 1938 para probar la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo con los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Si llamamos V al universo conjuntista y L a la clase de todos los CONJUNTOS CONSTRUCTIBLES, el axioma de constructibilidad afirma que $V = L$. Este axioma $V = L$ (junto con los demás de la teoría) implica el axioma de elección y la hipótesis del continuo y da respuesta a muchas de las cuestiones abiertas en teoría de conjuntos. De todos modos, muchos teóricos consideran arbitraria la exclusión de los subconjuntos no definibles y prefieren un UNIVERSO CONJUNTISTA más rico y abigarrado. Gödel mismo nunca pretendió que su axioma de constructibilidad fuese aceptado como uno de los axiomas de la teoría estándar de conjuntos. La admisión de este axioma reduce considerablemente la anchura del universo conjuntista, pero este estrecho y austero universo constructible basta y sobra para satisfacer todas las

necesidades de la matemática (al menos, de la matemática aplicable en la ciencia empírica), por lo que no deja de tener su atractivo para los aficionados a la NAVAJA DE OCKAM. El axioma de constructibilidad es compatible con la existencia (y con la inexistencia) de cardinales inalcanzables y otros cardinales grandes, mientras no sean medibles. Sin embargo, la existencia de un cardinal medible implica $V \neq L$, según probó Dana Scott en 1961. Incluso hipótesis más débiles, como la de la existencia de un cardinal de Ramsey, son ya incompatibles con el axioma de constructibilidad.

axioma de determinación (A. *Axiom der Bestimmtheit*, F. *axiome de détermination*, I. *axiom of determinacy*). Axioma propuesto por J. Mycielsky y H. Steinhaus en 1962 para la teoría de conjuntos como alternativa al axioma de elección, con el que es incompatible. Con cada conjunto A de secuencias infinitas de números naturales asociamos un juego de dos jugadores con información perfecta: el primer jugador elige un número natural, a_1; el segundo jugador elige otro número, a_2; el primer jugador vuelve a elegir otro número, a_3; etc. Tras ω jugadas, los jugadores han definido una secuencia infinita de números naturales $a = \langle a_i : i < \omega \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$. El primer jugador gana si $a \in A$. El segundo jugador gana si $a \notin A$. Una estrategia de victoria para uno de los jugadores, digamos para el primero, es una función f de secuencias finitas de números naturales en números naturales tal que el primer jugador siempre gana si elige $a_{2i+1} = f(a_1, a_2, \ldots a_{2i})$ para cada i. El conjunto A está determinado si hay una estrategia de victoria para uno de los dos jugadores. El *axioma de determinación* (AD) afirma que todo conjunto A de secuencias infinitas de números naturales está determinado. AD implica que $\mathbb{R}$ no puede ser bien-ordenado, lo que contradice el teorema del buen orden, equivalente al axioma de elección.

AD fue utilizado en los años setenta con gran éxito en la teoría descriptiva de conjuntos de puntos. Mycielsky probó que el axioma de determinación implica que cada conjunto de números reales es medible en el sentido de Lebesgue. Él y Steinhaus propusieron ZF+AD como alternativa a ZFC. Solovay probó que de AD se sigue que $\aleph_1$ es medible. A pesar de todo, los matemáticos se resisten a abandonar el axioma de elección, por lo que ahora los teóricos conjuntistas proponen añadir a los axiomas habituales de la teoría de conjuntos (incluido el de elección) un axioma de determinación proyectiva (PD), es decir, el axioma de determinación restringido a los conjuntos proyectivos, o bien un axioma de determinación restringido a $L(\mathbb{R})$, es decir, restringido al menor modelo transitivo de la teoría de conjuntos ZF que contenga todos los números reales y todos los ordinales. A partir de los años ochenta se ha investigado activamente la consistencia relativa de los axiomas de determinación restringida y hasta qué punto son implicados por

los axiomas de CARDINALES GRANDES. Así, recientemente se ha probado que la existencia de infinitos cardinales de Woodin implica PD. Si, además, existe un cardinal medible mayor que todos esos cardinales de Woodin, entonces vale el axioma de determinación restringido a $L(\mathbb{R})$. No deja de ser sorprendente que algo tan alejado de la praxis matemática habitual como la existencia de cardinales grandes tenga consecuencias próximas a los números reales.

axioma de elección (A. *Auswahlaxiom*, F. *axiome du choix*, I. *axiom of choice*). El axioma de elección es quizás el axioma más famoso de la teoría de conjuntos. Aunque usado implícitamente con anterioridad, fue introducido explícitamente por Zermelo en 1904 para probar el TEOREMA DEL BUEN ORDEN. Zermelo lo consideraba un principio lógico evidente y lo incluyó como axioma en su primera axiomatización de la teoría de conjuntos en 1908.

Sea A una familia (es decir, un conjunto) de conjuntos. Una función de elección sobre A es una función f que a cada conjunto no vacío $X \in A$ le asigna un elemento de X, $f(X) \in X$. Esta función elige o escoge un elemento de cada miembro no vacío de A. En el universo conjuntista cada conjunto (excepto el vacío) es una familia de conjuntos. El *axioma de elección* dice que para cada conjunto hay una función de elección. Formalmente,

$$\forall y \exists f (f \text{ es una función} \wedge \text{dominio}(f) = y \wedge \forall x (x \in y \wedge x \neq \varnothing \Rightarrow f(x) \in x))$$

A veces el axioma se ha formulado de esta manera equivalente: dada una colección cualquiera de conjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, existe una clase que contiene un y solo un elemento de cada uno de los conjuntos de la colección. El axioma de elección es también equivalente a numerosos teoremas de la teoría de conjuntos y del resto de la matemática, como el TEOREMA DEL BUEN ORDEN, que dice que cualquier conjunto puede ser bien-ordenado; o el teorema de Zorn, que dice que si $\langle A,<\rangle$ es un orden parcial tal que todo suborden lineal suyo tiene una cota superior en A, entonces $\langle A,<\rangle$ posee un elemento maximal; o el teorema de tricotomía, que dice que el orden parcial de los cardinales es un orden lineal, es decir, que para cualesquiera cardinales κ y μ: $\kappa < \mu \vee \kappa = \mu \vee \kappa > \mu$.

A pesar de su carácter abstruso, el axioma de elección ha provocado intensas polémicas y despertado apasionados entusiasmos y aversiones entre los matemáticos. Ya desde su propuesta por Zermelo tropezó con la oposición de Peano, Borel, Baire y Lebesgue. Los intuicionistas lo rechazaron, pues este axioma afirma la existencia de funciones de elección, sin darnos pista alguna de cómo construirlas, mientras que ellos solo aceptan la existencia de una entidad matemática cuando cuentan con una regla para construirla. Algunos

llegaron a temer que el axioma de elección pudiera introducir contradicciones en la teoría de conjuntos. Hoy sabemos que ese temor era infundado. En 1938 Gödel probó que el axioma de elección (AC) es compatible con los otros axiomas (por ejemplo, ZF) de la teoría de conjuntos, de tal modo que si ZF es consistente, también lo es ZF+AC (abreviado ZFC). Por tanto, el axioma de elección no introduce contradicciones que no estuviesen ya previamente presentes en la teoría de conjuntos sin axioma de elección. En 1963 Paul Cohen probó que la negación del axioma de elección (¬C) también es compatible con el resto de los axiomas. Entre los dos, Gödel y Cohen demostraron que el axioma de elección es independiente de los otros axiomas. Por tanto, podemos aceptarlo o rechazarlo sin peligro de caer en contradicciones. Si actualmente la mayoría de los matemáticos lo aceptan, ello se debe sobre todo a su notable fecundidad. No solo es imprescindible para desarrollar la teoría de los cardinales transfinitos, sino que encuentra también múltiples aplicaciones en el álgebra, la topología y la teoría de la medida.

axioma de extensionalidad (A. *Extensionalitätsaxiom*, F. *axiome d'extensionalité*, I. *axiom of extensionality*). El axioma de extensionalidad era ya el primero de los axiomas formulados por Zermelo en 1908 y sigue siendo un axioma común a todas las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos actualmente en uso, lo cual no es de extrañar, pues se trata del axioma que mejor caracteriza la esencia de los conjuntos. En efecto, a diferencia de los conceptos o las propiedades, que pueden ser intensionales, los conjuntos (y las clases) son entidades estrictamente extensionales: se definan como se definan los conjuntos A y B, si A y B tienen los mismos elementos, entonces A y B son el mismo conjunto, $A = B$. Esto es lo que explicita el axioma de extensionalidad:

$$\forall Y \forall Z(\forall x(x \in Y \Leftrightarrow x \in Z) \Rightarrow Y = Z).$$

axioma de infinitud (A. *Unendlichkeitsaxiom*, F. *axiome de l'infini*, I. *Axiom of infinity*). Si aplicamos las operaciones conjuntistas (como unión, producto cartesiano o conjunto potencia) a conjuntos finitos un número finito de veces, siempre obtenemos conjuntos finitos. El infinito es inalcanzable desde lo finito. Si queremos disponer de conjuntos infinitos, tenemos que postular su existencia directamente mediante un axioma específico, el axioma de infinitud. Este axioma fue introducido por Zermelo en 1908: hay un conjunto w que contiene el conjunto vacío y tal que si x pertenece a w, también le pertenece $\{x\}$. Ahora suele formularse así:

$$\exists w(\varnothing \in w \wedge \forall x(x \in w \Rightarrow x \cup \{x\} \in w))$$

En efecto, un conjunto de estas características es infinito. Una vez que tenemos un conjunto infinito, mediante aplicaciones sucesivas de la operación de conjunto potencia obtenemos conjuntos infinitos de cardinalidad cada vez mayor, por el teorema de Cantor.

axioma de reducibilidad (A. *Reduzibilitätsaxiom*, F. *axiome de réducibilité*, I. *axiom of reducibility*). Axioma introducido por Whitehead y Russell en la primera edición de *Principia Mathematica* para compensar las restricciones impuestas al enunciado de verdades matemáticas por la sintaxis adoptada en esta obra. Esta sintaxis se basa en una clasificación jerárquica en *tipos lógicos* de las funciones proposicionales y las variables que contienen, cuyo propósito principal es evitar la IMPREDICATIVIDAD. En la teoría de tipos *ramificada* que es propia de dicha edición, el tipo de una FUNCIÓN PROPOSICIONAL depende no solo del tipo de sus argumentos (variables libres), sino también del de las variables ligadas que figuran en ella. La sintaxis se ciñe estrictamente a la jerarquía de los tipos. Para mitigar esta exigencia que, por sí sola, los forzaba a contentarse con una fundamentación INTUICIONISTA o CONSTRUCTIVISTA del análisis, Whitehead y Russell postularon el *axioma de reducibilidad*. Este puede parafrasearse así: si Ψ es una función proposicional de cualquier tipo y orden, existe una función proposicional Φ lógicamente equivalente a Ψ cuyo tipo depende del tipo de sus variables libres. Whitehead y Russell no indican ningún procedimiento para hallar la función "reducida" Φ equivalente a una dada función Ψ.

En la segunda edición de *Principia Mathematica*, Russell —bajo el influjo de Ramsey— simplificó la teoría de tipos y abolió el axioma de reducibilidad. Como Russell no reescribió el libro entero, sino que se limitó a prefijarle la indicación de que había que hacerle ciertos cambios, no está claro que la teoría así modificada sea capaz de sustentar el edificio de las matemáticas. El matemático Whitehead se desentendió de esta empresa.

axioma de reemplazo (A. *Ersetzungsaxiom*, F. *axiome de remplacement*, I. *Axiom of replacement*). El axioma de reemplazo fue introducido en la teoría de conjuntos por Fraenkel y Skolem en 1922 —independientemente— para rellenar una laguna en los axiomas de Zermelo. Por eso la teoría resultante de añadir el axioma de reemplazo a la teoría de Zermelo se conoce como teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF). En esa teoría el axioma ha de ser formulado como un esquema axiomático, pero la teoría de conjuntos con clases, por ejemplo NBG, permite formularlo más simplemente, y así vamos a hacerlo aquí. En una teoría con clases todas las clases definibles existen y de lo que se trata es de saber si son conjuntos, es decir, si son a su vez elementos de otras clases o no. El *axioma de reemplazo* dice que si F es una función cuyo

dominio A es un conjunto, entonces su recorrido $F[A]$ también es un conjunto. El axioma de reemplazo se requiere para probar cosas tan intuitivas como que cualquier subclase de un conjunto es un conjunto y también para formular y demostrar el teorema de RECURSIÓN TRANSFINITA.

axioma de regularidad (A. *Fundierungaxiom*, F. *axiome de régularité*, I. *axiom of foundation*). El axioma de regularidad, también conocido como axioma de buena fundamentación, dice que todos los conjuntos son regulares o bien fundamentados, con lo que se excluyen conjuntos de algún modo raros o patológicos, como los conjuntos que son elementos de sí mismos. Con este requerimiento se consigue un universo conjuntista claramente estructurado y generado de un modo descriptible. Considerado ya previamente por Mirimanoff y Fraenkel, el axioma de regularidad fue introducido por von Neumann en 1925 y adoptado por Zermelo en 1930 como parte de ZF y más tarde por Bernays y Gödel como parte de NBG.

El *axioma de regularidad* se puede formular de varias maneras equivalentes, por ejemplo así: todo conjunto no vacío posee un elemento disjunto con él.

$$\forall x(x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing))$$

Otra manera similar de formularlo es esta: todo conjunto no vacío x posee un elemento $\in$-minimal, es decir, un elemento y tal que ningún elemento de y es elemento de x.

$$\forall x(x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z\ (z \in y \wedge z \in x)))$$

De aquí se sigue que no hay una $\in$-secuencia descendente infinita, es decir, no existe una función f definida sobre los números naturales que forme una $\in$-secuencia descendente, $\ldots f(4) \in f(3) \in f(2) \in f(1) \in f(0)$.

Hacia 1925-1930 von Neumann y Zermelo habían introducido la jerarquía acumulativa como una manera transparente de visualizar el universo conjuntista, concebido como el resultado de un proceso inacabable de formación de nuevos conjuntos a partir de otros ya obtenidos anteriormente y empezando por el conjunto vacío. La iteración del proceso se produce paso a paso, siguiendo la serie de los ordinales. En cada paso, indexado por el ordinal α, se obtiene un nuevo escalón, $V(\alpha)$. Esto nos permite definir por recursión transfinita la siguiente función:

$V(0) = \varnothing$

$V(\alpha+1) = \wp V(\alpha)$ para cualquier ordinal α
$V(\lambda) = \sup\{V(\beta): \beta < \lambda\} = \bigcup_{\beta<\lambda} V(\beta)$ para cualquier ordinal límite λ

La gran unión de todos estos escalones, $\bigcup_{\alpha\in\Omega} V(\alpha)$, constituye la jerarquía acumulativa. El axioma de regularidad equivale a decir que cada conjunto está en alguno de estos escalones, $\forall x \exists \alpha (x \in V(\alpha))$, lo cual a su vez equivale a identificar el universo conjuntista V con la jerarquía acumulativa,

$$V = \bigcup_{\alpha\in\Omega} V(\alpha).$$

axioma de separación (A. *Schema der Aussonderungsaxiome*, F. *axiome de séparation*, I. *Axiom of Comprehension*). El principio intuitivo de que a cada propiedad expresable en el lenguaje corresponde un conjunto (el conjunto de todas las cosas que tienen esa propiedad) conduce a veces a contradicciones, como muestra bien a las claras la PARADOJA DE RUSSELL. Por eso la teoría de conjuntos necesita un principio más restrictivo de formación de clases o existencia de conjuntos. Zermelo propuso en 1908 como principio restrictivo de existencia de conjuntos el *axioma de separación*, que dice que si ya tenemos un conjunto dado A, entonces existe también el nuevo conjunto que resulta de separar de A todos sus elementos que satisfacen cierta condición o tienen cierta propiedad. Como este principio sólo permite obtener subconjuntos definibles de conjuntos ya previamente admitidos, no parece albergar peligro alguno.

En una teoría de conjuntos sin clases, como ZF, el axioma de separación se formula como un esquema axiomático que resume infinitas fórmulas, a saber, para cada fórmula $\varphi(x)$:

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x))$$

En algunas teorías de conjuntos con clases, la función del axioma de separación es desempeñada por un esquema axiomático de formación de clases que dice que existe la clase de los objetos (es decir, de los conjuntos) que satisfacen una condición $\varphi(x)$: $\exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow \varphi(x))$. Obsérvese que las variables mayúsculas se refieren a clases cualesquiera y las minúsculas a clases que son conjuntos.

axiomas de Hilbert (A. *Hilbertsche Axiomen*, F. *axiomes de Hilbert*, I. *Hilbert's Axioms*). En su obra *Fundamentos de la geometría* (1899), David Hilbert presenta la geometría euclídea como el estudio de una estructura que consta de tres conjuntos de objetos cualesquiera (que él llama 'puntos', 'rectas' y 'planos', pero que, según una famosa declaración suya, lo mismo po-

drían ser 'sillas', 'mesas' y 'cañas de cerveza'), entre los cuales subsisten ciertas relaciones nombradas por cinco términos primitivos y caracterizadas por 19 axiomas. Las cinco relaciones son: "el punto *X* incide en la recta *y*", "el punto *X* incide en el plano α", "el punto *X* está entre los puntos *Y* y *Z*", "el segmento determinado por los puntos *X* y *Y* es congruente con el segmento determinado por los puntos *P* y *Q*" y "el ángulo determinado por los puntos *A*, *B* y *C* es congruente con el ángulo determinado por los puntos *O*, *P* y *Q*". Los 19 axiomas incluyen los célebres POSTULADOS DE EUCLIDES y DE ARQUÍMEDES.

Como la especie de estructura determinada por estos 19 axiomas admite modelos no isomorfos (↗ISOMORFISMO), Hilbert insertó en las ediciones posteriores de su obra un axioma más, el axioma V.2 de "completud" (*Vollständigkeit*), con lo cual el sistema axiomático de Hilbert se tornó *categórico* (todos sus modelos son isomorfos).

axiomas de Peano (A. *Peanosche Axiomen*, F. *Axiomes de Peano*, I. *Peano axioms*). ↗NÚMERO NATURAL.

B

barión (A. *Baryon*, F. *baryon*, I. *baryon*). Partícula con spin semientero (½, ³⁄₂,...), que siente la interacción nuclear fuerte y está compuesta por tres quarks. Por tanto, los bariones son fermiones y hadrones. Ejemplos de bariones son los protones y neutrones. Por eso a la materia habitual que nos rodea se la llama a veces materia bariónica (↗NÚMERO BARIÓNICO).

base (A. *Basis*, F. *base*).
I. *De una topología* (I. *base*). Sea S un conjunto y $B = \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una FAMILIA de partes de S que cumple las dos condiciones siguientes:

B1 $S = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$ (la unión de la familia B es S).

B2 Si $B_a, B_b \in B$ y $p \in B_a \cap B_b$, hay un B_c en la familia B tal que $p \in B_c$ y $B_c \subseteq B_a \cap B_b$.

B determina entonces unívocamente una TOPOLOGÍA T_B en S tal que cada abierto de T_B es la unión de una subfamilia de B. Decimos que B es la *base* de una topología en S, que T_B es la topología *generada* por B y que $\langle S,B\rangle$ es el espacio topológico *con base B* (o *basado en B*).

II. *De un módulo o espacio vectorial* (I. *basis*). Sea $\mathcal{V}$ un MÓDULO sobre el ANILLO $\mathbb{A}$. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto finito linealmente independiente de vectores de $\mathcal{V}$. B es una *base* de $\mathcal{V}$ si todo vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ es igual a una combinación lineal de vectores de B: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i$. En tal caso, los escalares $a_i \in \mathbb{A}$ son los *componentes* de $\mathbf{v}$ *relativos a la base B*. Si $\mathcal{V}$ tiene una base formada por n vectores, ningún conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathcal{V}$ puede contener más de n vectores. Por lo tanto, toda base de $\mathcal{V}$ contiene exactamente n vectores. En tal caso, se dice que $\mathcal{V}$ es un módulo n-dimensional. Todo lo dicho se aplica, por cierto, al caso en que $\mathbb{A}$ es un CUERPO, de modo que $\mathcal{V}$ es un ESPACIO VECTORIAL.

bayesianismo (A. *Bayesianismus*, F. *bayesianisme*, I. *Bayesianism*). Corriente de pensamiento que se ocupa con la metodología de la INFERENCIA ESTADÍSTICA, la CONFIRMACIÓN y aceptación de las hipótesis científicas y la teoría de la DECISIÓN racional. El *bayesianismo* tiene numerosas variantes, propuestas en parte para subsanar los reparos que han merecido las anteriores. Común a todas es la adopción de una interpretación personalista de la PROBABILIDAD y la convicción de que mediante la aplicación repetida del TEOREMA DE BAYES cada uno puede, a la luz de la experiencia, reajustar su estimación personal de la probabilidad de las hipótesis, de forma que las estimaciones de todos tiendan a concordar. Para ello, cada uno debe administrar sus estimaciones según la regla de condicionalización cuya versión más simple ilustramos enseguida. Según el bayesianismo, un agente racional X asigna a cada proposición Q la probabilidad $\mathrm{p}(Q)$; la función p se ajusta a los principios del cálculo de PROBABILIDADES (de modo que $\mathrm{p}(\neg Q) = 1 - \mathrm{p}(Q)$), pero, por lo demás, es completamente arbitraria. Si $\mathrm{p}(H)$ y $\mathrm{p}(E|H)$ son las probabilidades que X asigna respectivamente a la hipótesis H y al resultado experimental E bajo el supuesto de que H sea verdadera, entonces, según el teorema de Bayes, la probabilidad de H, dada la verdad de E, es

$$\mathrm{p}(H \mid E) = \mathrm{p}(H)\frac{\mathrm{p}(E \mid H)}{\mathrm{p}(E)}$$

La regla de condicionalización prescribe que, al conocer la verdad de E, el agente X reemplace la función p por la función p′, definida por $\mathrm{p}'(H) = \mathrm{p}(H|E)$ para cada hipótesis H. En particular, si E se deduce de H, de modo que $\mathrm{p}(E|H) = 1$, y $0 < \mathrm{p}(E) < 1$, es claro que $\mathrm{p}(H) < \mathrm{p}(H|E) = \mathrm{p}'(H)$; así, la probabilidad asignada a una hipótesis va aumentando a medida que se comprueba la verdad de sus consecuencias. Los bayesianos ofrecen argumentos para probar que la regla de condicionalización —en esta forma rudimentaria o en otras más refinadas— es una demanda de la razón, tan cierta como la exigencia de que la función subjetiva p se ajuste a los principios del cálculo de probabilidades. Pero no contemplan la posibilidad, tan familiar en la historia de la ciencia, de que nuevos hallazgos experimentales muevan a pensar las cosas en nuevos términos, trastornando el dominio de definición de la función p y su heredera p′.

bicondicional (A. *Koimplikation*, F. *biconditionnel*, I. *biconditional*). Un enunciado bicondicional tiene la forma '*A* si y solo si *B*' u otra equivalente, como '*A* es una condición necesaria y suficiente de *B*'. El bicondicional expresa que *A* y *B* comparten el mismo destino veritativo: ambos son verdaderos o ambos son falsos. Aunque los bicondicionales se emplean poco en el

lenguaje coloquial, son frecuentes en el lenguaje culto, sobre todo al dar definiciones y establecer equivalencias. Esta conexión bicondicional se simboliza en el lenguaje formal de la lógica mediante el conector $\Leftrightarrow$, llamado el bicondicionador. Si α y β son fórmulas, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ es también una fórmula, llamada un bicondicional. Supongamos que la fórmula α traduce el enunciado *A* y la fórmula β traduce *B*. El enunciado '*A* si y solo si *B*' se simboliza como $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$. Una interpretación $\Im$ satisface $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ si y solo si $\Im$ satisface las dos fórmulas, α y β, o $\Im$ no *satisface* ninguna de las dos. El conector de bicondicional representa la función veritativa binaria $\Leftrightarrow$: $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ tal que $(0 \Leftrightarrow 0) = (1 \Leftrightarrow 1) = 1$ y $(0 \Leftrightarrow 1) = (1 \Leftrightarrow 0) = 0$. La fórmula $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ se llama un bicondicional porque equivale lógicamente a un doble condicional, $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$.

Big Bang (A. *Urknall*, F. *Big Bang*, I. *Big Bang*). El modelo cosmológico estándar del *Big Bang* es un modelo matemático (o, mejor dicho, una familia de modelos) que resume de un modo aproximado, simplificado e idealizado cuanto creemos saber acerca de la estructura y evolución general del Universo y proporciona un marco teórico para ordenar la información astronómica y cosmológica que vamos obteniendo mediante la observación. El Universo no se concibe como una estructura estática, sino como el despliegue dinámico de una gran explosión inicial ocurrida hace unos catorce mil millones de años. Hoyle ridiculizó esta idea de la explosión inicial, llamándola en broma el *Big Bang* (el gran catapún). La frase hizo fortuna y se ha convertido en el nombre oficial del modelo, que incorpora contribuciones esenciales de Einstein, Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker, Gamow, Alpher, Fowler, Peebles y otros muchos físicos y cosmólogos.

El modelo estándar del *Big Bang* es una estructura matemática compuesta de diversas capas o estratos, las primeras de las cuales corresponden a la teoría general de la relatividad de Einstein: (1) La capa subyacente está constituida por una VARIEDAD DIFERENCIABLE 4-dimensional con ciertas propiedades (Hausdorff, conectada y paracompacta). (2) Esta variedad está provista de una MÉTRICA LORENTZIANA g_{ab}. (3) En ella vale el principio einsteiniano de equivalencia entre gravedad y curvatura del espaciotiempo. (4) Las ecuaciones de campo de Einstein describen cómo la distribución de la energía determina la métrica del espaciotiempo, y por tanto su curvatura:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci, g_{ab} es la métrica, R es el escalar de curvatura, Λ es la constante cosmológica, G es la constante gravitacional de Newton, c es la velocidad de la luz y T_{ab} es el tensor de energía.

A esta base general-relativista se superponen otros requerimientos más específicos. (5) La variedad es temporalmente orientable y satisface la condición de causalidad estable, lo que excluye los bucles temporales y los viajes al pasado y permite introducir un tiempo cósmico. (6) La métrica es de tipo FRW (Friedmann-Robertson-Walker), lo que equivale a postular que el Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico en cada corte temporal, lo que a su vez equivale al PRINCIPIO COSMOLÓGICO. Este postulado es una idealización de la realidad, pues solo se cumple aproximadamente y a muy grandes escalas. Estas dos condiciones implican que el espaciotiempo cuatridimensional puede ser foliado, es decir, cortado en rodajas o lonchas espaciales (hipersuperficies espacialoides de simultaneidad) tridimensionales Σ_t, indexadas por el tiempo cósmico t. Cada una de estas hipersuperficies (es decir, el espacio tridimensional en un instante cósmico dado) tiene curvatura constante, la misma en todos sus puntos. (7) Los teoremas de singularidad de Hawking-Penrose implican, bajo condiciones que se cumplen, la existencia de una SINGULARIDAD en el pasado (el *Big Bang* propiamente dicho).

La densidad de energía y la presión del Universo determinan la curvatura del espacio, aunque la presión únicamente influye decisivamente en el valor de la curvatura en las etapas más tempranas del Universo, siendo despreciable en la actualidad. En la versión más simple del modelo cosmológico estándar, la constante cosmológica Λ es nula, es decir, $\Lambda = 0$. En ese caso, la densidad de energía del Universo es la densidad de la materia, $\rho = \rho_M$. Si admitimos una constante cosmológica distinta de cero (como sugiere la medición de distancias a supernovas lejanas de tipo I*a*), entonces la densidad de energía del Universo incluye no solo la materia, sino también la energía correspondiente a la constante cosmológica, $\rho = \rho_M + \rho_\Lambda$. En cualquier caso, el PARÁMETRO DE DENSIDAD $\Omega = \Omega_{tot} = \Omega_M + \Omega_\Lambda$ indica la razón de la densidad ρ del Universo a la DENSIDAD CRÍTICA ρ_{crit}, $\Omega = \rho/\rho_{crit}$. Según que Ω sea mayor, igual o menor que 1, las distintas realizaciones posibles del modelo estándar del *Big Bang* se clasifican en tres tipos: universos cerrados, planos y abiertos.

Si la densidad actual supera a la crítica, es decir, si $\Omega > 1$, el Universo es cerrado y finito y sus secciones (hipersuperficies) espaciales tienen geometría esférica y, por tanto, curvatura positiva. La métrica del espaciotiempo puede describirse mediante el elemento de línea ds^2, que mide la separación entre eventos. Sea t el tiempo cósmico (que en los universos FRW concuerda con el tiempo propio de cualquier reloj comóvil con la expansión del Universo) y sea a el factor de escala. En un universo cerrado, la métrica, expresada en coordenadas esféricas, es

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left(d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right)$$

Si la densidad actual es menor que la crítica, es decir, si $\Omega < 1$, el Universo es abierto e infinito y sus secciones espaciales tienen geometría hiperbólica y, por tanto, curvatura negativa. En un universo abierto, la métrica, expresada en coordenadas hiperbólicas, toma la forma

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left(d\psi^2 + \sinh^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right)$$

En el caso de que la densidad actual coincida con la densidad crítica, es decir, si $\Omega = 1$, el Universo es plano e infinito y tiene geometría euclídea. En un universo plano, la métrica, expresada en coordenadas cartesianas, es

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Las observaciones actuales parecen sugerir que el Universo es aproximadamente plano.

Si el Universo es homogéneo e isótropo, su contenido de materia-energía ha de ser un fluido perfecto, cuyo tensor de energía T_{ab} toma la forma

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b)$$

donde ρ es la densidad de energía y P es la presión. En el estadio actual de predominio de la materia sobre la radiación, se considera que la presión del fluido cósmico es nula, es decir, que el Universo es como polvo cuyos granos son las galaxias, con lo cual la ecuación anterior se simplifica:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b$$

Teniendo en cuenta los supuestos de homogeneidad e isotropía del Universo y de fluido perfecto, las ecuaciones de Einstein se reducen a dos simples ecuaciones diferenciales del factor de escala, llamadas las ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_M a^2}{3} + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} - kc^2$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}a(\rho_M + 3P) + \frac{\Lambda a}{3}$$

Las ecuaciones de Friedmann, que describen la dinámica del Universo, también pueden expresarse en función del PARÁMETRO DE HUBBLE H y del PARÁMETRO DE DECELERACIÓN q:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_M + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

$$q = \frac{4\pi G\rho_M}{3H^2} - \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$$

Estas ecuaciones dinámicas del modelo del *Big Bang* permiten calcular la evolución cósmica, retrodecir el pasado del Universo y predecir su destino final, que depende de su densidad. Según el modelo estándar del *Big Bang*, el Universo empezó en una gran explosión que fue también el origen del espaciotiempo. De todos modos, la singularidad misma del *Big Bang* queda fuera de la variedad diferenciable que constituye el espaciotiempo. En el contexto de este modelo carece de sentido preguntarse qué ocurría "antes" del *Big Bang*, pues eso equivale a preguntarse qué ocurría en los instantes anteriores al *Big Bang*, y no hay tales instantes, ya que solo a partir del *Big Bang* hay tiempo e instantes. Las relaciones de antes y después son relaciones entre instantes y sólo tienen sentido a partir del *Big Bang*. El Universo tiene un pasado finito y, sin embargo, ha existido siempre, en el sentido de que no hay ningún instante de tiempo en el que el Universo no haya existido: mientras ha habido tiempo, ha habido universo. Por otro lado, el Universo empezó como un punto o similar solo en el caso de que sea cerrado. Si el Universo (como parece más probable) es abierto o plano, entonces no solo es infinito ahora, sino que ha sido infinito siempre, también en su inicio: el *Big Bang* se habría producido en todos los puntos de un espacio infinito. La extrapolación hacia atrás de las ecuaciones deterministas de la relatividad general y del modelo estándar presenta pocos problemas hasta un segundo después de la explosión y problemas abarcables hasta 10^{-10} s, aproximadamente. Más allá todo es especulación y, al llegar al tiempo de Planck, 10^{-43} s tras el *Big Bang*, la oscuridad es total, pues toda la física conocida colapsa y deja de funcionar. En realidad, el 'modelo del *Big Bang*' dice mucho sobre la evolución posterior del Universo, pero no dice nada sobre el *Big Bang* mismo.

El destino final del Universo depende de la densidad del Universo actual. Un universo cerrado dejará de expansionarse y se contraerá a partir de cierto momento, haciéndose cada vez más denso y caliente, acabando en una gran implosión (*Big Crunch*), más allá de la cual nada puede predecirse. Un universo abierto se expandirá indefinida y eternamente, con la mayor parte de su materia transformada en radiación cada vez más próxima al cero absoluto de temperatura. Un universo plano también seguirá expandiéndose, aunque cada vez más despacio. Si, como parece, el Universo real es abierto o plano, seguirá expansionándose indefinidamente, y si, como también parece, $\Lambda > 0$, la expansión se está acelerando.

Otras capas del modelo estándar del *Big Bang* son: (8) Los parámetros libres cuyo valor presente ha de ser detectado empíricamente: la constante de Hubble H_0, el parámetro de deceleración q_0, el parámetro de densidad Ω y la constante cosmológica Λ. (9) La historia térmica del Universo desde una fracción de segundo tras el *Big Bang* hasta ahora, incluyendo el tránsito de un época dominada por la radiación a otra en que predomina la materia, del que queda como residuo la radiación cósmica de fondo. (10) La historia química del Universo, incluida la nucleosíntesis primordial ocurrida entre 1 y 1.000 segundos tras la explosión inicial.

El modelo estándar del *Big Bang* tiene sólidos apoyos empíricos, que le proporcionan una gran plausibilidad. Los principales son: la expansión del Universo conforme a la ley de Hubble, manifestada en el corrimiento hacia el rojo de los espectros de las galaxias lejanas en función de su distancia; la abundancia de elementos químicos ligeros (hidrógeno, deuterio, helio-4, helio-5 y litio) en el Universo observable conforme a las predicciones de la nucleosíntesis primordial; y la radiación cósmica de fondo, una radiación de cuerpo negro a unos 2,7 K de temperatura, resto fosilizado de la época de desacoplamiento de la radiación. De los modelos cosmológicos ofrecidos hasta ahora, solo el *Big Bang* da cuenta de estos fenómenos. Sobre todo después del descubrimiento de la radiación cósmica de fondo en 1965, el modelo del *Big Bang* se ha convertido en el modelo estándar de la cosmología actual. De todos modos, también se han propuesto extensiones especulativas de este modelo, como la quintaesencia, la inflación y la cosmología cuántica, que todavía carecen de apoyo empírico suficiente, aunque es posible que lo adquieran en el futuro.

biosfera (A. *Biosphäre*, F. *biosphère*, I. *biosphere*). Todo ecosistema consta de una comunidad biótica (de seres vivos) en un ambiente abiótico. El máximo ecosistema terrestre es la *biosfera*. La comunidad biótica de la biosfera es la *biota*, formada por el conjunto de todos los seres vivos que pueblan nuestro planeta. La biota es, pues, la parte viva de la biosfera. Su entorno físico inmediato lo constituyen las zonas del mar, del suelo y de la atmósfera que contienen seres vivos. Coincide aproximadamente con la superficie terrestre y sus inmediaciones. Desde el punto de vista energético, la biosfera depende del aporte continuo de energía por parte del Sol. Esta energía se redistribuye luego por la biota a través de las cadenas alimenticias, que empiezan en los organismos autótrofos, que producen sus propios nutrientes orgánicos a partir del agua, el CO_2 del aire y la energía de la luz solar, y terminan en los organismos descomponedores, que reciclan los materiales de los muertos.

La unidad de la biota es profunda: todos los organismos y todas las células vivas que la componen descienden de ancestros comunes y comparten

por herencia los mecanismos esenciales de la vida que conocemos, desde la bioquímica basada en el agua como disolvente y el carbono como elemento estructural hasta las PROTEÍNAS y los ÁCIDOS NUCLEICOS, el código genético y el almacenamiento de la energía disponible en moléculas de ATP. Por ello, la biología habitual puede considerarse como una ciencia histórica, limitada al estudio de la biosfera terrestre. No hay ninguna garantía de que la vida en otros planetas (si la hay) se base en estos mismos mecanismos.

La biosfera se ha convertido en un tema de importancia central en la filosofía, la ontología, la ética e incluso la reflexión política actuales. Desde 1972 Lovelock ha estado desarrollando la idea de que no solo la biota, no solo la biosfera, sino el planeta Tierra entero (al que Lovelock llama por su nombre de diosa griega, *Gaia*), incluida toda la atmósfera, los océanos y las rocas, es un ser vivo único y complejo, que mantiene sus propias homeostasis de tal modo que se preserve un ambiente propicio a la vida. La Tierra sería un sistema CIBERNÉTICO cuyos agentes reguladores serían los propios organismos que la habitan. Su conducta se modularía inconscientemente de tal modo que las condiciones físicas ambientales permanezcan estables y favorables a la vida. Las ideas de Lovelock sobre Gaia, una curiosa mezcla de hipótesis científicas contrastables y especulaciones místicas ecologistas, ejercen una notable influencia en el panorama intelectual contemporáneo.

biyectables [conjuntos] (A. *gleichmächtig*, F. *équipotent*, I. *equipollent, equinumerous*). Dos conjuntos A y B son biyectables entre sí (en símbolos, $A \sim B$) si y solo si hay una biyección entre ellos, es decir, una función biyectiva de A en B. La biyectabilidad es una relación de equivalencia entre conjuntos. El que A y B sean biyectables implica que tienen la misma cardinalidad, $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$, y la inversa también vale. Puesto que dos conjuntos biyectables entre sí tienen el mismo número (cardinal) de elementos, esos dos conjuntos se llaman a veces equinumerosos.

bosón (A. *Boson*, F. *boson*, I. *boson*). Partícula con spin entero (0 o 1). Los bosones son o mesones o bosones *gauge*. Los bosones no están sometidos al principio de exclusión de Pauli y la estadística de su conducta colectiva obedece a la distribución de Einstein-Bose; de ahí su nombre.

bosones *gauge* (A. *Eichbosonen*, I. *gauge bosons*). Partículas elementales con spin 1 que actúan de mediadores o transmisores de las fuerzas o interacciones fundamentales: el fotón (que transmite la fuerza electromagnética), los bosones W^+, W^- y Z (que transmiten la fuerza electrodébil) y los ocho gluones (que transmiten la fuerza nuclear fuerte). ↗TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS.

buen orden (A. *Wohlordnung*, F. *bon ordre*, I. *well-ordering*). Cualquier conjunto de números naturales tiene un mínimo elemento. La generalización de esta propiedad a subconjuntos cualesquiera de órdenes lineales nos lleva a la noción de buen orden. $\langle A,<\rangle$ es un *buen orden* si y solo si (1) $\langle A,<\rangle$ es un orden lineal y (2) cada subconjunto no vacío de A tiene un mínimo elemento.

Sea $\langle A,<\rangle$ un buen orden. B es un *segmento inicial* de $\langle A,<\rangle$ si y solo si (1) B es un subconjunto de A y (2) los elementos de A anteriores a elementos de B son también elementos de B. Por tanto, B es un segmento inicial de A si y solo si se cumple

$$B \subseteq A \wedge \forall x{\in}A \forall y{\in}A\ (x < y \wedge y \in \mathrm{B} \Rightarrow x \in B)$$

De la definición se sigue que A mismo es un segmento inicial de $\langle A,<\rangle$. Un *segmento inicial propio* de $\langle A,<\rangle$ es un segmento inicial distinto de A. $B \neq \emptyset$ es un segmento inicial del buen orden $\langle A,<\rangle$ si y solo si B es un intervalo de $\langle A,<\rangle$ que incluye el elemento mínimo de A. El segmento inicial de $\langle A,<\rangle$ *generado* por $y \in A$ es el conjunto de los elementos de A anteriores a y, es decir, $\{x \in A : x < y\}$. Si B es un segmento inicial propio del buen orden $\langle A,<\rangle$, entonces hay un $a \in A$ tal que B es el segmento inicial generado por a, es decir, $B = \{x \in A : x < a\}$.

El ejemplo paradigmático de buen orden es $\langle \mathbb{N},<\rangle$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $<$ es la relación de ser menor entre números naturales. Su *tipo de orden* es ω. Cualquier orden lineal con tipo de orden ω es un buen orden. Su orden dual, $\langle \mathbb{N},>\rangle$, no es un buen orden, pues ya $\mathbb{N}$ mismo carece de mínimo elemento (respecto a $>$). Su tipo de orden es ω^*. Ningún orden lineal con tipo de orden ω^* es un buen orden. Desde luego, todo orden lineal finito es un buen orden.

Todo buen orden infinito tiene un segmento inicial con el tipo de orden ω. Un orden lineal $\langle A,<\rangle$ es un buen orden si y solo si $\langle A,<\rangle$ no tiene un suborden de tipo ω^*.

Normalmente definimos y probamos propiedades de los conjuntos finitos por inducción aritmética sobre los números naturales. Para hacer lo mismo con los conjuntos infinitos necesitamos proceder por recursión o inducción transfinita sobre los ORDINALES. Ello esta justificado por una característica de los conjuntos bien ordenados (entre los que se cuentan los números ordinales) que se expresa en el principio del mínimo elemento, que a su vez permite demostrar el principio de recursión transfinita.

Principio del mínimo elemento: si en un buen orden $\langle A,<\rangle$ hay un elemento x que tiene una propiedad, entonces hay un mínimo elemento que tie-

ne esa propiedad. Formalmente, para cualquier propiedad expresable por una fórmula $\varphi(x)$:

$$\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists y(\varphi(y) \wedge \forall u(\varphi(u) \Rightarrow y < u \vee y = u))$$

Principio de inducción transfinita para buenos órdenes: si en un buen orden $\langle A,<\rangle$ ocurre que, para cualquier elemento w, siempre que todos los predecesores de w tienen una propiedad, w también la tiene, entonces todos los elementos de A tienen esa propiedad. Formalmente, para cualquier propiedad expresable por una fórmula $\varphi(x)$:

$$\forall w(\forall x(x < w \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(w)) \Rightarrow \forall x\varphi(x)$$

Cada elemento de un buen orden (excepto el último, si lo hay) tiene un sucesor inmediato. Sin embargo, un elemento de un buen orden no necesita tener un predecesor inmediato. En el buen orden $\langle 0,2,4,\ldots\ 1,3,5,\ldots\rangle$ ni el 0 ni el 1 tienen un predecesor inmediato. Un elemento a de un buen orden es un *elemento límite* si y solo si (1) a no es el primer elemento y (2) a no tiene un predecesor inmediato. Los únicos elementos de un buen orden que carecen de un predecesor inmediato son el primero y los límites.

Teorema: si $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$ son buenos órdenes, entonces ocurre una (y solo una) de estas tres cosas: $\langle A,R\rangle \cong \langle B,S\rangle$ o $\langle A,R\rangle$ es isomorfo a un (único) segmento inicial propio de $\langle B,S\rangle$ o $\langle B,S\rangle$ es isomorfo a un (único) segmento inicial propio de $\langle A,R\rangle$.

La noción de buen orden (o conjunto bien ordenado) se debe a Cantor. En 1883 la definió de un modo distinto pero equivalente al actual, que aparece en Cantor en 1897. Cantor trató de probar que todo conjunto puede ser bien ordenado, pero no lo consiguió. De hecho, esa tesis es equivalente al AXIOMA DE ELECCIÓN, que, como ahora sabemos, es independiente de los axiomas habituales de la teoría de conjuntos, por lo que no puede probarse a partir de ellos. Cantor definió los ordinales como los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados.

C

caída libre (A. *freier Fall*, F. *chute libre*, I. *free fall*). Movimiento de una partícula o un cuerpo bajo la sola influencia de la GRAVITACIÓN.

cálculo de probabilidades (A. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, F. *calcul des probabilités*, I. *probability calculus*). El *cálculo de probabilidades* nace en el siglo XVII como un medio para comparar el valor de distintas alternativas que se presentan en los juegos de azar; pero muy pronto halla aplicación en el estimado de riesgos en el negocio de rentas vitalicias y seguros. Desde hace más de medio siglo los matemáticos lo basan de preferencia en el sistema de axiomas propuesto por Kolmogorov (1933). La siguiente formulación, hoy corriente, difiere un tanto de la original.

Sean Ω un conjunto cualquiera y $\mathfrak{B}$ un conjunto de subconjuntos de Ω, tales que:

P1 $\mathfrak{B}$ es una σ-ÁLGEBRA.
P2 Hay una función $\mathrm{p}: \mathfrak{B} \to [0,1]$; donde $[0,1]$ designa el intervalo cerrado $\{x : x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 1\}$.
P3 $\mathrm{p}(\Omega) = 1$.
P4 Si $A, B \in \mathfrak{B}$ y $A \cap B = \varnothing$, $\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B)$.
P5 Si $A_1, A_2,\ldots$ es una secuencia de elementos de $\mathfrak{B}$, tales que $A_h \cap A_k = \varnothing$ excepto si $h = k$, entonces $\mathrm{p}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{p}(A_k)$.

La estructura $\langle\Omega,\mathfrak{B},\mathrm{p}\rangle$ es un *espacio de probabilidad* o *espacio aleatorio*. Los elementos de $\mathfrak{B}$ se llaman *eventos*; los elementos de Ω se llaman *eventos elementales*. Si $A \in \mathfrak{B}$, el número real $\mathrm{p}(A)$ es la *probabilidad* de A. La función p se llama *distribución de probabilidad* o *medida de probabilidad*.

Los axiomas **P1-P4** implican que, cualquiera que sea el evento A, $\mathrm{p}(\Omega-A) = 1 - \mathrm{p}(A)$. En particular, $\mathrm{p}(\varnothing) = \mathrm{p}(\Omega-\Omega) = 0$.

Algunos autores, como Bruno de Finetti, no aceptan el axioma P5. Otros, como Donald Gillies (2000), son partidarios de introducir la PROBABILIDAD

CONDICIONAL $p(B|A)$ de $B \in \mathcal{B}$, dado $A \in \mathcal{B}$, como un concepto primitivo regido por el axioma:

PC $\quad p(B \mid A)p(A) = p(A \cap B)$.

A diferencia de la definición de Kolmogorov (↗PROBABILIDAD CONDICIONAL), esta ecuación tiene sentido también cuando $p(A) = 0$; aunque, claro está, en tal caso, $p(A \cap B) = p(A) = 0$, y $p(B|A)$ queda indeterminado (tal como ocurre con la definición de Kolmogorov).

Conviene explicar por qué Kolmogorov asignó como dominio a p una σ-*álgebra* $\mathcal{B} \subseteq \wp\Omega$, y no, simplemente, el conjunto potencia $\wp\Omega$, como parecería más natural. Esto se debe a que, bajo el AXIOMA DE ELECCIÓN, no todos los subconjuntos de un conjunto INNUMERABLE son medibles. Después que Cohen demostró la independencia del axioma de elección, se han propuesto versiones más débiles del mismo, que no tienen esta consecuencia y bajo las cuales, por ende, se puede eliminar el axioma P1 y reemplazar $\mathcal{B}$ por $\wp\Omega$ en los otros axiomas en que figura.

cálculo de variaciones (A. *Variationsrechnung*, F. *calcul des variations*, I. *calculus of variations*). El *cálculo de variaciones* se ocupa con problemas cuya solución requiere hallar el valor extremo —máximo o mínimo— de un funcional, esto es, de una FUNCIÓN cuyos argumentos son otras funciones. Tales máximos y mínimos son siempre relativos a un entorno del argumento en el cual ocurren. Si F designa el funcional en cuestión (típicamente, una integral), la ecuación $\delta F = 0$ expresa la condición de que F sea estacionario en un punto de su dominio, en cuyo caso el valor de F en ese punto o bien excede, o bien es excedido por su valor en los puntos vecinos.

El cálculo de variaciones nace a propósito del siguiente problema, publicado por Jean Bernoulli en 1696 y que ilustra sus usos: sean A y B dos puntos próximos a la superficie de la Tierra, tales que A está situado a mayor altura que B mas no sobre la misma vertical; se trata de hallar, entre las curvas que unen ambos puntos, aquella por la cual un cuerpo que cae desde A impelido por su propio peso llega a B en menos tiempo.

Con mayor generalidad y formalidad, el problema más simple del cálculo de variaciones puede enunciarse así: consideremos la CURVA $C: (t_1,t_2) \to \mathcal{M}$, donde $(t_1,t_2) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $\mathcal{M}$ es una VARIEDAD DIFERENCIABLE real n-dimensional. Si el camino de C cae entero dentro del dominio de una CARTA x con coordenadas $x^1,\ldots, x^n$, entonces C puede representarse en $\mathbb{R}^n$ por la correspondencia $t \mapsto \langle x^1 \circ C(t),\ldots,x^n \circ C(t)\rangle$ $(t \in \{t_1,t_2\})$. Escribimos $x^k(t)$ por $x^k \circ C(t)$ y $\dot{x}^k(t)$ por $\left.\frac{dx^k \circ C}{dt}\right|_t$. Sea L una FUNCIÓN LISA real

(basta que sea de clase $\mathscr{C}^2$) definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ que incluya todos los $(2n+1)$-tuplos de números reales $\langle t, y^1,\ldots,y^n, z^1,\ldots z^n\rangle$ que satisfacen las relaciones $y^k = x^k(t)$ y $z^k = \dot{x}^k(t)$ para $t \in (t_1,t_2)$, $1 \leq k \leq n$. El problema consiste entonces en determinar la curva C de modo que la integral

$$I(C) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x^k(t), \dot{x}^k(t))dt \qquad (1)$$

de la función L, a lo largo de C, sea estacionaria; en otras palabras, de modo que o bien sea menor que todas las integrales de la misma forma sobre curvas que unen $C(t_1)$ con $C(t_2)$ por un camino distinto aunque próximo al de C, o bien sea mayor que todas ellas. Para ello es necesario y suficiente que las funciones $t \mapsto x^k(t)$ satisfagan en todo el dominio (t_1,t_2) las ECUACIONES DE EULER Y LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 \qquad (1 \leq k \leq n) \qquad (2)$$

En honor de Lagrange, que edificó la mecánica clásica en torno a una forma específica de este problema, la función L suele llamarse LAGRANGIANO.

calor (A. *Wärme*, F. *chaleur*, I. *heat*). En su acepción corriente, 'calor' es la sensación que tenemos cuando estamos cerca del fuego o bajo los rayos del Sol. En su acepción científica, 'calor' puede caracterizarse como aquello que a través de la piel entra en nuestro cuerpo cuando tenemos dicha sensación y sale de él cuando tenemos la sensación de frío. El *calor* en este sentido se concibe desde mediados del siglo XIX como una forma de ENERGÍA —la energía *térmica*— que la teoría cinética del calor explica como energía cinética de las moléculas que se desplazan libremente en los gases y en los sólidos vibran sin cesar en torno a posiciones fijas. Anteriormente, el calor había sido concebido como una peculiar sustancia fluida indestructible, el CALÓRICO.

calórico (A. *Kaloricum*, F. *calorique*, I. *caloric*). La antigua tesis de que el CALOR es una sustancia *sui generis* —el *fuego* de Empédocles— fue revivida en el siglo XVIII por Boerhave y fue adoptada por Lavoisier, Laplace y la gran mayoría de los científicos, hasta la aceptación, hacia 1850, de los resultados de Joule sobre el equivalente mecánico del calor (↗TERMODINÁMICA). El calor específico de las sustancias materiales ordinarias se concebía como una medida de la capacidad de cada una para absorber esta sustancia calorífica o *calórico*. Se sostuvo que la absorción de calor sin aumento de temperatura en

los cambios de fase reflejaba una combinación química del calórico con la sustancia que se fundía o evaporaba.

Aunque ha perdido todo interés científico, el calórico, como el ÉTER, todavía sirve de antídoto contra la fe en la permanencia de los asertos existenciales de la ciencia natural.

cámara de burbujas (A. *Blasenkammer*, F. *chambre à bulles*, I. *bubble chamber*). Artefacto para el estudio de partículas elementales, inventado por Donald Glaser en 1952. Una cámara de burbujas preparada para la observación contiene un líquido a temperatura apenas superior a su punto de ebullición, bajo una presión tal que no puedan formarse burbujas. El aparato se coloca en un sitio por donde pasarán partículas elementales emitidas en un experimento de alta energía. En el momento oportuno, se relaja la presión y se fotografía el interior de la cámara. Al bajar la presión el líquido queda listo para hervir a la menor perturbación. Al atravesarlo, una partícula cargada entrega a lo largo de su camino pequeñas cantidades de calor, generando una hilera de burbujas que puede quedar registrada en una fotografía. Analizándola, es posible determinar la masa, momento cinético e identidad de la partícula y, si es pertinente, los productos de su desintegración. Esta descripción da una idea de la índole de las observaciones a que se refieren los físicos cuando dicen que *han visto* una determinada partícula.

campo (A. *Feld*, F. *champ*, I. *field*). Consideramos separadamente los usos de este término en matemáticas y en física, aunque, como se verá, están muy emparentados. Observamos, de paso, que en inglés la palabra *field* designa *además* la estructura algebraica que en castellano se llama CUERPO.

a. *En matemáticas*

1. CAMPO ESCALAR (A. *Skalarenfeld*, F. *champ de scalaires*, I. *scalar field*). Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable real. Un *campo escalar* sobre $\mathcal{M}$ es una FUNCIÓN LISA $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. ("Campo escalar *en* $\mathcal{M}$" si el dominio de f es un abierto de $\mathcal{M}$.)

Al conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ de todos los campos escalares sobre $\mathcal{M}$ se le da la estructura de un ANILLO mediante las estipulaciones siguientes:

I Si f y g son dos campos escalares sobre $\mathcal{M}$, la suma $(f+g)$ de f y g es el campo escalar que asigna a cada $p \in \mathcal{M}$ el número real $f(p) + g(p)$.

II Si f y g son dos campos escalares sobre $\mathcal{M}$, el producto fg de f y g es el campo escalar que asigna a cada $p \in \mathcal{M}$ el número real $f(p)g(p)$.

Los mismos conceptos se aplican a una variedad diferenciable compleja (reemplácese $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$).

2. CAMPO VECTORIAL (A. *Vektorenfeld*, F. *champ de vecteurs*, I. *vector field*). Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable n-dimensional. Un *campo vectorial* V sobre $\mathcal{M}$ es una SECCIÓN del FIBRADO TANGENTE $\langle T\mathcal{M},\mathcal{M},\pi\rangle$ ("Campo vectorial *en* $\mathcal{M}$" si se trata de una sección del fibrado tangente TU, donde U es un abierto de $\mathcal{M}$). Designamos con V_p el valor de V en el punto $p \in \mathcal{M}$, esto es, el vector en p (un elemento del espacio tangente $T_p\mathcal{M}$) que el campo vectorial V asigna a p. Un campo de covectores sobre $\mathcal{M}$ (o en $\mathcal{M}$) se define análogamente, partiendo del fibrado cotangente $\langle T\mathcal{M}^*,\mathcal{M},\pi\rangle$.

Al conjunto $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ de todos los campos vectoriales sobre $\mathcal{M}$ se le da, mediante las estipulaciones siguientes, la estructura de un MÓDULO n-dimensional sobre el anillo $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ de los campos escalares sobre $\mathcal{V}$. La adición modular y la multiplicación por escalares en $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ se definen así: Para todo punto $p \in \mathcal{M}$ y cualesquiera campos vectoriales V, V', campo de covectores ω y campo escalar f sobre $\mathcal{M}$,

I $$(V + V')_p(\omega_p) = V_p(\omega_p) + V'_p(\omega_p)$$

II $$(fV)_p(\omega_p) = f(p)V_p(\omega_p)$$

Los campos de covectores sobre $\mathcal{M}$ forman un módulo $\mathcal{V}^*(\mathcal{M})$ sobre el anillo $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, con operaciones de adición modular y multiplicación por escalares sujetas a las reglas **I** y **II**, intercambiando los términos 'campo vectorial' y 'campo de covectores' en el enunciado que las precede.

Una BASE del módulo n-dimensional $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ es un conjunto linealmente independiente $\{V^1,\ldots,V^n\}$ de campos vectoriales sobre $\mathcal{M}$, tal que cualquier campo vectorial $V \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ es igual a una combinación lineal $f_1V^1 + \ldots + f_nV^n$ de los vectores de la base. Los campos escalares $f_1,\ldots, f_n$ son los *componentes* de V relativos a la base $\{V^1,\ldots,V^n\}$. Obsérvese que los valores $f_1(p),\ldots, f_n(p)$ de estos escalares en cualquier punto $p \in \mathcal{M}$ son precisamente los componentes del vector V_p relativos a la base $\{V^1{}_p,\ldots,V^n{}_p\}$ del espacio vectorial $T_p\mathcal{M}$ a que pertenece V_p.

Consideremos ahora una carta x definida en un abierto $U_x \subseteq \mathcal{M}$. U_x es una subvariedad abierta de $\mathcal{M}$ (↗VARIEDAD DIFERENCIABLE). La carta x determina en U_x, para cada índice k ($1 \leq k \leq n$), el campo vectorial $\dfrac{\partial}{\partial x^k}: p \mapsto \left.\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$. El conjunto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ es una base del módulo $\mathcal{V}(U_x)$, y por ende la restricción a U_x de cualquier campo vectorial $V \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ es igual a una combi-

nación lineal $\sum_{i=1}^{n} v^i \partial/\partial x^i$ de vectores de esta base. Los campos escalares $v^1,\ldots, v^n$ son los *componentes* del campo vectorial V relativos a la carta x. Sus valores $v^1(p),\ldots, v^n(p)$ en un punto $p \in U_x$ son los componentes relativos a x del vector $V_p \in T_p\mathcal{M}$. Los componentes relativos a x de un campo de covectores y de su valor en un punto $p \in U_x$ se definen de un modo análogo.

3. CAMPO TENSORIAL (A. *Tensorenfeld*, F. *champ de tenseurs*, I. *tensor field*). Los TENSORES de tipo (r,s) en los distintos puntos de una variedad diferenciable n-dimensional $\mathcal{M}$ se reúnen en una variedad diferenciable $(n+n^{r+s})$-dimensional $\mathcal{T}^r_s$ de un modo análogo al que se explica bajo FIBRADO TANGENTE para el caso de los vectores tangentes a $\mathcal{M}$ (tensores de tipo $(1,0)$). Sea $\pi : \mathcal{T}^r_s \to \mathcal{M}$ la proyección que asigna a cada tensor $\tau \in \mathcal{T}^r_s$ su respectivo punto en $\mathcal{M}$. Un campo tensorial de tipo (r,s) y rango $r+s$ sobre $\mathcal{M}$ es una SECCIÓN $\Theta : \mathcal{M} \to \mathcal{T}^r_s$ del FIBRADO $\langle\mathcal{T}^r_s,\mathcal{M},\pi\rangle$. ("Campo tensorial de tipo (r,s) *en* $\mathcal{M}$" si se trata de una sección del fibrado $\langle\mathcal{T}^r_s,U,\pi\rangle$, donde U es un abierto de $\mathcal{M}$). Designamos con Θ_p el valor de Θ en el punto $p \in \mathcal{M}$, esto es, el tensor en p que el campo tensorial Θ asigna a p. Θ_p es un elemento del PRODUCTO TENSORIAL de r copias de $T_p\mathcal{M}$ por s copias de $T_p\mathcal{M}^*$ y, por ende, una función $(r+s)$-lineal definida en $(T_p\mathcal{M}^*)^r \times (T_p\mathcal{M})^s$ y con valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$ según M sea una variedad real o compleja.

Dada una carta x definida en un abierto $U \subseteq \mathcal{M}$, los *componentes* del campo tensorial Θ relativos a x se obtienen calculando los valores de Θ en los distintos $(r+s)$-tuplos que pueden formarse con elementos de la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ del módulo $\mathcal{V}(U)$ y de la respectiva base dual $\{dx^1,\ldots,dx^n\}$. Por ejemplo, si $r = 2$ y $s = 3$, el (i,j,h,k,q)-ésimo componente de Θ relativo a x es el campo escalar

$$\Theta^{ij}{}_{hkl} = \Theta\left(dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^h}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \qquad (1 \leq i,j,h,k,q \leq n)$$

El lector debe persuadirse de que, en caso de que $r = 1$ y $s = 0$ —de modo que Θ es un campo vectorial—, los campos escalares $\Theta^i = \Theta(dx^i)$ $(1 \leq i \leq n)$ son precisamente los componentes de Θ relativos a la carta x según se los definió en la sección a.2. Por otra parte, dicha definición puede extenderse al caso general $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s > 0$, si el conjunto de los campos tensoriales de tipo (r,s) sobre $\mathcal{M}$ se concibe como PRODUCTO TENSORIAL de r copias del módulo $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ y s copias del módulo dual $\mathcal{V}^*(\mathcal{M})$. El método de cálculo arriba descrito arroja precisamente componentes acordes con la definición así generalizada.

Las definiciones antedichas sirven asimismo de modelo para definir un campo tensorial Θ de rango r, covariante en los índices $i_1,\ldots, i_s$ y contrava-

riante en los índices $j_1, \ldots, j_{r-s}$, tal que su valor Θ_p en cada $p \in \mathcal{M}$ sea un tensor de este tipo en p; y también para calcular los componentes de dicho campo tensorial Θ relativos a una carta x de $\mathcal{M}$ (↗TENSOR).

De un modo análogo, se definen en una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ campos de objetos de otros géneros, como espinores, *n*-ADAS, etc.

b. *En física*

La idea física de un *campo de fuerzas* precede y motiva las ideas matemáticas arriba presentadas, que sirven, por su parte, para concebirla con precisión. Se origina con las especulaciones de Faraday sobre el origen de los fenómenos electromagnéticos descubiertos en su tiempo y en gran parte por él. Según Faraday, el cambio de posición de una aguja magnética cuando una corriente eléctrica pasa cerca de ella se debe a que la corriente genera un campo magnético a su alrededor cuya acción se superpone y, a corta distancia, se sobrepone a la acción permanente del campo magnético de la Tierra. Por otra parte, la aparición de una corriente eléctrica en un conductor que se mueve a través de un campo magnético dado se debe a que las variaciones de la fuerza magnética local que el conductor experimenta al moverse originan un campo eléctrico que genera una diferencia de POTENCIAL en el conductor. El modelo matemático obvio para representar esta idea física de campo es el campo vectorial, implícito ya en la obra de Maxwell y expresado en la notación moderna por el maxwelliano Heaviside. El campo eléctrico **E** asigna a cada punto p del espacio euclídeo $\mathcal{E}$ un vector $\mathbf{E}_p$ igual a la fuerza newtoniana que experimentaría una partícula con carga eléctrica 1 situada en p; análogamente, el campo magnético **B** asigna a p un vector $\mathbf{B}_p$ tal que una partícula con carga eléctrica 1 que pase por p a velocidad **v** experimentaría una fuerza newtoniana igual al PRODUCTO VECTORIAL $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_p$; los campos **E** y **B** dependen de la distribución y movimiento de las cargas eléctricas en el universo y de la interacción entre ambos, conforme a las ECUACIONES DE MAXWELL (↗ELECTRODINÁMICA CLÁSICA).

Con el advenimiento de la teoría especial de la RELATIVIDAD, los campos vectoriales **E** y **B** pasan a entenderse como el producto de la descomposición, adecuada a un MARCO DE REFERENCIA inercial particular, de un campo tensorial único, definido sobre el espaciotiempo de Minkowski. Poco más tarde, la teoría general de la relatividad explica los fenómenos gravitacionales por la presencia de campos tensoriales —la CURVATURA del espaciotiempo y la MÉTRICA LORENTZIANA de la cual depende— que las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN relacionan con la distribución de la materia, representada por el TENSOR DE ENERGÍA.

Como se indicó bajo la letra a, estos conceptos matemáticos de campo con que se piensa en los campos físicos mencionados pueden verse como apli-

caciones especiales del concepto general de SECCIÓN de un FIBRADO. El perfeccionamiento y generalización de esta idea matemática ha dotado a los físicos de una herramienta sumamente flexible y poderosa, sobre todo en la forma del campo de operadores (o campo "cuantizado"), introducida por Dirac en su ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA y adoptada por las TEORÍAS CUÁNTICAS DE CAMPOS que vertebran el MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS.

candela. Unidad internacional de intensidad luminosa. 1 *candela* (1 cd) es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática con la frecuencia de 540×10^{12} HERTZ y cuya intensidad radiante en esa dirección asciende a 1/683 VATIOS por ESTEREORRADIÁN.

caos (A. *Chaos*, F. *chaos*, I. *chaos*). El adjetivo *caótico* se emplea en la literatura científica desde hace unos treinta años para describir sistemas físicos cuya evolución temporal, aunque está sujeta a un DETERMINISMO estricto, es sin embargo impredecible, debido a la índole de las ECUACIONES DIFERENCIALES que la rigen. El adjetivo se aplica asimismo a las ecuaciones de tal índole, a la disciplina —"dinámica caótica"— que las estudia, a ciertos objetos matemáticos —vgr. "atractores", "bifurcaciones"— que ese estudio hace presentes y también, por cierto, a los procesos reales que es provechoso concebir como gobernados por ecuaciones caóticas. *Caos* se usa como *sustantivo* concreto o abstracto para nombrar lo "caótico" en cualquiera de estas aplicaciones.

Ya a fines del siglo XIX, Poincaré señaló que hay situaciones gobernadas por la MECÁNICA CLÁSICA cuya evolución es impredecible debido a que es altamente sensible a las condiciones iniciales, de modo que una pequeñísima alteración de estas redunda en grandes diferencias en el estado del sistema al cabo de poco tiempo. Por lo demás, si no fuese así no podrían existir juegos de azar, como la ruleta y los dados, en que se apuesta al resultado de procesos mecánicos clásicos.

El interés por el *caos* cobró gran vigor cuando Edward Lorenz (1962, 1963) descubrió un sencillo sistema caótico de ecuaciones que proporciona un buen modelo de la atmósfera terrestre. Pronto se descubrieron otros, aplicables a otros fenómenos muy diferentes. Gracias al computador, fue factible comparar la evolución divergente a partir de condiciones iniciales muy próximas de numerosos sistemas caóticos de un mismo tipo.

Aunque no hay consenso sobre una definición de *caos*, la siguiente —tomada de Strogatz (1994)— reúne caracteres que casi todos aceptarían como esenciales: el *caos* es comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinista que depende sensiblemente de las condiciones iniciales. "Aperiódico a largo plazo" significa que hay evoluciones posibles del sistema que

no desembocan en puntos fijos o en órbitas periódicas o semiperiódicas cuando el tiempo tiende a ∞. "Determinista" significa que la evolución del sistema no es afectada por ruido o factores aleatorios: su peculiar comportamiento se debe a que las ecuaciones que lo rigen no son lineales, y no tanto a la acción perturbadora de influencias ambientales. "Dependencia sensible de las condiciones iniciales" significa que dos evoluciones alternativas, cuyas condiciones iniciales difieren apenas, divergen exponencialmente con el tiempo.

cardinal inaccesible (A. *unerreichbare Kardinalzahl*, F. *cardinal inaccessible*, I. *inaccessible cardinal*). En la JERARQUÍA ACUMULATIVA de los conjuntos, a partir del conjunto vacío vamos accediendo a otros conjuntos por aplicaciones sucesivas de las operaciones de gran unión y de conjunto potencia. Un CARDINAL REGULAR κ no es accesible a partir de menos de κ conjuntos menores que él aplicando la gran unión, pues un conjunto de cardinalidad regular κ no es la gran unión de menos de κ conjuntos de cardinalidad menor que κ; tampoco es la suma de menos de κ cardinales cada uno de ellos menor que κ. Si, además de regular, κ es inaccesible, entonces tampoco es posible acceder a κ aplicando la operación de conjunto potencia a conjuntos menores.

Definición: α es un *cardinal inaccesible* si y solo si

1) $\alpha > \omega$
2) α es un cardinal regular
3) $\kappa < \alpha \Rightarrow 2^{\kappa} < \alpha$ [o, equivalentemente, $|A| = \kappa \wedge \kappa < \alpha \Rightarrow |\wp A| < \alpha$]

Los cardinales inaccesibles son ya CARDINALES GRANDES, pero se encuentran entre los más modestos de estos gigantescos cardinales. Si la existencia de cardinales inaccesibles es consistente con los axiomas habituales de la teoría de conjuntos, entonces también lo es con el AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD, es decir, entonces ZFC + existencia de cardinales inaccesibles + $V = L$ es consistente.

cardinal medible (A. *messbare Kardinalzahl*, F. *cardinal mesurable*, I. *measurable cardinal*). LOS CARDINALES INACCESIBLES no son en general suficientemente grandes como para ser incompatibles con el AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD. Para eso hace falta postular la existencia de cardinales gigantescos, como, por ejemplo, los *cardinales medibles*. Desde luego, todos los cardinales medibles son inaccesibles, pero no a la inversa. La existencia de un cardinal medible implica $V \neq L$, es decir, la negación del axioma de constructibilidad, como probó Dana Scott. El nombre de medibles se debe a que su estudio se originó en la teoría de la MEDIDA: un cardinal κ es *medible*

si y solo si hay una medida no trivial κ-completa con dos valores (0,1) definida sobre todos los subconjuntos de κ. Otra manera más conjuntista de definirlo es la siguiente: un cardinal κ es *medible* si y solo si hay una clase transitiva M de la teoría de conjuntos y una inmersión elemental y no trivial $\pi : V \to M$, tales que κ es el punto crítico de π, es decir, $\pi \upharpoonright \kappa$ = identidad y $\pi[\kappa] > \kappa$. (La inmersión π es no trivial si $V \neq L$; π es elemental si, para cualquier fórmula de primer orden φ, $\varphi(x_1,...,x_n)$ es verdad en V si y solo si $\varphi(\pi(x_1),...,\pi(x_n))$ es verdad en M.)

cardinal regular (A. *reguläre Kardinalzahl*, F. *cardinal régulier*, I. *regular cardinal*). La regularidad de los ordinales puede definirse en términos de COFINALIDAD. Un ordinal α es *regular* si y solo si cf(α) = α. Por ejemplo, ω es regular, pues cf(ω) = ω. Un ordinal α es *singular* si y solo si no es regular. En especial, α es singular si es mayor que su cofinalidad, si cf(α) < α. Por ejemplo, cualquier ordinal sucesor α+1 con α > 0 es singular, pues cf(α+1) = 1 < α+1, y también lo es ω + ω, pues cf (ω + ω) = ω < ω + ω. Por otro lado, para cualquier α, cf(cf(α)) = cf(α). Por tanto, la cofinalidad siempre es regular. Un ordinal es regular si y solo si para cada γ < α y cada función $f: \gamma \to \alpha$, $f[\gamma]$ es un subconjunto acotado de α. Puesto que todo cardinal es un ordinal, un cardinal κ es regular si y solo si cf(κ) = κ. Es más, cada ordinal regular es un cardinal. Por tanto, 'ordinal regular' y 'cardinal regular' son sinónimos. Cada ordinal que no es un cardinal es singular. 0 y 1 son regulares. Todos los demás cardinales finitos son singulares. $\omega = \aleph_0$ es un cardinal regular. Para cada ordinal α, $\aleph_{\alpha+1}$ es un cardinal regular. $\aleph_\omega$ es un cardinal singular. Un cardinal κ es regular si y solo si κ no es el supremo de un conjunto de menos de κ ordinales menores que él. Si κ es un cardinal regular, entonces un conjunto A de cardinalidad κ no es la unión de menos de κ conjuntos de cardinalidad menor que κ y κ mismo no es la suma de menos de κ cardinales menores que él.

cardinales (A. *Kardinalzahlen*, F. *cardinaux*, I. *cardinals*). Los (números) cardinales miden la CARDINALIDAD o cantidad de elementos que contiene un conjunto. La primera condición que debe satisfacer cualquier definición de los cardinales es que dos conjuntos BIYECTABLES tengan el mismo cardinal. Puesto que la biyectabilidad es una relación de equivalencia, Frege y Russell propusieron (con otras palabras) definir los cardinales como las clases de equivalencia de conjuntos respecto a la relación de biyectabilidad. Así pues, el cardinal de un conjunto A, $|A|$, sería la clase de todos los conjuntos biyectables con A. Esta concepción tropieza con la dificultad de que tales clases de equivalencia serían clases últimas, no conjuntos, con todos los peligros de contradicción que ello conlleva. En 1917 Mirimanoff trató de superar esta di-

ficultad restringiendo la clase de equivalencia a los conjuntos de un RANGO determinado. De todos modos, la solución definitiva fue propuesta por von Neumann, que identificó los cardinales con ciertos representantes de las clases de equivalencia de Frege-Russell: el cardinal de un conjunto A sería el mínimo ordinal biyectable con A. En efecto, por el teorema del buen orden (equivalente al axioma de elección) sabemos que todo conjunto puede ser bien-ordenado. Según cómo lo bien-ordenemos, tendrá ordinales diferentes. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales puede ser ordenado de diversas maneras, a cada una de las cuales corresponde un ordinal distinto: $\langle 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle = \omega$, $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots, 0 \rangle = \omega+1$, $\langle 0, 2, 4, \ldots, 1, 3, 5, \ldots \rangle = \omega+\omega$, etc. Todas estas ordenaciones diferentes tienen sin embargo la misma cardinalidad. Por eso Cantor decía que para llegar al cardinal de un conjunto tenemos que realizar un doble acto de abstracción, abstrayendo tanto de la naturaleza de sus elementos como del orden en que están dados. Todos los ordinales de la misma cardinalidad forman lo que Cantor llamó una clase de números. El mínimo ordinal de esa clase es el correspondiente cardinal.

Los cardinales finitos coinciden con los ordinales finitos y son los números naturales: 0, 1, 2, 3, ... Los cardinales infinitos son los ÁLEFS, definidos por RECURSIÓN TRANSFINITA sobre los ordinales:

1) $\aleph_0 = \omega$
2) $\aleph_{\alpha+1}$ = el mínimo γ tal que $\aleph_\alpha < \gamma$
3) $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$

En la cláusula 2) el signo < representa la relación de menor CARDINALIDAD, por lo que γ ha de ser un cardinal.

Cada ordinal finito (cada número natural) tiene cardinalidad distinta. Sin embargo, hay una infinidad innumerable de ordinales infinitos que tienen la misma cardinalidad que ω, a saber, la primera cardinalidad infinita, la cardinalidad infinita numerable, $\aleph_0$. Toda esa inmensa colección de ordinales constituyen lo que Cantor llamó la segunda clase de números. La cardinalidad de esa colección es la segunda cardinalidad infinita y la primera cardinalidad infinita innumerable, $\aleph_1$. Ese $\aleph_1$ es el mínimo cardinal mayor que $\aleph_0$. En general, el mínimo cardinal mayor que $\aleph_\alpha$ es $\aleph_{\alpha+1}$. Los cardinales finitos $\neq 0$ y los cardinales infinitos de forma $\aleph_{\alpha+1}$ se llaman *cardinales sucesores*. Los cardinales de forma $\aleph_\lambda$ (donde λ es 0 o un ordinal límite) se llaman *cardinales límite*. Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esta conjetura se conoce como la HIPÓTESIS DEL CONTINUO (CH) y hoy sabemos que es independiente del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos. Podemos añadir CH o su negación, $\neg$CH, como nuevo axioma a la teoría habitual y obtenemos dos teorías de conjuntos distintas, una continuista y otra no continuista, y ambas son

consistentes, si ya era consistente la teoría anterior. La teoría de conjuntos contiene muchas cuestiones indecidibles, y algunos teóricos han tratado de decidirlas añadiendo nuevos axiomas que postulan la existencia de ciertos CARDINALES GRANDES, aunque ninguno de estos presuntos axiomas ha sido incorporado a la teoría estándar.

cardinales grandes (A. *grosse Kardinalzahlen*, F. *cardinaux grands*, I. *large cardinals*). La JERARQUÍA ACUMULATIVA nos indica cómo construir el universo conjuntista paso a paso, escalón a escalón, siguiendo la serie de los ordinales. Empezamos con el conjunto vacío y luego vamos construyendo más y más conjuntos mediante aplicaciones sucesivas de las operaciones de conjunto potencia y gran unión. Con cada nuevo ordinal sucesor formamos el conjunto potencia del escalón anterior; con cada nuevo ordinal límite, formamos la gran unión de todos los escalones precedentes. Pero los axiomas habituales no nos dicen hasta dónde llega la serie de los ordinales ni, por tanto, la de los cardinales, que son los ordinales iniciales. Podemos definir cardinales tan grandes que los axiomas habituales no basten para afirmar o negar su existencia; si queremos disponer de ellos en el universo conjuntista, tenemos que postular su existencia mediante axiomas específicos, llamados axiomas de grandes cardinales.

Entre los cardinales grandes más modestos se encuentran los CARDINALES INACCESIBLES. Si κ es un cardinal inaccesible, entonces κ no es la unión (o la suma) de menos de κ cardinales cada uno de ellos menor que κ y tampoco es el conjunto potencia de otro cardinal menor que κ mismo. La existencia (y también la inexistencia) de cardinales inaccesibles es consistente con el AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD, $V = L$. A finales de los cincuenta, Dana Scott probó que la existencia de un CARDINAL MEDIBLE implica $V \neq L$. De hecho, otras hipótesis más débiles, como la existencia de un cardinal de Ramsey, también implican $V \neq L$. Pero ni siquiera la existencia de cardinales medibles decide la hipótesis del continuo, que es independiente de ella, en contra de lo que Gödel había esperado.

La teoría clásica de conjuntos (por ejemplo, ZFC o la correspondiente teoría con clases propias) deja indeterminadas y abiertas muchas preguntas interesantes que pueden formularse en su lenguaje. Para tratar de zanjar tales cuestiones, en la segunda mitad del siglo XX algunos teóricos han ido proponiendo nuevos axiomas que postulan la existencia de cardinales cada vez más grandes. El axioma de infinitud exige la existencia de un conjunto infinito numerable, es decir, del cardinal $\aleph_0$. A partir de aquí se puede postular la existencia de cardinales inaccesibles, cardinales de Mahlo, cardinales débilmente compactos, cardinales de Ramsey, cardinales medibles, cardinales de Woodin, cardinales supercompactos, etc. Estos sucesivos axiomas, cada vez más fuer-

tes y peligrosos, están linealmente ordenados por la relación de consistencia relativa, definida así: el axioma A es consistente relativamente a B si la consistencia de A (más los axiomas habituales, digamos la consistencia de ZFC+A) se sigue de la consistencia de B (es decir, de la consistencia de ZFC+B). Naturalmente el axioma más fuerte de todos es un axioma contradictorio. Mientras que los espíritus austeros, como Jensen, prefieren limitarse al universo constructible, que en cualquier caso basta para el desarrollo de toda la matemática, los teóricos más arriesgados tienden a plantear exigencias cada vez más fuertes, tratando de llegar al límite mismo de la contradicción, pero sin caer en ella, claro.

El universo conjuntista suele visualizarse como un cono que empieza en el conjunto vacío y tiene como eje la serie de los ordinales. Algunos axiomas (como el de determinación o el de constructibilidad o la hipótesis del continuo) determinan la anchura del cono; otros (como el de infinitud y los de grandes cardinales, como la existencia de cardinales inalcanzables, de Mahlo o medibles) determinan su altura (o su profundidad, según cómo se oriente). Postular la existencia de cardinales extraordinariamente grandes equivale a postular que el cono del universo conjuntista es extraordinariamente alto (o profundo).

cardinalidad (A. *Mächtigkeit*, F. *puissance*, I. *cardinality*). La cardinalidad de un conjunto *A* es la cantidad de elementos que *A* contiene y se simboliza con dos trazos verticales, $|A|$. Dos conjuntos *A* y *B* tienen la misma cardinalidad si y solo si *A* y *B* son BIYECTABLES entre sí, $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$. Un conjunto *A* tiene cardinalidad menor que otro conjunto *B*, $|A| < |B|$, si y solo si *A* es inyectable en *B* (es decir, existe una función inyectiva de *A* en *B*) pero *B* no es inyectable en *A*. Esta noción comparativa de cardinalidad se precisa métricamente mediante la introducción de los números CARDINALES. Por el TEOREMA DEL BUEN ORDEN (equivalente al axioma de elección) de la teoría de conjuntos, todo conjunto puede ser bien-ordenado y es por tanto biyectable con algún número ORDINAL. El mínimo ordinal con el que el conjunto *A* es biyectable es su número cardinal κ. Este número cardinal es la cardinalidad del conjunto, $|A| = \kappa$.

carga eléctrica (A. *elektrische Ladung*, F. *charge électrique*, I. *electric charge*). El concepto de *carga eléctrica* o cantidad de electricidad se formó, por analogía con el concepto newtoniano de MASA o cantidad de materia, en un tiempo en que se veía a la electricidad como una sustancia fluida imponderable, distinta de la materia ordinaria. Un cuerpo hecho de esta última —por ejemplo, una esfera de metal— podía cargarse poco a poco de fluido eléctrico y luego descargarlo de golpe sobre el infortunado que inadvertidamente lo tocase. Aun-

que los fenómenos apuntaban a un distingo entre dos clases de electricidad, Benjamin Franklin patrocinó la tesis de que no había más que una. Ello motivó el uso de las expresiones 'carga negativa' y 'carga positiva' para referirse respectivamente a lo que se juzgaban ser casos de deficiencia o de presencia excesiva del fluido único. Hoy día se entiende que cada una de estas expresiones designa una propiedad irreductible diferente, la cual es característica de ciertas clases de partículas elementales, y que los adjetivos 'positivo' y 'negativo' aluden a la índole de los números con que hay que representar a cada carga eléctrica para que cuadren las fórmulas en que figuran cargas de ambas clases (↗LEY DE COULOMB). Se entiende asimismo que la carga eléctrica es una cantidad discreta, que existe solo en la forma de múltiplos de una cantidad mínima. Los experimentos de Millikan (desde 1909; *vide* Millikan 1917) establecieron que este mínimo era igual a la carga *e* del ELECTRÓN; pero la física actual sostiene que hay QUARKS cuya carga es igual a ⅓*e* y ofrece una explicación teórica del hecho de que una carga de esa magnitud no se haya observado nunca. La carga eléctrica entra junto con otras cantidades físicas en ciertas SIMETRÍAS de la naturaleza y satisface el siguiente principio de conservación: la suma algebraica de las cargas eléctricas nunca cambia en el curso de una interacción física.

La unidad de carga es el *coulomb*. Conforme a la definición del SISTEMA INTERNACIONAL, un coulomb (1 C) es igual a la cantidad de carga que una corriente de un AMPERE suministra en un segundo. La carga del electrón $e = 1{,}602\ 176\ 462(63) \times 10^{-19}$ C.

A veces, en exposiciones generales de la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS se usa el término *carga* como nombre genérico de las cantidades que —al igual que la carga eléctrica— se conservan en las interacciones físicas, guardan proporción con la intensidad de estas y caracterizan las distintas especies de PARTÍCULAS ELEMENTALES. Con todo, *carga* por antonomasia sigue siendo la eléctrica.

carga teórica (A. *Theoriebeladenheit*, F. *contenu théorique*, I. *theory loadedness*). Criticando al EMPIRISMO LÓGICO y su distingo entre TÉRMINOS TEÓRICOS y OBSERVACIONALES, Hanson (1958) sostuvo que aun la observación más simple es "una empresa cargada de teoría". Lo que el observador juzga haber constatado depende de supuestos que van desde las teorías explícitas en que se basa el diseño de los experimentos y la fabricación y uso del equipo de laboratorio hasta la categorización implícita en la determinación de lo que uno ve cuando simplemente abre los ojos. Por eso, todos los términos empleados en la ciencia, incluso los provenientes de la conversación ordinaria, portan, según Hanson, una *carga teórica*.

carta (A. *Karte*, *Koordinatensystem*, F. *carte*, *système de coordonées*, I. *chart*, *coordinate system*). Sea *S* una VARIEDAD TOPOLÓGICA *n*-dimensional. Una *car-*

ta de S es un HOMEOMORFISMO que aplica un abierto de S sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una carta f le asigna, pues, en forma exclusiva, a cada punto p de su dominio U_f un n-TUPLO de números reales, $\langle f^1(p), \ldots, f^n(p)\rangle$. El k-ésimo número $f^k(p)$ se llama la k-ésima *coordenada* del punto p ($1 \leq k \leq n$). La k-ésima coordenada de la carta f es la función $\pi_k \circ f = f^k$; donde π_k es la k-ésima "proyección" que asigna a cada n-tuplo de números reales $\langle r_1,\ldots,r_n\rangle$ su k-ésimo término r_k. Una carta de S cuyo dominio es todo S se dice *global*. Obviamente, la variedad n-dimensional S no admite una carta global a menos que ella misma sea homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Un *atlas* de S es una colección de cartas de S tales que cada punto de S está contenido en el dominio de por lo menos una de esas cartas. Sean f y g dos cartas pertenecientes a un atlas de S y definidas en los abiertos U_f y U_g, respectivamente. La FUNCIÓN COMPUESTA $f \circ g^{-1}$ se llama la TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS entre g y f. Si la INTERSECCIÓN $U_f \cap U_g = \varnothing$, $f \circ g^{-1}$ no está definida. Pero si U_f y U_g tienen puntos en común, la transformación de coordenadas $f \circ g^{-1}$ y su inversa $g \circ f^{-1}$ son homeomorfismos de un abierto de $\mathbb{R}^n$ sobre otro; específicamente, $f \circ g^{-1}$ aplica $g(U_f \cap U_g)$ sobre $f(U_f \cap U_g)$, y $g \circ f^{-1}$ aplica $f(U_f \cap U_g)$ sobre $g(U_f \cap U_g)$.

Para otro modo de introducir los conceptos de *carta* y *atlas*, ↗VARIEDAD DIFERENCIABLE.

categoría (A. *Kategorie*, F. *catégorie*, I. *category*). Palabra griega, derivada del verbo κατηγορέω, que significa 'acusar', 'imputar' y, por ende, 'atribuir un predicado a un sujeto'. Se emplea desde antaño en filosofía y desde hace poco más de medio siglo en matemáticas, en diversas acepciones.

a. *En filosofía*

Aristóteles llamó *categorías* a los que, según él, eran los modos últimos, irreductibles, de la predicación, correspondientes a los géneros máximos del ser: *qué es*, *cuál*, *cuánto*, *con respecto a qué*, *dónde*, *cuándo*, *yacer*, *tener*, *hacer* y *padecer*. Esta acepción dará lugar a la costumbre actual de llamar *categorías* a las grandes divisiones básicas de cualquier tipología o clasificación (por ejemplo, llamar *categorías gramaticales* a lo que antes se llamaban *partes de la oración*).

En filosofía, el uso actual de *categoría* se inspira en buena medida en Kant, quien llamó así a los conceptos puros irreductibles del entendimiento humano, de los cuales éste tiene que valerse, según él, para ordenar las apariencias sensibles y organizarlas como fenómenos objetivos. Las categorías kantianas —cuya lista tiene solo un lejano parecido con la de Aristóteles— corresponden supuestamente a las funciones elementales de síntesis mediante cuyo ejercicio el entendimiento "deletrea" las apariencias para poder "leer-

las como experiencia". Muy pocos aceptarían hoy la tesis de Kant según la cual el entendimiento humano, dado desde siempre y de una vez por todas, establece el orden fenoménico de la naturaleza conforme a patrones invariables. Pero la filosofía de la ciencia debe mucho a la concepción kantiana del papel activo del entendimiento en la constitución de la experiencia. Este antecedente histórico motiva el uso frecuente de expresiones como *esquema categorial* (I. *categorial scheme*) y *marco categorial* (I. *categorial framework*) para designar a los patrones —por cierto, variables e históricamente condicionados— a los cuales se ciñe una época, o una disciplina científica, o un "programa de investigación", en su afán de articular el entorno.

b. *En matemáticas*

El concepto de *categoría* fue introducido en matemáticas por Eilenberg y MacLane (1945) y ha sido adoptado por una minoría selecta de matemáticos como la base de una perspectiva global sobre las matemáticas, más natural, luminosa y fecunda que el enfoque conjuntista. Como en este diccionario seguimos este último enfoque, por ser más común, damos aquí solamente la definición abstracta de categoría. Se hallarán ejemplos de su uso en los libros de Lawvere y Schanuel (1997) y MacLane (1971).

Una *categoría* comprende dos clases de *datos*, a saber, (i) *objetos*, A, B, C,... y (ii) *funciones* (o *flechas*), f, g, h,..., que cumplen los requisitos siguientes:

C1 Cada función f está asociada unívocamente a un *objeto inicial* o *dominio* A y un *objeto final* o *codominio* B. Esto se simboliza así

$$f : A \rightarrow B$$

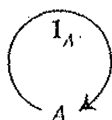
o así

$$A \xrightarrow{f} B$$

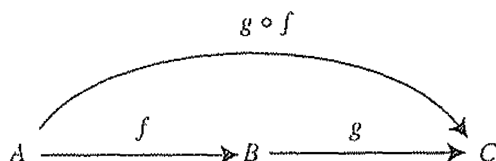
C2 Cada objeto A está asociado a una función, la *identidad* 1_A, cuyo dominio y codominio es A. Esto se simboliza así

$$1_A : A \rightarrow A$$

o así



C3 Si la categoría contiene una función $f: A \to B$ y una función $g: B \to C$, tales que el dominio de g sea el codominio de f, entonces también contiene la *función compuesta* $g \circ f: A \to C$, cuyo dominio es el dominio de f y cuyo codominio es el codominio de g. Simbólicamente:



C4 *Leyes de identidad.* Si f es una función con dominio A y codominio B ($A \xrightarrow{f} B$), entonces $\mathbf{1}_B \circ f = f = f \circ \mathbf{1}_A$.

C5 *Ley asociativa.* Si la categoría contiene objetos A, B, C y D y funciones f, g y h, tales que



entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

causal: futuro y pasado (A. *kausale Zukunft, kausale Vergangenheit*, F. *futur causale, passé causale*, I. *causal future, causal past*). En la literatura de la teoría de la RELATIVIDAD, el *futuro causal* de un punto espaciotemporal P es la región del ESPACIOTIEMPO que forman todos los puntos distintos de P que, por su posición, pueden coincidir con la recepción de una señal luminosa (o más lenta que la luz) cuya emisión coincida con P; el *pasado causal* de P es la región del espaciotiempo que forman todos los puntos distintos de P que, por su posición, pueden coincidir con la emisión de una señal luminosa (o más lenta que la luz) cuya recepción coincida con P. El futuro (pasado) causal de una región $\mathfrak{R}$ del espaciotiempo es la unión de los futuros (pasados) causales de todos los puntos de $\mathfrak{R}$.

Sea $\mathcal{M}$ un espaciotiempo que satisface las ecuaciones de campo de la relatividad general. Se dice que $\mathcal{M}$ es un espaciotiempo *causal* si y solo si $\mathcal{M}$ no contiene ningún punto P que pertenezca a la vez al futuro causal y al pasado causal de un punto Q. $\mathcal{M}$ es *establemente causal* si y solo si $\mathcal{M}$ es causal y no deja de serlo por una pequeña perturbación de la métrica. Un espaciotiempo que satisface las ecuaciones de campo de la relatividad general admite una coordenada temporal global (un "tiempo universal") si y solo si es establemente causal.

causalidad (A. *Kausalität*, F. *causalité*, I. *causality*). Concepto central en la interpretación ordinaria del acontecer, cuyos sucesos, procesos y situaciones son vistos como *efectos* (consecuencias, resultados) imputables a *causas* que los producen y sin las cuales, se piensa, no habrían podido ocurrir como ocurrieron. Aunque la palabra se emplea poco en la conversación diaria, la idea está presente por doquier, en la connotación de verbos corrientes como 'empujar', 'llevar', 'sacudir', 'cortar', 'juntar', 'matar', 'hacer'. El prototipo de la *causa* es claramente el agente humano, que obra sobre las cosas o sobre sus semejantes para efectuar los cambios que desea o impedir situaciones que juzga adversas. Pero la noción se aplica sin dificultad a los agentes animales, y se ha extendido también desde tiempo inmemorial a toda clase de "fuerzas" ocultas o aparentemente manifiestas en las cosas inanimadas. (Y no es inverosímil que la común creencia en agentes sobrenaturales —dioses, hadas, demonios— se nutra en parte del afán de hallarle una *causa* —un responsable— a todo cuanto sencillamente ocurre.)

El sustantivo griego αἰτία —que en la literatura filosófica se traduce 'causa'— deriva del adjetivo αἴτιος, 'responsable, culpable', y originalmente significa 'responsabilidad, culpa'. Esta acepción concuerda con la arriba indicada; pero Aristóteles dio a αἰτία, 'causa', un sentido mucho más amplio, poniendo bajo esta denominación única a todos los factores necesarios para entender la existencia y la naturaleza de una cosa cualquiera. Entre estos se cuenta (i) el "principio del cambio", el agente responsable del proceso que generó la cosa causada (si se trata de una estatua, el escultor), que los escolásticos llamarán *causa efficiens*. Pero Aristóteles enumera además (ii) el *para qué* (la *causa finalis*), (iii) la *esencia* o *forma* (la *causa formalis*) que determina *lo que la cosa es* y, por lo mismo, en el caso de las cosas naturales, gobierna su desarrollo, y (iv) la *materia* (la *causa materialis*) que acoge la forma y se deja configurar por ella; por ejemplo, el mármol en el caso de la estatua, o el fluido menstrual de la hembra en que el semen del macho implanta la forma de la respectiva especie.

La clasificación cuatripartita de Aristóteles persiste en la escolástica medieval, sobre todo entre los tomistas; pero la *causa efficiens* lleva la voz cantante en el pensamiento cristiano, que —en brutal oposición a la letra y el espíritu de Aristóteles— imputa la existencia y el orden del mundo a un agente extramundano que lo "creó" de la nada. En el siglo XVII, la nueva filosofía, en busca de una ciencia natural capaz de procurar al hombre el señorío de la naturaleza que supuestamente le ha conferido su Autor, desestima el estudio de las causas finales, que reputa inconocibles (Descartes) o inexistentes (Spinoza), y también el de las formales, cuyo pretendido conocimiento no habría generado sino explicaciones verbales. Como se ha reducido la materia a un solo tipo homogéneo, que no permite entender las diferencias, todo el esfuerzo

de investigación se vuelca sobre las causas eficientes, que llegan a ser las únicas reconocidas como tales en la filosofía y en la ciencia, tal como en el uso común. Comprometidos en una lucha a muerte contra la tradicional visión animista o vitalista de la naturaleza y sus procesos, los filósofos y científicos del siglo XVII trabajan en generar una idea no zoomorfa de agente causal, cuya versión última y más exitosa es el concepto de FUERZA de Newton. Este concepto alienta y orienta a la mayoría de los físicos durante el período clásico y seguramente subyace de un modo oscuro y vergonzante a una parte no desdeñable del pensamiento físico todavía hoy; pero dejó de ser representativo de la idea filosófica de causa a raíz de la mutación de esa idea —en el siglo XVIII— descrita a continuación.

Todavía para Locke (1690; II.xxvi.1), "en la noticia que nuestros sentidos tienen de la constante vicisitud de las cosas no podemos sino observar que diversos particulares, tanto cualidades como sustancias, comienzan a existir; y que reciben esta su existencia de la debida aplicación y operación de algún otro ser [...]. Lo que sea que opera o conduce a la producción de cualquier idea particular simple o colección de ideas simples, sustancia o modo, que no existía antes, posee en virtud de ello en nuestras mentes la relación de una causa, y así es denominado por nosotros". Para Hume (1739; III.ii), en cambio, "si alguien pretendiera definir una causa diciendo que es algo productivo de otra cosa, es evidente que no diría nada. ¿Pues qué significa él con *producción*? ¿Puede dar una definición de esto que no sea la misma que la definición de causalidad?". En lugar del concepto tradicional, Hume ofrece su famoso e influyente análisis: la *causalidad* es una relación entre dos sucesos singulares s y s' tales que (i) s, la *causa*, precede inmediatamente en el tiempo a s', el *efecto*; (ii) s y s' son contiguos en el espacio; (iii) cada vez que ocurre un suceso de la misma clase que s, ocurre inmediatamente después, en su vecindad, un suceso de la misma clase que s'. En un sentido más amplio, se habla de relación causal entre dos sucesos singulares s y s' separados en el espacio y en el tiempo, siempre que haya una cadena $s_0, \ldots, s_n$ de sucesos tales que $s = s_0$, $s' = s_n$ y, para cada índice i ($0 \leq i < n$), s_i es la causa de s_{i+1}, en el sentido estricto antedicho. Según Hume, se entiende normalmente que la causalidad así definida es una relación *necesaria* entre la causa y el efecto; pero esto no es más que una ilusión inducida por la tendencia compulsiva de la mente a esperar el efecto a continuación de la causa, después que ha observado repetidamente que sucesos de la clase de aquél ocurren sin falta inmediatamente después de los sucesos de la clase de ésta.

Aunque esta última conclusión negativa ha sido combatida ardientemente por diversos filósofos, empezando con Kant, el análisis humeano de la causalidad ha prevalecido en la literatura filosófica casi hasta hoy. La relación causal entre sucesos así caracterizada se identifica generalmente con la rela-

ción de dependencia funcional entre los estados sucesivos de un sistema físico aislado cuya evolución está regida por un sistema de ecuaciones diferenciales. Tal identificación es desconcertante, pues la relación causal es temporalmente asimétrica —la causa *precede* al efecto— en tanto que la dependencia funcional es temporalmente simétrica: si el estado *e′* sigue al estado *e* en la evolución de un sistema del tipo señalado, entonces *e* depende funcionalmente de *e′* en la misma medida en que *e′* depende funcionalmente de *e* (si el sistema de ecuaciones que rige el sistema permite determinar *e′*, dado *e*, también permite determinar *e*, dado *e′*). Además, para que la evolución del sistema pueda estar regida por ecuaciones diferenciales es indispensable que entre cualesquiera dos estados suyos *e* y *e′*, que dependen funcionalmente cada uno del otro, haya un conjunto innumerable de estados de cualquiera de los cuales dependan funcionalmente esos dos. Por lo tanto, la dependencia funcional entre dos estados cualesquiera, que inevitablemente estarán separados por un lapso finito de tiempo, no puede definirse a partir de una relación causal estricta como la propuesta por Hume entre estados *inmediatamente* sucesivos. Por las razones indicadas, la identificación persistente del imperio de la causalidad en el sentido de Hume —y Kant— con el determinismo de los sistemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales es en efecto una de las confusiones más notables entre las que plagan la filosofía, explicable solo por el deseo de reducir la gran variedad de conceptos heterogéneos y flexibles que las personas ponen en juego para entender distintos aspectos y sectores de la vida y para entenderse entre ellas, a una lista breve de ideas fijas que el filósofo pueda caracterizar de una vez por todas.

Russell (1912b), que entendía muy bien la diferencia entre causalidad —en el sentido de Hume o el de Locke— y dependencia funcional, sostuvo que el pensamiento científico solo utilizaba esta última y propuso eliminar la causalidad como una reliquia arcaica. Pero esta propuesta no tiene en cuenta que el concepto de causa —sobre todo en su acepción tradicional de agente productivo— es indispensable en la vida diaria, en los tribunales, en los talleres y también, por cierto, en los laboratorios.

En la literatura filosófica, sobre todo entre 1850 y 1950, figura a menudo el llamado *principio de causalidad*, del que hay a lo menos dos versiones lógicamente independientes:

(*a*) *No hay efecto sin causa.*
(*b*) *Las mismas causas tienen los mismos efectos.*

Conforme al análisis de Hume, (*b*) es evidente pero trivial, pues un suceso sólo merece llamarse *causa* si pertenece a una clase de sucesos S para la cual hay otra clase S', tal que cada vez que ocurre un $s \in S$ va seguido in-

mediatamente de un $s' \in S'$. Con todo, en la física cuántica es familiar el hecho de que preparaciones experimentales reconocidas como idénticas arrojan resultados significativamente diferentes. Ha solido alegarse empero, en defensa de (*b*), que tales preparaciones son solo aparentemente idénticas y que difieren en sus "variables ocultas". En cuanto a (*a*), tomado al pie de la letra es una mera tautología; pero puede también entenderse así:

(*a'*) *Todo suceso discernible, esto es, todo cambio, es efecto de una causa.*

También este es un aserto que el análisis de Hume asegura y banaliza, pues todo suceso singular s' tiene un predecesor singular inmediato y contiguo s y siempre cabe tipificarlos de un modo tan específico y estrecho que no haya ejemplos pertenecientes al tipo de s que no vayan seguidos de ejemplos del tipo de s' (en el caso extremo, simplemente porque s y s' son los únicos ejemplos conocidos de sus respectivos tipos). Sin embargo, tal como entendemos la RADIACTIVIDAD, no cabe tipificar una circunstancia que preceda inmediatamente a la desintegración de un núcleo atómico radiactivo y que no acompañe también, en otros casos, a la persistencia de núcleos de la misma clase sin desintegrar. La desintegración radiactiva es por ello, en el pensamiento científico de hoy, el prototipo del evento incausado. Por otra parte, si la causa se entiende en el sentido tradicional de Locke y sus predecesores, esto es, como agente productivo, (*b*) es falso, como se puede ver por mi ocasional fracaso en la ejecución de operaciones que normalmente ejecuto con éxito (mecanografiar correctamente ciertas palabras; dar en el blanco con un tiro de pistola) y mi ocasional éxito con otras en que regularmente fracaso (sacar doble seis tirando un par de dados); y (*a'*) no es más que una superstición antropomorfista sin base alguna.

causalidad probabilista (A. *wahrscheinlichkeitstheoretische Kausalität*, F. *causalité probabilistique*, I. *probabilistic causation*). En un intento por establecer un concepto universal y homogéneo de *causalidad*, aplicable en la vida diaria y en todas las ciencias, Suppes (1970) propuso una teoría probabilista de la causalidad que ha sido fuente de inspiración para diversos autores (Cartwright, 1989, 2000; Eells, 1991; Pearle, 2000). Sus rudimentos están contenidos en las cuatro definiciones siguientes, donde $p(a)$ designa la PROBABILIDAD del EVENTO a, $a \wedge b$ es el suceso que ocurre si ocurren tanto a como b, $p(a|b) = p(a \wedge b)/p(b)$ es la probabilidad condicional de a, dado b, y una PARTICIÓN $\pi(t)$ es una partición del conjunto de eventos que puede definirse sin hacer referencia a eventos posteriores al tiempo t.

(1) Un suceso b es *causa a primera vista* (*prima facie*) de un suceso a si y solo si b precede temporalmente a a, $p(b) > 0$ y $p(a|b) > p(a)$.
(2) Un suceso b es *causa espuria* de un suceso a si y solo si b es causa a primera vista de a y hay un suceso c que precede temporalmente a b, $p(c \wedge b) > 0$ y $p(a|c \wedge b) = p(a|c)$.
(3) Dado un número real $\varepsilon > 0$, un suceso b es *causa* ε-*espuria* de un suceso a si y solo si b es causa a primera vista de a y hay una partición $\pi(t)$ tal que t precede al momento en que ocurre b y para todo $c \in \pi$, $p(c \wedge b) > 0$ y $|p(a|c \wedge b) - p(a|c)| < \varepsilon$.
(4) Un suceso b es *causa directa* de un suceso a si y solo si b es causa a primera vista de a y no hay partición $\pi(t)$, con t anterior al momento en que ocurre a y posterior a aquel en que ocurre b, tal que, para todo $c \in \pi(t)$, $p(c \wedge b) > 0$ y $p(a|c \wedge b) = p(a|c)$.

En vista de las grandes discrepancias que afectan a la interpretación de la probabilidad, podría pensarse que la teoría de Suppes es un ejemplo egregio de *elucidatio per obscurius*. Pero este reparo no afligirá a quien tenga resuelta esa cuestión en un sentido o en otro. Dada la importancia práctica del concepto de causalidad, el mayor peligro implícito en la teoría probabilista es que autoridades o simples ciudadanos acepten diagnósticos basados en ella pero sigan entendiendo la causalidad en la acepción corriente tradicional. Que acepten, por ejemplo, que "fumar tabaco causa cáncer pulmonar", porque la frecuencia relativa de las víctimas de esta enfermedad es significativamente mayor entre los que fuman que en la población total, pero entiendan que esa frase quiere decir que las moléculas de nicotina u otras presentes en el humo del cigarrillo reaccionan químicamente de un modo bien determinado con moléculas contenidas en una célula pulmonar normal, forzando la transformación de ésta en una célula cancerosa.

célula (A. *Zelle*, F. *cellule*, I. *cell*). Las células son los "átomos" o unidades elementales de la vida. Todos los organismos o son células o están compuestos de células, son repúblicas de células. Los seres vivos más simples son las células. Es cierto que el DNA también se reproduce dentro de la célula y con ayuda de las enzimas de la célula, como un virus, pero solo la célula entera posee la capacidad de autorreproducción. Aunque ya Robert Hooke había entrevisto las células en una lámina de corcho dos siglos antes, fue solo en el siglo XIX cuando Schleiden, Schwann y Wirchow descubrieron que todos los seres vivos se componen de células e introdujeron la teoría celular.

Toda célula es una bolsita de agua en la que están disueltas una serie de macromoléculas orgánicas esenciales para la vida, como el DNA (el procesador de información o "cerebro" de la célula, que posee todas las instruccio-

nes para su funcionamiento) y los ribosomas, donde las instrucciones del DNA se llevan a la práctica ensamblando PROTEÍNAS. Otras macromoléculas incluidas en la célula son las enzimas (proteínas que actúan como catalizadores de ciertas reacciones, como la replicación del DNA) y las moléculas que almacenan la energía disponible de la célula, entre las que sobresale el ATP. Todo ello está rodeado por una *membrana* celular, constituida por una envoltura doble de lípidos, que aísla a la célula de su entorno, protegiendo a las reacciones químicas que tienen lugar en su interior de ser diluidas o perturbadas por el agua y los elementos tóxicos del exterior. Además, la membrana tiene proteínas especiales que actúan como puertas que permiten la entrada y salida selectiva de ciertas moléculas.

Las células se dividen en procariotas y eucariotas. Las *células procariotas* son más pequeñas, más primitivas y estructuralmente más simples que las eucariotas. Carecen de núcleo, de cromosomas y de mitocondrias. Los PROCARIOS (bacterias y arqueas) son células procariotas. Las *células eucariotas*, surgidas inicialmente de la fagocitosis o simbiosis entre bacterias precedentes, son de mayor tamaño y complejidad estructural, y poseen cromosomas encerrados dentro de un núcleo provisto de su propia membrana nuclear, que lo separa del resto de la célula, el citoplasma, que incluye orgánulos como las mitocondrias o los cloroplastos. Los EUCARIOS (protistos, hongos, plantas y animales) se componen de células eucariotas. La teoría del origen endosimbionte de la célula eucariota fue propuesta por Lynn Margulis en 1967 y hoy está generalmente aceptada.

Como el ser vivo elemental que es, la célula es un individuo. Su individualidad está precisamente delimitada por su membrana. La membrana de la célula es su frontera entre ella misma y lo que no es ella, entre su mundo interior y el mundo exterior. Una típica célula eucariota de mamífero está bañada en líquido intersticial. Hay mucha más agua fuera que dentro de la célula. El agua exterior trata de penetrar en la célula por presión osmótica, pero el agua invasora constantemente va siendo achicada (bombeada hacia fuera) por las bombas de la membrana. También la concentración de iones de sodio y calcio es mucho mayor fuera de la célula que dentro. Otras bombas específicas de la membrana están trabajando todo el tiempo para sacar fuera de la célula los iones de sodio y calcio que han logrado penetrar en ella. Por el contrario, el interior de la célula (el citoplasma) es más rico en iones de potasio que el exterior y la membrana tiene que cerrar sus puertas cada vez que un ion de potasio trata de escapar. Mediante este incesante trabajo de la membrana y sus bombas (que consume la mayor parte de la energía disponible), la célula logra neutralizar la presión del mundo exterior y mantener los desequilibrios y gradientes de fluidos e iones, preservando así su frágil individualidad. Todas estas operaciones de la membrana y sus bombas se llevan a

cabo siguiendo las instrucciones que emanan del GENOMA en el núcleo de la célula.

Pasteur y Virchow demostraron que no se da la generación espontánea de células o seres vivos. Toda célula procede de otra célula. Las células se replican, dando lugar a dos nuevas células. Las células eucariotas diploides (con un doble juego de cromososmas) se dividen por *mitosis* (en dos células diploides) o por *meiosis* (en dos células haploides, los gametos). Las células se mueren por *necrosis*, es decir, por accidente desordenado, o por *apoptosis*, es decir, por suicidio programado.

centro de masa (A. *Massenmittelpunkt*, F. *centre de masse*, I. *center of mass*). En la mecánica clásica, el movimiento de traslación de un cuerpo puede representarse como el movimiento de una sola partícula de masa igual a la masa total del cuerpo y situada en un punto llamado *centro de masa*. Si el cuerpo está formado por n partículas de masa $m_1, \ldots, m_n$ y cuya posición respectiva está dada por los vectores $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, la posición del centro de masa está dada por el vector

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

Si el cuerpo se representa mediante una distribución continua de masa con soporte V y densidad ρ, la posición del centro de masa está dada por

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \rho\mathbf{r}\,dV$$

donde M es la masa total del cuerpo.

cibernética (A. *Kybernetik*, F. *cybernétique*, I. *cybernetics*). En 1947 Wiener pensó que los progresos de la fisiología y de la tecnología indicaban que entre los organismos y las máquinas, sobre todo las electrónicas, había suficientes similaridades estructurales como para que valiese la pena ofrecer una descripción matemática común de sus mecanismos. Wiener dio el nombre de *cibernética* al estudio comparado de los mecanismos de control y comunicación en máquinas y animales. Como el piloto o timonel (en griego, κυβερνήτης; de ahí *cibernética*) gobierna y controla la nave, manteniendo su rumbo, así también el termostato controla la temperatura de la habitación, manteniéndola dentro del margen deseado, y el animal controla sus diversas homeostasis, manteniendo, por ejemplo, la temperatura interna o la presión sanguínea o la concentración de glucosa en la sangre dentro de los márgenes

adecuados. Este control se lleva a cabo mediante la *retroalimentación* (I. *feedback*) informativa, que induce la corrección de las desviaciones respecto a la meta fijada. La cibernética, surgida al mismo tiempo que la teoría de la INFORMACIÓN, fue el primero de una serie de intentos (como la INTELIGENCIA ARTIFICIAL, la ciencia cognitiva y la vida artificial) de iluminar los mecanismos de la vida y de la inteligencia mediante la comparación del organismo con la máquina y del cerebro con el computador.

ciencia normal (A. *normale Wissenschaft*, F. *science normale*, I. *normal science*). Expresión con la que Kuhn (1962) se refiere genéricamente al modo como opera y se desenvuelve una disciplina científica cuando no está pasando por una REVOLUCIÓN CIENTÍFICA. La ciencia normal es la actividad a que los científicos, en su mayoría, dedican la mayor parte de su tiempo. La práctica de la ciencia normal en un determinado campo de especialización se ciñe a un PARADIGMA o forma reputada ejemplar de abordar y concebir su tema. Por eso, mirada críticamente desde fuera, ella puede aparecer como un laborioso intento de encajar a la naturaleza en un lecho de Procusto. Kuhn distribuye las faenas de la ciencia normal en dos grandes grupos:

(1) *La labor empírica*, que consiste (*a*) en la recolección de hechos que a la luz del paradigma se anuncian como particularmente reveladores de la naturaleza de las cosas, (*b*) en la recolección de hechos directamente comparables con las predicciones de la teoría paradigmática, y (*c*) en trabajos de observación y experimentación encaminados a articular la teoría paradigmática, ya sea midiendo con creciente precisión las CONSTANTES DE LA NATURALEZA que figuran en ella, ya sea determinando el enunciado correcto de leyes empíricas cuantitativas, ya sea ampliando el cambo de aplicación del paradigma.

(2) *La labor teórica*, que consiste en (*a*) deducir predicciones que proporcionan información prácticamente valiosa, (*b*) deducir predicciones que puedan compararse con los hechos (y así proporcionen información teóricamente valiosa) y (*c*) mejorar la formulación de la teoría paradigmática.

En estos varios aspectos la ciencia normal aparece, a ojos de Kuhn, como dedicada sobre todo a la resolución de rompecabezas (*puzzle-solving*). Según él, "una de las razones por las que la ciencia normal parece progresar tan velozmente es que sus practicantes se concentran en problemas que solo su propia falta de ingenio podría impedirles resolver".

cientificismo (A. *Szientismus*, F. *scientisme*, I. *scientism*). Término utilizado, en general peyorativamente, para designar a una o más de las tendencias siguientes: (*a*) a emplear los métodos y conceptos de las ciencias naturales —física, química, biología— en el estudio de la vida humana; (*b*) a esperar

de la investigación científica así concebida que produzca una solución de los grandes problemas sociales y morales que aquejan a la humanidad; (*c*) a utilizar los asertos de las teorías que gozan de mayor aceptación en la práctica científica para componer una "visión científica del mundo" que reemplace a las mitologías del pasado.

Ahora que crece el número de los enemigos declarados de la ciencia, el término tal vez pase a usarse en un sentido neutro y más literal, simplemente para agrupar a sus partidarios.

círculo vicioso (A. *Zirkelschluss*, F. *cercle vicieux*, I. *vicious circle*). Situación que se da cuando tratamos de definir, explicar o probar una primera cosa en función de otra segunda cosa que a su vez presupone que ya está definida, explicada o probada la primera, por lo que volvemos al punto de partida, como si estuviéramos describiendo un círculo. El círculo es vicioso en el sentido de que conduce al fracaso de nuestro intento inicial. Una *definición circular* de una noción *P* es una definición explícita de *P* en cuyo *definiens* (la frase o fórmula que define *P*) ya aparece *P* u otra expresión equivalente. Una definición circular no define nada. (Esto no se aplica a la definición recursiva, que es una definición implícita.) Una *explicación circular* de un hecho *H* es una explicación de *H* que aduce entre sus factores explicativos *H* mismo o algo equivalente. Una explicación circular no explica nada. Una *prueba circular* de una conclusión *C* es una prueba a partir de ciertas premisas, entre las que se encuentra *C* u otro enunciado que presuponga *C*. Una prueba circular no prueba nada.

claridad y distinción (A. *Klarheit und Deutlichlichkeit*, F. *clarté et distinction*, I. *clarity and distinctness*). Ya en el siglo II Galeno exigía que las disputas y refutaciones "se refieran a algo claro y distinto" (σαφὲς καὶ διωρισμένον). Pero solo en el siglo XVII este par de atributos alcanza una posición privilegiada en la literatura filosófica. Se la deben a Descartes, para quien la *claridad y distinción* de las ideas es, a la vez, garantía de lo que él llama su "verdad" y razón necesaria y suficiente de la certeza de cualquier juicio concerniente a ellas. Descartes llama *clara* a una idea "presente y manifiesta a un espíritu atento" y *distinta* a aquella que es "a tal punto precisa y diferente de todas las otras que no comprende en sí más que lo que aparece manifiestamente a quien la considera como es debido". Leibniz corrigió estas definiciones de Descartes. Según Leibniz, mi representación (*cognitio*) es *clara* si contiene todo lo que requiero para reconocer a la cosa representada; ella es, además, *distinta* solo si no es confusa, esto es, si puedo enumerar separadamente cada una de las características que, conjuntamente, son suficientes para discernir esa cosa de las demás.

clase (A. *Klasse*, F. *classe*, I. *class*). Con frecuencia se emplea la palabra 'clase' como sinónimo de 'conjunto'. Sin embargo, en 1925 von Neumann introdujo la distinción técnica entre clases y conjuntos, distinción luego adoptada y elaborada por Bernays, Gödel, Quine y otros autores. En este sentido técnico, todas las colecciones de objetos definibles en la teoría de conjuntos son clases. La noción de clase es más amplia que la de conjunto, pues todos los conjuntos son clases, pero no todas las clases son conjuntos. Solo son conjuntos las clases que son a su vez *miembros* de otras clases: X es un conjunto $\Leftrightarrow \exists Z(X \in Z)$. Sin embargo, hay clases que no pueden ser elementos de otras clases, pues la mera hipótesis de que lo fueran da lugar a contradicciones. Cantor las había llamado multiplicidades inconsistentes. Ahora las llamamos clases últimas (o propias). X es una clase última $\Leftrightarrow \neg\exists Z(X \in Z)$. Ejemplos de clases últimas son la clase universal $V = \{x : x = x\}$, la clase de Russell $\{x : x \notin x\}$, la clase de todos los ordinales $\Omega = \{x : x \text{ es un ordinal}\}$, etc. En la teoría de conjuntos ZFC solo hay conjuntos y las clases últimas no existen. En las teorías de conjuntos con clases, como NBG, hay tanto (clases que son) conjuntos como clases últimas, que no son conjuntos y no pueden ser elementos de otras clases. En las teorías de conjuntos con clases es frecuente usar las variables mayúsculas para clases en general y las minúsculas para conjuntos en especial. Por lo demás, ambas teorías, ZFC y NBG, son similares y dicen lo mismo acerca de los conjuntos, por lo que pueden considerarse como variedades de la teoría estándar de conjuntos.

clase natural (A. *natürliche Klasse*, F. *classe naturelle*, I. *natural kind*). La idea, compartida de algún modo por el sentido común de todos los pueblos, de que el mundo real está naturalmente articulado en *clases* que la inteligencia humana es capaz de discernir fue incorporada por Platón y Aristóteles a sus filosofías como un componente vertebral. En la Edad Moderna, y junto con estas filosofías, la idea perdió prestigio debido sobre todo a la dificultad que tienen las ciencias en dar de una vez para siempre con las clases naturales de las cosas (*sin embargo*, véase la cita de Whewell bajo FENOMENOLOGÍA). Hacia 1960 fue resucitada por Putnam y otros autores, como un antídoto contra las tesis de Kuhn y Feyerabend sobre la INCONMENSURABILIDAD de los conceptos empleados por teorías científicas sucesivas. Según Putnam (1975), puestos ante un ejemplar de una clase natural —una pepita de oro, un vaso de agua, un abedul, una nutria—, podemos fijar rígidamente la referencia de una palabra a esa clase. La denotación de tales designadores se trasmite ininterrumpidamente de generación en generación, sobrevive a las vicisitudes del pensamiento científico y tiende un puente irrompible entre las sucesivas etapas de este. Hay, *sin duda*, cierta ingenuidad en suponer que 'agua', por ejemplo, o su equivalente griego, ὕδωρ, designaba para Empédo-

cles y Aristóteles lo mismo que para un químico actual, esto es, el compuesto H_2O, y que seguirá designando precisamente este compuesto no importa cuanto cambien los conceptos científicos de átomo y molécula, elemento y enlace químico. (No hace tanto que el descubrimiento de los isótopos del hidrógeno impuso el distingo, hasta entonces insospechado, entre agua pesada y agua liviana y la noción de que lo que llamamos "agua pura" es una mezcla de ambas.) Más inverosímil aún es la tesis, sostenida en un momento por Putnam, de que hay designadores rígidos de cantidades físicas, como *masa* o *carga eléctrica*; lo que estas expresiones denotan no es algo que pueda simplemente señalarse con el dedo, y no parece posible encasillar sin imprecisión ni ambigüedad sus referentes salvo en el contexto de una teoría física determinada.

clase última [o **propia**] (A. *echte Klasse*, F. *classe propre*, I. *proper class*). Cantor se había dado cuenta de que ciertas colecciones (como la de todos los ordinales o la de todos los cardinales) son tan grandes que dan lugar a contradicciones si se las trata como objetos o conjuntos normales; las había llamado multiplicidades inconsistentes o absolutamente infinitas. Sin embargo, no se había privado de hablar de ellas. En 1925 von Neumann formalizó esta idea de un modo riguroso y al parecer consistente, distinguiendo entre clases y conjuntos. Un conjunto es una clase que puede ser tratada como un objeto y puede ser elemento de otras clases. Una clase última (o propia) es una clase de la que se puede hablar (por ejemplo, se pueden predicar cosas de ella), pero que no puede entrar en la relación de pertenencia con ninguna otra clase, so pena de incurrir en contradicción. Una clase última es, pues, una clase que no es elemento de ninguna otra clase.

clasificación (A. *Klassifikation*, F. *classification*, I. *classification*). Desde un punto de vista extensional, una clasificación de un dominio *A* es una PARTICIÓN de *A*, y hay tantas clasificaciones como particiones. Desde un punto de vista intensional, una clasificación de *A* es un conjunto de conceptos clasificatorios, cuyas extensiones constituyen una partición de *A*. En especial, todo objeto de *A* cae bajo uno y solo un concepto clasificatorio. Una clasificación arbitraria cumple siempre las condiciones formales de adecuación indicadas. Para ser científicamente interesante se requiere además que la clasificación sea relevante e informativa para la ciencia de que se trate. A veces incluso se insiste en que la clasificación sea "natural", es decir, que divida el mundo por sus líneas de fractura. Dos ejemplos paradigmáticos, aunque bastante diferentes, de clasificación natural son la clasificación de los átomos en elementos químicos y la clasificación de los animales en especies.

Aunque los átomos pueden clasificarse de muchas maneras, su clasifi-

cación en elementos químicos es especialmente informativa, en el sentido de que permite predecir muchas propiedades del átomo, una vez que sabemos de qué elemento químico se trata. Ello se debe a que dos átomos del mismo elemento poseen el mismo número de protones en su núcleo, por lo que comparten todas las propiedades que se desprenden de ese hecho crucial.

Toda relación de EQUIVALENCIA $\sim$ sobre un dominio A induce una partición de ese dominio en clases de equivalencia, llamada el *espacio cociente* de A por la relación $\sim$, y simbolizada como $A/\sim$. Por eso con frecuencia clasificamos un dominio mediante la previa introducción de una relación de equivalencia. Consideremos la relación de equivalencia $\sim_p$ sobre el dominio A de los átomos en que están dos átomos x, z cualesquiera si y solo si x tiene el mismo número de protones en su núcleo que z. La clase de equivalencia (respecto a $\sim_p$) de un átomo determinado es el conjunto de todos los átomos que tienen su mismo número de protones en el núcleo, es decir, es un elemento químico. Así, el elemento químico carbono es la clase de todos los átomos que tienen seis protones en su núcleo, el elemento químico nitrógeno es la clase de todos los átomos que tienen siete protones en su núcleo, el elemento químico oxígeno es la clase de todos los átomos que tienen ocho protones en su núcleo, etc. El espacio cociente $A/\sim_p$ es el conjunto de los elementos químicos.

Los animales pueden ser clasificados de muchas maneras, por ejemplo, según su tamaño o su utilidad, pero la clasificación más natural es su clasificación en especies. En efecto, una especie o bioespecie es una comunidad reproductiva, cuyos miembros (de distinto sexo) pueden cruzarse entre sí y tener descendencia fértil, pero que está reproductivamente aislada del resto de las comunidades reproductivas. Los genes solo se intercambian, se difunden y circulan dentro del acervo génico de una especie. Cada especie es estanca respecto a los genes de las demás. Los lobos y los perros son la misma especie, pues se reproducen entre sí y tienen cachorros fértiles. Los perros y los gatos son especies distintas, pues están reproductivamente aisladas. Las especies son comunidades realmente existentes en la naturaleza con independencia de nuestras convenciones. Por eso una clasificación de los animales en especies parece especialmente natural. De todos modos, la partición de los animales en especies solo está bien definida sincrónicamente, en un momento dado de la evolución biológica, por ejemplo ahora. A lo largo del tiempo las especies se suceden con fronteras difusas y hace falta un cierto grado de convencionalidad para marcarlas nítidamente.

La sistemática zoológica no solo clasifica los animales en especies. También los clasifica en géneros, familias, órdenes y demás categorías de la jerarquía taxonómica. Todas estas clasificaciones pretenden ser naturales en el

sentido de reflejar las relaciones de parentesco y descendencia realmente existentes en la naturaleza.

En la taxonomía biológica los conceptos clasificatorios suelen llamarse taxones o clades. Dos clasificaciones del mismo dominio pueden ser incomparables (como la clasificación de los primates en prosimios y simios y su clasificación en machos y hembras) o comparables respecto a finura. Decimos que una clasificación C_1 de A es *tanto o más fina* que otra clasificación C_2 del mismo dominio si y solo si, para cualesquiera taxones S de C_1 y S' de C_2, o bien S está incluido en S' o bien ambos taxones son disjuntos entre sí. Por ejemplo, la clasificación de los animales en especies es más fina que su clasificación en géneros, y esta es más fina que su clasificación en familias. La especie de los perros y lobos está incluida en el género *Canis*, que a su vez está incluido en la familia de los cánidos. Por otro lado, la especie de los perros y lobos es disjunta con el género de los zorros (*Vulpes*), que a su vez es disjunto con la familia de los félidos. También fuera de la biología puede hablarse de mayor o menor finura de las clasificaciones. Así, la clasificación de los átomos en isótopos es más fina que su clasificación en elementos químicos. Cuando tenemos una secuencia finita de clasificaciones de finura decreciente del mismo dominio, hablamos de una jerarquía de clasificaciones. Un ejemplo es la jerarquía taxonómica linneana, que clasifica los organismos mediante siete clasificaciones (los niveles o categorías de la jerarquía) de finura decreciente: en especies, géneros, familias, órdenes, clases, filos (*Phyla*) y reinos. Cada organismo se clasifica en cada uno de esos niveles, cayendo bajo el taxón o concepto clasificatorio correspondiente. Por ejemplo, un perro pertenece a la especie *Canis lupus*, al género *Canis*, a la familia de los cánidos (*Canidae*), al orden de los carnívoros (*Carnivora*), a la clase de los mamíferos (*Mammalia*), al filo de los craniados (*Craniata*) y al reino de los animales (*Animalia*).

clausura [de un conjunto respecto a una relación o función] (A. *Abschliessung*, F. *fermeture*, I. *closure*). El conjunto A está *clausurado* respecto a la relación R si y solo si para cada x y z, si $x \in A$ y xRz, entonces $z \in A$. La *clausura* de A respecto a R es el mínimo conjunto B tal que $A \subseteq B$ y B está clausurado respecto a R. El conjunto A está *clausurado* respecto a la función unaria f si y solo si para cada $x \in$ A, $f(x) \in A$. El conjunto A está *clausurado* respecto a la función binaria f si y solo si para cada x, $y \in A$, $f(x,y) \in A$. La *clausura* de A respecto a f es el mínimo conjunto B tal que $A \subseteq B$ y B está clausurado respecto a f. Y así sucesivamente. En general, la noción de clausura evoca la de encierro. La clausura de un conjunto respecto a algo implica una cierta incapacidad de salir o ir más allá de ese conjunto mediante ese algo. Así, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros está clausurado respecto

a la adición y a la multiplicación. Así también una teoría formal axiomática (es decir, el conjunto de sus teoremas) es la clausura del conjunto de sus axiomas respecto a la relación de consecuencia; o a la aplicación de las reglas de inferencia, si preferimos considerarla sintácticamente y se trata de una teoría de primer orden.

cofinalidad (A. *Konfinalität*, F. *cofinalité*, I. *cofinality*). Sea $\langle A, \prec \rangle$ un ORDEN LINEAL. Un subconjunto $B \subseteq A$ es *cofinal* en A si y solo si para cada elemento $x \in A$ hay un elemento $y \in B$ tal que $x \preccurlyeq y$. Decimos que B es cofinal en A porque coincide con A al final. En especial, un subconjunto B de un ordinal α es cofinal en α si y solo si para cada elemento $\gamma \in \alpha$ hay un elemento $\beta \in B$ tal que $\gamma \preccurlyeq \beta$. La *cofinalidad* de α, cf(α), es el mínimo ordinal β tal que hay una función $f : \alpha \to \beta$ cuyo recorrido es cofinal en α. La cofinalidad de un ordinal límite λ, cf(λ), es el mínimo cardinal κ tal que λ es el supremo de κ ordinales menores. Siempre ocurre que la cofinalidad de un ordinal es menor o igual que él, $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$. Un ordinal α es *regular* si y solo si $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. Por ejemplo, ω es regular, pues $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$. Un ordinal α es *singular* si no es regular. En otras palabras, α es singular si es mayor que su cofinalidad, si $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$. Por ejemplo, cualquier ordinal sucesor $\alpha+1$ es singular, pues $\mathrm{cf}(\alpha+1) = 1$, y también lo es $\omega + \omega$, pues $\mathrm{cf}(\omega + \omega) = \omega$. Por otro lado, para cualquier α, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Por tanto, la cofinalidad siempre es regular.

compacto (A. *Kompakt*, F. *compacte*, I. *compact*). Sea $\langle S, T \rangle$ un espacio topológico con TOPOLOGÍA T. Un *recubrimiento abierto* del espacio $\langle S, T \rangle$ es un conjunto de abiertos $K \subseteq T$, tal que cada punto de S pertenece por lo menos a un elemento de K. El espacio $\langle S, T \rangle$ es *compacto* si cada recubrimiento abierto K del mismo incluye una colección finita de abiertos K' que también es un recubrimiento abierto de $\langle S, T \rangle$. Obsérvese que esta noción de espacio compacto le da a la idea de finitud del espacio un sentido preciso que no depende de conceptos métricos como distancia o volumen.

complejidad de Kolmogorov (A. *Komplexität*, F. *complexité de Kolmogoroff*, I. *Kolmogorov complexity*). Se ha tratado de precisar la noción un tanto vaga de complejidad de un objeto cualquiera reduciéndola a la noción más manejable de la complejidad de su descripción, a su vez entendida como la complejidad de la secuencia binaria que la representa en una codificación estandarizada. Por ejemplo, es bien sabido que toda melodía, toda imagen fija o en movimiento y todo texto puede ser codificado como una secuencia binaria. Es así como los discos compactos almacenan la música y como los computadores almacenan los textos e imágenes. La idea intuitiva es que cuanto más

regular o repetitivo es algo, tanto más simple y fácil de describir es. Cuanto más irregular es algo, tanto más complejo y farragoso de describir. En este enfoque, la complejidad del objeto se mide en términos de la dificultad para describirlo o generarlo.

Comparemos las secuencias binarias cuyos primeros dígitos son:

A: 001001001001001001001001001001001001001001001001001...
B: 001011101001000011010100010111111011010010111010000011...

Supongamos que ambas secuencias tienen tres millones de dígitos. La primera, A, puede ser descrita o generada mediante el simple algoritmo: «escribe 001 un millón de veces». La segunda, B, no parece ser describible de un modo mucho más corto que copiando la secuencia entera. La primera secuencia es altamente regular o simple. La segunda es muy irregular o compleja. Podemos medir la complejidad de una secuencia binaria midiendo la longitud del mínimo programa que la genera. Pero esa longitud puede ser relativa, dependiendo de la computadora o del lenguaje de programación de que se trate. Sin embargo, es posible llegar a un valor absoluto, independiente de cualquier computador y cualquier lenguaje de programación, fijando para ello una MÁQUINA UNIVERSAL DE TURING determinada.

Una máquina universal de Turing, convenientemente programada, puede computar cualquier función computable y, en especial, puede generar cualquier secuencia binaria computable. Fijemos ahora una máquina universal de Turing determinada U. Un programa para generar la secuencia binaria x es una secuencia binaria p, tal que, cuando U recibe p como input, produce como output x, es decir, tal que $U(p) = x$. Cada uno de esos programas tiene una cierta longitud, un cierto número de dígitos binarios, de ceros o unos: long(p).

$K(x)$, la complejidad de la secuencia binaria x, es la longitud del mínimo programa p que genera x, si hay programas que generan x, y es ∞, si no hay tales programas. Sea μ el operador de mínimo: $\mu x \varphi(x)$ es el mínimo x tal que $\varphi(x)$. Entonces podemos definir

$$K(x) = \mu n \exists p (n = \text{long}(p) \wedge U(p) = x) \quad , \text{ si } \exists p U(p) = x$$
$$K(x) = \infty \quad , \text{ si } \neg\exists p U(p) = x$$

Esta medida es unívoca hasta una constante aditiva, es decir, si en vez de elegir la máquina universal de Turing U hubiésemos elegido otra U', las distintas medidas de la complejidad así obtenidas habrían coincidido asintóticamente, en el sentido de que la diferencia entre sus valores respectivos siempre habría sido menor que un número fijo c (que depende solo de U'), de tal modo que para secuencias suficientemente largas la diferencia relativa entre

ambas medidas sería cada vez menor. En efecto, se puede probar el teorema de invariancia: sea K' la medida de la complejidad definida en función de la máquina de Turing universal $U' \neq U$. Para cualquier secuencia binaria x, $|K(x) - K'(x)| < c$, donde c es una constante independiente de x y dependiente solo de U y U'.

Una secuencia binaria x es comprimible si su complejidad es menor que su longitud: $K(x) <$ long(x). En ese caso, puede ser comprimida por un programa más corto que ella y que el que la genera. Una secuencia binaria es aleatoria si su complejidad es igual o mayor que su longitud: $K(x) \geq$ long(x). Una secuencia aleatoria no encierra regularidad alguna, no puede ser comprimida de ningún modo, pues el programa más breve que la genera incluye la copia de la propia secuencia y es por tanto tan largo al menos como ella. (A veces, en vez de 'secuencia aleatoria', se dice 'secuencia caótica'; este uso de 'caótico' difiere del explicado bajo CAOS.)

Cada secuencia binaria representa un número natural en base dos. Por tanto, la complejidad de la secuencia es la complejidad del número que representa. La mayor parte de las secuencias y de los números son aleatorios. Solo una secuencia de cada mil (de longitud dada) se deja comprimir más de diez unidades respecto a su propia longitud. De todos modos, aunque es fácil probar que una secuencia no es aleatoria, y que por tanto su información es comprimible (basta para ello con presentar el correspondiente algoritmo o programa compacto que la genera), es difícil o imposible probar que una secuencia particular es aleatoria o incomprimible. De hecho, es posible asociar con cada teoría formal Σ consistente y enumerable que contenga la aritmética una constante (un número natural) c_Σ, tal que ningún enunciado del tipo $K(x) > c_\Sigma$ (donde x es una secuencia binaria finita y K es la complejidad) puede ser probado en la teoría Σ. En este sentido la teoría de la complejidad permite obtener resultados de incompletud que recuerdan a los de Gödel.

El precedente más antiguo de la teoría de la complejidad puede buscarse en los intentos de von Mises de precisar la noción de secuencia binaria aleatoria durante el periodo de entreguerras. Los conceptos y tesis típicos de la teoría aparecen por primera vez a principios de los años sesenta en Ray Solomonoff, un discípulo de Carnap que ofreció una teoría general del razonamiento inductivo, basada en la idea de que una ley científica representa un modo particularmente eficiente de comprimir la información presente en múltiples enunciados de observación, que se conciben (codificados binariamente) como los segmentos iniciales de una secuencia binaria infinita, generada por la ley en cuestión. Finalmente, en 1965 Andrei Kolmogorov introdujo de un modo preciso la noción de complejidad —llamada actualmente en su honor complejidad de Kolmogorov o K— como una medida de la información individual o aleatoriedad de las secuencias y probó el teorema de invariancia.

Chaitin y Martin-Löf también han hecho contribuciones importantes. Aunque rigurosa y fecunda, la noción de complejidad de Kolmogorov no está exenta de problemas. El mayor de todos consiste en que la medida *K* no es una función computable. Además, *K* mide la complejidad en función solo del tamaño del programa. Bennett ha propuesto una medida alternativa que mide el tiempo (contado en pasos) que emplea el mínimo programa para generar la secuencia. Por otro lado, y a nivel más intuitivo, algunos objetan a la identificación de la complejidad con la aleatoriedad, pensando que la complejidad propiamente tal está en el punto medio interesante entre los dos extremos aburridos de la simplicidad y la complejidad en el sentido de Kolmogorov. De todos modos, lo "interesante" es una categoría subjetiva, difícil o imposible de definir de un modo objetivo.

complementariedad (A. *Komplementarität*, F. *complémentarité*, I. *complementarity*). Término con que Niels Bohr designa la siguiente característica —según él, insoslayable— de nuestro conocimiento: ningún sistema coherente de conceptos es adecuado para captar la complejidad de las cosas, por lo cual en cada campo de la investigación científica —desde la microfísica hasta la psicología y la antropología cultural— hay que recurrir a pares de conceptos que brindan perspectivas mutuamente inconsistentes pero complementarias. (Bohr da estos ejemplos: "pensamiento" y "sentimiento", "instinto" y "razón".)

Aunque esta idea general de *complementariedad* ha tenido solo una acogida marginal entre los filósofos de la ciencia, que en su mayoría la juzgan excesivamente imprecisa y oscura, su aplicación específica a los fenómenos cuánticos fue respaldada por físicos eminentes como Heisenberg y Born, y movió a uno de los biógrafos de Bohr a proclamarlo el sucesor de Kant en la filosofía (Pais, 1991, p. 23). Según Bohr, el descubrimiento del cuanto de acción (esto es, la CONSTANTE DE PLANCK *h*) puso de manifiesto que nuestra experiencia no puede amoldarse al sistema de conceptos causales y espaciotemporales analizado por Kant y utilizado por la física clásica. Lo demuestra la imposibilidad de dar una descripción clásica consistente del EFECTO COMPTON. "Cualquier arreglo apropiado para estudiar el intercambio de energía (*E*) y momento (*P*) entre el electrón y el fotón debe contemplar una latitud en la *descripción espaciotemporal* de la interacción, suficiente para la definición del número de onda (σ) y la frecuencia (ν) que entran en la relación ($E = h\nu$, $P = h\sigma$). A la inversa, cualquier intento de localizar más exactamente la colisión entre el fotón y el electrón excluiría toda descripción más precisa del *balance de momento y energía*, debido a la inevitable interacción con los relojes y escalas fijas que definen el marco de referencia espaciotemporal" (Bohr, 1949, p. 210). Sin embargo, sería equivocado pensar que "las dificultades de

la teoría atómica pueden eludirse reemplazando eventualmente los conceptos de la física clásica con nuevas formas conceptuales [...] El reconocimiento de la indivisibilidad del cuanto de acción y la determinación de su magnitud [...] dependen del análisis de mediciones basadas en conceptos clásicos; [...] solo la aplicación de estos conceptos hace posible relacionar el simbolismo de la teoría cuántica con los datos de la experiencia" (Bohr, 1934, p. 16). Por más que los fenómenos escapen al alcance de la explicación física clásica, la presentación de la evidencia tiene que expresarse en términos clásicos, por una razón muy simple: "Con la palabra 'experimento' nos referimos a una situación en la que podamos decirle a otros lo que hemos hecho y lo que hemos aprendido" (1949, p. 209), y "solo con ayuda de las ideas clásicas es posible atribuir un significado inequívoco a los resultados de la observación" (1934, p. 17). Por lo tanto, "la coordenatización espaciotemporal y el reclamo de causalidad, cuya unión caracteriza las teorías clásicas", ahora deben considerarse "como rasgos complementarios pero mutuamente excluyentes de la descripción" (1934, p. 54). "De hecho, es solo la mutua exclusión de cualquier par de procedimientos experimentales que permitan la definición inequívoca de cantidades físicas complementarias lo que da cabida a nuevas leyes físicas cuya coexistencia a primera vista puede parecer irreconciliable con los principios básicos de la ciencia. La noción de *complementariedad* busca caracterizar justamente esta situación enteramente nueva en lo concerniente a la descripción de fenómenos físicos" (Bohr, 1935, p. 700).

complemento (A. *Komplement*, F. *complément*, I. *complement*). El *complemento* de un conjunto A relativo a otro conjunto K del que A es parte (esto es, tal que $A \subseteq K$) es el conjunto de los elementos de K no contenidos en A. Simbólicamente, $\mathbf{C}_K A = \{x : x \in K \text{ y } x \notin A\}$. Se escribe $\mathbf{C}A$ en vez de $\mathbf{C}_K A$, si, como generalmente sucede, el contexto indica cuál es el conjunto K respecto al cual se toma el complemento.

completud semántica (A. *Vollständigkeit*, F. *complétude sémantique*, I. *completeness*). Una lógica está caracterizada por la relación de CONSECUENCIA entre sus fórmulas. Esta relación semántica $\models$ puede ser simulada por una relación sintáctica $\vdash$ basada en un cálculo deductivo. Si partiendo de las fórmulas $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ como premisas, mediante la aplicación sucesiva de las reglas del cálculo deductivo podemos generar la fórmula β, decimos que β es deducible a partir de $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. En símbolos, $\alpha_1, \ldots \alpha_n \vdash \beta$. Si la simulación es completa, si siempre ocurre que todas las consecuencias de un conjunto dado de premisas son deducibles mediante el cálculo deductivo, decimos que ese cálculo es semánticamente completo. El cálculo deductivo simbolizado por $\vdash$ es *semánticamente completo* si y solo si para cualesquiera fórmulas $\alpha_1, \ldots \alpha_n$,

β: si $\alpha_1, \ldots \alpha_n \models \beta$, entonces $\alpha_1, \ldots \alpha_n \vdash \beta$. Esto implica en especial que en un cálculo semánticamente completo todas las fórmulas válidas son deducibles sin premisas: si $\models \alpha$, entonces $\vdash \alpha$. Una lógica es semánticamente completa si existe un cálculo deductivo semánticamente completo para ella. La lógica de primer orden es semánticamente completa; la lógica de segundo orden no lo es. Si una lógica es semánticamente completa, entonces con su cálculo deductivo, convenientemente regimentado, se pueden deducir o generar sucesivamente todas sus fórmulas lógicamente válidas, que así resultan enumeradas. Por tanto, el conjunto de las sentencias válidas de una lógica semánticamente completa es recursivamente ENUMERABLE, como también lo es el de las consecuencias de un conjunto finito o decidible o al menos recursivamente enumerable de premisas.

El concepto de *completud semántica* (de un cálculo deductivo, de una lógica) no debe confundirse con el concepto sintáctico de TEORÍA COMPLETA.

componente (A. *Komponent*, F. *component*, I. *component*). Los *componentes* de un espacio topológico desconectado se definen bajo CONECTADO. Los *componentes* de un vector, relativos a una base del módulo o espacio vectorial a que pertenece, se definen bajo BASE DE UN MÓDULO y bajo ESPACIO VECTORIAL, respectivamente. Bajo CAMPO, sección a.2, se utiliza esta definición para definir los *componentes* de un campo vectorial sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$, relativos a una carta de $\mathcal{M}$. Bajo CAMPO, sección a.3, se indica cómo calcular los *componentes* de un campo tensorial sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$, relativos a una carta de $\mathcal{M}$. Los *componentes* de una conexión lineal ∇ sobre una variedad diferenciable $\mathcal{M}$, relativos a una carta de $\mathcal{M}$, se definen bajo CONEXIÓN LINEAL.

composición (de funciones) (A. *Verkettung*, F. *composition*, I. *composition*). Sean g y f dos funciones g: $A \rightarrow B$ y f: $B \rightarrow C$. Bajo estas condiciones, la operación de composición forma a partir de f y g una nueva función, llamada la *composición* de f y g, simbolizada como $f \circ g$ o fg, que aplica f al valor de g para cualquier argumento de g. En resumen, $f \circ g$: $A \rightarrow C$, tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Por tanto, el GRAFO de $(f \circ g)$ es el conjunto de pares $\{\langle x,y\rangle: \exists z(\langle x,z\rangle \in g \wedge \langle z,y\rangle \in f\}$. Por ejemplo, si $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^2$, $(f \circ g)(x) = 3x^2$. La composición de una función con su inversa es la función identidad: $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$. Por ejemplo, si $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es la función $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $g^{-1}(x) = x^2$. Por tanto, $(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) = \sqrt{x^2} = x$. ($\mathbb{R}^+$ designa el conjunto de los números reales positivos.)

computabilidad (A. *Berechenbarkeit*, F. *calculabilité*, I. *computability*). Una función asigna valores a los elementos de su dominio. Algunas funciones pa-

recen ser incomputables, como la función que asigna a cada ser humano la fecha de su muerte, pues nadie sabe cuándo va a morir. Otras funciones parecen ser computables, como las funciones numéricas de adición, sustracción, multiplicación y división, que todos sabemos computar, pues en la escuela primaria aprendimos a sumar, restar, multiplicar y dividir. El procedimiento escolar para multiplicar, por ejemplo, es un ALGORITMO; no requiere que el alumno sea creativo, se espabile o tenga intuiciones brillantes; basta con que aplique al pie de las reglas las instrucciones explícitas recibidas. Una función es *computable* si existe un algoritmo que nos indica cómo computarla de un modo efectivo. La computabilidad es la propiedad de ser computable. La noción de función computable ha sido exitosamente precisada en la lógica y la teoría de la recursión mediante nociones tales como la de FUNCIÓN RECURSIVA o MÁQUINA DE TURING.

Una función numérica unaria f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es computable si y solo si hay un algoritmo (por ejemplo, una máquina de Turing) para computarla. Como cada algoritmo es un texto (cada máquina de Turing es una tabla) sobre cierto alfabeto finito, el conjunto de las funciones numéricas computables es NUMERABLE. Sin embargo, no es ENUMERABLE, es decir, no puede generarse recursivamente o escribirse en forma de lista, como se prueba mediante el MÉTODO DIAGONAL. En efecto, supongamos que hay una lista f_1, f_2, f_3, f_4, ... de todas las funciones numéricas computables y que, para cada i, $f_i(m)$ es el valor que la i-ésima función f_i de la lista asigna al número m. Ahora definimos la función numérica f^* del siguiente modo. Para cada número n, $f^*(n) = 1$ si $f_n(n) = 0$, y $f^*(n) = 0$ si $f_n(n) \neq 0$. Por tanto, $f^*(n) \neq f_n(n)$ para cualquier n. Sin embargo, si hubiera una tal lista de todas las funciones numéricas computables, f^* sería también una función computable, ya que sabríamos cómo computar cada uno de sus valores, pero no estaría en la lista. Esta contradicción (la lista de todas las funciones numéricas computables no es la lista de todas las funciones numéricas computables) nos muestra que no puede haber una tal lista y que, por tanto, el conjunto de todas las funciones numéricas computables no es enumerable.

comunidad científica (A. *wissenschaftliche Gemeinschaft*, F. *communauté scientifique*, I. *scientific community*). A medida que se difunde el convencimiento de que no hay reglas universales y eternas de lógica o metodología para certificar las teorías e hipótesis científicas y establecer preferencias entre proyectos de investigación, son más frecuentes las alusiones a una supuesta *Comunidad Científica*, cuya vida en la historia sería la fuente y el sostén de tales certificaciones y preferencias. Como los científicos de cada especialidad entienden a medias lo que dicen los peritos de las otras y no se sienten llamados a juzgarlo, es preferible hablar de *comunidades científicas*,

en plural y con minúsculas. Se trataría, en todo caso, de realidades fluidas, de límites, peso e identidad fluctuantes, *sin una autoridad establecida* que especifique y legitime los valores vigentes. Por otra parte, la práctica habitual de subordinar al "juicio de los pares" las decisiones sobre el financiamiento de proyectos de investigación y la publicación de sus resultados en un medio respetable asegura —en este campo de interacción social como en cualquier otro— la importancia del juego de las pasiones e intereses y de las relaciones de poder.

concepto (A. *Begriff*, F. *concept*, I. *concept*). Así como no se puede dibujar sin líneas ni pintar sin colores, tampoco se puede hablar sin palabras ni pensar sin conceptos. Hay una estrecha relación (que no conocemos bien) entre cómo hablamos y cómo pensamos, entre las oraciones y las proposiciones, entre las palabras y los conceptos. Una palabra puede tener varias acepciones o significados. Cada uno de estos significados puede identificarse con un concepto determinado. En tal caso, decimos que la palabra (en esa acepción) expresa ese concepto. En cualquier caso, los conceptos tienen que ser algo compartido por sus usuarios, pues, si no, no sería posible la comunicación ni la ciencia. Los conceptos se llaman también nociones o ideas.

Los conceptos se usan tanto en la vida cotidiana como en la actividad científica y en otras muchas actividades. De hecho, bastantes conceptos científicos actuales provienen de conceptos cotidianos, aunque durante el viaje se hayan transformado, ganando sobre todo en precisión. Así, las nociones químicas de hierro (átomo con 26 protones en su núcleo) o de agua (H_2O) precisan nociones previas del lenguaje ordinario. Lo mismo ocurre con los conceptos métricos o magnitudes (conceptos que aplican números a cosas) tales como la edad, la energía o la distancia.

Cada concepto tiene una *intensión* y una *extensión*. Al identificar un concepto con el significado de una palabra, estábamos caracterizando la intensión del concepto o, si se prefiere, un concepto intensional. La intensión de un concepto es el significado de la palabra que lo expresa o la definición o el criterio que empleamos para aplicarlo. La extensión del concepto *P* es el conjunto de cosas a las que se aplica o que caen bajo *P* o que son *P*. Dos conceptos intensionales distintos pueden coincidir en extensión. Sin embargo, dos conceptos extensionales distintos no pueden coincidir en extensión, tienen que diferenciarse al menos en un objeto que caiga bajo el uno pero no bajo el otro. Si coinciden en extensión, entonces son el mismo concepto extensional, pues los conceptos extensionales son conjuntos, sometidos por tanto al AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD.

A cada concepto corresponde un cierto ámbito de aplicación posible, dentro del cual su atribución está definida, tiene sentido y valor de verdad y más

allá del cual su atribución no es tanto falsa como sin sentido. El concepto aritmético de primo tiene a los números naturales como su ámbito de aplicación. No tiene sentido preguntar si un número real (o un tomate o un rayo) es primo o no. A la inversa, tampoco tiene sentido atribuir edad o temperatura a un número natural. El error de atribuir un concepto a un objeto fuera de su ámbito de aplicación se llama error categorial.

El análisis de la estructura de los conceptos científicos conduce a clasificarlos en tres grandes grupos: los CONCEPTOS CLASIFICATORIOS, los CONCEPTOS COMPARATIVOS y los CONCEPTOS MÉTRICOS.

concepto clasificatorio (A. *klassifikatorischer Begriff*, F. *concept classificatoire*, I. *classificatory concept*). Un concepto clasificatorio sirve para referirnos a un grupo determinado de objetos que tienen algo en común y para atribuir esa característica común a los miembros del grupo. Los sustantivos y adjetivos del lenguaje ordinario suelen corresponder a conceptos clasificatorios: *hombre, mujer, árbol, camión, azul, puntiagudo.* Algunos conceptos del lenguaje ordinario —como *bicho, pájaro, enorme*— son demasiado vagos para poder ser incorporados al lenguaje científico, pues no determinan unívocamente la clase de cosas a las que se aplican. Sin embargo, otros más precisos —como *gato, agua, hirviente*— pueden ser incorporados sin más trámite que el de la explicitación del significado de los términos que los expresan. Esta dilucidación con frecuencia resulta en conceptos científicos extensionalmente (más o menos) coincidentes con los conceptos ordinarios, aunque intensionalmente muy distintos, como cuando definimos agua como H_2O. Un concepto clasificatorio se aplica a objetos singulares (y no a pares de objetos, como en el caso de los CONCEPTOS COMPARATIVOS). La pregunta de si el concepto clasificatorio S se aplica a un objeto x, si x es S, requiere una respuesta binaria, de sí o no; no hay lugar para el más o menos. Por ejemplo, un átomo determinado es carbono o no lo es, no hay una posibilidad intermedia; un mamífero determinado es macho o hembra, un número natural es primo o no lo es; no puede ser medio primo. Todos los números primos son igual de primos. Aquí no hay comparaciones.

El repertorio de conceptos clasificatorios de una lengua natural determinada suele estar limitado a los rasgos y objetos presentes y visibles en el entorno de los hablantes y relevantes para ellos. La ciencia tiene ambiciones cognitivas más amplias y requiere la introducción de nuevos conceptos clasificatorios. Así, la sistemática zoológica ha tenido que introducir más de trescientos mil conceptos clasificatorios específicos para poder hablar con precisión de los escarabajos (*Coleoptera*). En la ciencia los conceptos clasificatorios no suelen introducirse aisladamente, sino formando sistemas conceptuales llamados CLASIFICACIONES. Cuando disponemos de una clasificación de un domi-

nio determinado, podemos clasificar cada objeto de ese dominio, atribuyéndole un y solo un concepto clasificatorio (de esa clasificación).

concepto comparativo (A. *komparativer Begriff*, F. *concept comparative*, I. *comparative concept*). Algunas cuestiones exigen una respuesta binaria, de sí o no; otras se resisten a ese tipo de tratamiento. Si nos interesa la altura de las personas, podríamos calificarlas —con el lenguaje ordinario— en altas y bajas. Pero esa clasificación no nos lleva muy lejos. Ya el mismo lenguaje ordinario nos invita a ir más allá, estableciendo comparaciones de altura mediante el llamado grado comparativo de los adjetivos. Aunque Fulano y Mengano sean ambos altos, lo que nos interesa saber es si Fulano es más alto que Mengano o menos. El concepto de ser más alto es un concepto comparativo.

Introducir un concepto comparativo para una característica C que los individuos de un dominio A poseen en mayor o menor grado consiste en definir dos relaciones —una de coincidencia $\sim_C$ y otra de precedencia $\prec_C$— respecto a esa característica, es decir, en indicar cuándo dos objetos de ese dominio coinciden respecto a esa característica y cuándo uno precede al otro respecto a ella. Un concepto comparativo sirve así para establecer comparaciones en más y menos. La relación de coincidencia $\sim_C$ es una RELACIÓN DE EQUIVALENCIA. La relación de precedencia $\prec_C$ es una relación de orden débil, es decir, una relación asimétrica, transitiva y $\sim$-conectada. La relación de equivalencia corresponde a la coincidencia o indiferencia respecto a la propiedad de que se trate (altura, dureza...). La relación de orden débil corresponde a la precedencia o inferioridad (o superioridad, según los casos) respecto a esa propiedad. Se supone que las relaciones $\sim_C$ y $\prec_C$ son cualitativas y determinables de un modo empírico y operativo (aceptando a veces ciertas idealizaciones). Si el ámbito A está bien definido, y las relaciones $\sim_C$ y $\prec_C$ cumplen las condiciones indicadas, decimos que $\langle A, \sim_C, \prec_C \rangle$ constituye un sistema comparativo.

Un ejemplo clásico de concepto comparativo es el concepto de dureza usado en mineralogía. Este concepto sobre el dominio de los minerales se basa en el test del rayado. Dados dos minerales x y z, decimos que x es más duro que z si y solo si x raya a z pero z no raya a x. Y decimos que x coincide respecto a dureza con z si ocurre que ni x raya a z ni z raya a x (o x y z son el mismo mineral). La noción de coincidencia respecto a dureza es una relación de equivalencia por definición. Que la relación de mayor dureza sea un orden débil es una hipótesis empírica (por ahora bien confirmada) de la mineralogía. Otro ejemplo es el concepto comparativo de antigüedad entre fósiles que se encuentran en los estratos del mismo yacimiento. Dos fósiles coinciden respecto a antigüedad si se encuentran en el mismo estrato. Y decimos que el fósil x es más antiguo que z si x se encuentra en un estrato inferior a aquel en que se encuentra z.

A veces la definición de un concepto comparativo es un primer paso para la posterior introducción de un CONCEPTO MÉTRICO en ese dominio. Así, antes de introducir el concepto métrico de masa en la mecánica clásica, podemos definir un concepto comparativo de masa basado en la mera comparación del comportamiento de una balanza al colocar dos objetos en sendos platillos.

concepto disposicional (A. *Dispositionsbegriff*, F. *concept dispositionnel*, I. *dispositional concept*). Buena parte de los conceptos de la ciencia y del sentido común connotan disposiciones permanentes que se atribuyen a los objetos, independientemente de que se hagan efectivas. Por ejemplo, decimos que el carbón es *combustible* aunque permanezca sumergido para siempre bajo el océano, que una computadora tiene tantos *megabytes de memoria RAM* aunque nunca ocupe más de una cuarta parte de la misma, que el campo eléctrico en cierto punto del espacio tiene tal o cual *intensidad y dirección* aunque nunca haya habido una carga eléctrica en ese punto. Aunque entendemos y empleamos este género de conceptos sin tropiezo alguno desde la más tierna edad, el EMPIRISMO LÓGICO los consideró problemáticos porque no es posible definirlos mediante TÉRMINOS OBSERVACIONALES en un LENGUAJE EXTENSIONAL. Por ejemplo, si D simboliza un concepto disposicional, no es posible definir Dx como equivalente a $Px \Rightarrow Qx$, donde P y Q son predicados observacionales, por cuanto el condicional $Px \Rightarrow Qx$, entendido extensionalmente, es verdadero si Px es falso (de modo que, conforme a esta definición, cualquier objeto que no cumpla jamás la condición P poseería la disposición D). Por eso, para Carnap (1936/1937) el modo apropiado de introducir un predicado disposicional como nuestro D es mediante enunciados como el siguiente:

$$\forall x(Px \Rightarrow (Dx \Leftrightarrow Qx))$$

Si Dx, Px y Qx significan, respectivamente, 'x es soluble en agua', 'x está sumergido en agua' y 'x se disuelve', entonces el enunciado antedicho puede leerse así: 'Dado un objeto cualquiera x, si x está sumergido en agua, entonces x es soluble en agua si y solo si x se disuelve'. Este enunciado obviamente nada dice sobre la verdad de Dx en caso de que Px sea falso (↗CONDICIONAL CONTRAFÁCTICO).

concepto métrico (A. *metrischer Begriff*, F. *concept métrique*, I. *metric concept*). Plantear nuestros problemas empíricos como si fueran problemas matemáticos tiene grandes ventajas. La realidad que nos rodea es enormemente compleja y en gran parte resulta opaca a nuestra comprensión y manipulación intelectual. Sin embargo, el mundo ficticio de la matemática, que nosotros he-

mos creado, es mucho más transparente y mejor conocido. Además, la matemática nos proporciona un gran arsenal de técnicas y recursos conceptuales con los que analizar y resolver los problemas, a condición de que los planteemos en lenguaje matemático. Los conceptos métricos nos permiten llevar a cabo la traducción, pasando de las cualidades a las cantidades, de lo empírico a lo numérico, tendiendo así un puente entre el mundo real del laboratorio y el mundo ideal de las matemáticas y posibilitando la construcción de modelos matemáticos de la realidad.

Cuando ya disponemos de un concepto métrico para un ámbito determinado, y de lo que se trata es de averiguar cuál es el valor (el número) que (una escala de) ese concepto asigna a un objeto determinado del dominio, nos encontramos ante una tarea de medida. Cuando, por el contrario, carecemos de un concepto métrico para un ámbito que de momento solo nos es dado cualitativamente, y de lo que se trata es de introducir por primera vez un concepto métrico que lo cuantifique, nos encontramos ante un problema de metrización. Metrizar es introducir un concepto métrico donde no lo había. Es una tarea importante, pero que sólo en raras ocasiones es preciso llevar a cabo. Medir es hallar el valor que la función métrica asigna a un objeto. En todos los laboratorios del mundo se realizan constantemente medidas (a veces millones de medidas cada día). Es el trabajo cotidiano de la ciencia experimental.

En general, cuando introducimos un concepto métrico, lo definimos en función de otros conceptos métricos previamente introducidos. Así, por ejemplo, definimos la densidad d como la masa m partida por el volumen V, $d(x) = m(x)/V(x)$. Se trata de una metrización derivada. Pero no podemos introducir todos los conceptos métricos así, de un modo derivado. Algunos deberán ser definidos o introducidos de un modo directo, primitivo o fundamental (al menos al principio, aunque luego experimenten extensiones de su ámbito de aplicación en función de complejas interrelaciones teóricas).

Metrizar un ámbito cualitativo consiste en representarlo numéricamente. Esta representación numérica toma la forma de una escala. Una escala es un homomorfismo de un sistema cualitativo empírico en un sistema numérico. Un *concepto métrico* o magnitud es un conjunto de escalas del mismo tipo (transformables unas en otras mediante transformaciones permisibles) que representan el mismo sistema empírico en el mismo sistema matemático. Por ejemplo, el concepto métrico de longitud de la mecánica clásica es el conjunto de todas las escalas de longitud, transformables unas en otras mediante transformaciones similares. Aunque hay una gran diversidad de escalas definibles sobre sistemas empíricos, las más conocidas son las ESCALAS ORDINALES sobre sistemas comparativos, las ESCALAS PROPORCIONALES sobre sistemas extensivos y las ESCALAS DE INTERVALOS sobre sistemas de diferencias.

Un sistema cualitativo empírico es la base sobre la que establecer una escala, que no es sino un homomorfismo de ese sistema empírico en cierto sistema matemático. Ese homomorfismo es una función del dominio del sistema empírico en algún conjunto matemático (por ejemplo, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales) que preserva las relaciones del sistema empírico. Una escala asigna números (o vectores o tensores) a los elementos de un sistema empírico, de tal manera que esos números y sus interrelaciones matemáticas reflejen las interrelaciones empíricas entre los elementos del sistema empírico. El homomorfismo en que consiste la escala es como una traducción al lenguaje matemático del sistema empírico cualitativo inicial, que así queda cuantificado.

Una función h es una transformación (de cierto tipo) de otra función f, si h se obtiene a partir de f mediante una fórmula del tipo correspondiente. Dada una escala de cierto tipo, son transformaciones permisibles aquellas transformaciones que siempre convierten escalas de ese tipo en otras escalas de ese mismo tipo. Un tipo de escala puede caracterizarse como cierto grupo de transformaciones. Cualquier sistema comparativo permite definir escalas ordinales, que son unívocas hasta transformaciones monótonas crecientes. Todo sistema de diferencias permite definir escalas de intervalos, que son unívocas hasta transformaciones lineales positivas. Todo sistema extensivo permite definir escalas proporcionales, que son unívocas hasta transformaciones similares. Toda transformación similar es también una transformación lineal positiva, pero no a la inversa. Toda transformación lineal positiva es una transformación monótona creciente, pero no a la inversa.

Las escalas más informativas son las proporcionales. Todas las escalas proporcionales son automáticamente también escalas de intervalos y escalas ordinales. Las escalas de intervalos son menos informativas que las proporcionales, pero más que las meramente ordinales. Todas las escalas de intervalos son automáticamente también escalas ordinales. Las escalas meramente ordinales son las más pobres en información y apenas merecen ser consideradas como magnitudes, pues su rendimiento teórico no va más allá del de los meros conceptos comparativos.

condicional (A. *Konditionalsatz*, F. *conditionnel*, I. *conditional*). Un enunciado condicional tiene la forma 'si A entonces B', o 'A solo si B', u otra equivalente, como 'A es una condición suficiente de B' o bien 'B es una condición necesaria de A'. Esta conexión condicional se simboliza mediante el signo $\Rightarrow$, escribiendo $(A \Rightarrow B)$. A se llama el antecedente del condicional y B su consecuente. Supongamos que la fórmula α representa el enunciado A y la fórmula β representa B. El enunciado 'si A, entonces B' se simboliza en el lenguaje formal mediante el condicional $(\alpha \Rightarrow \beta)$.

Un enunciado condicional 'si *A*, entonces *B*' solo es falso si *A* es verdadero y *B* es falso. En cualquier otro caso, es verdadero. Por tanto, si el antecedente es falso, el condicional entero es verdadero, cualquiera que sea el consecuente. Por ejemplo, si alguien (que no es Napoleón) me dice que es Napoleón, le puedo replicar "si tú eres Napoleón, yo soy la reina de Saba" y ese condicional es verdad. Con la misma verdad podría replicar "si tú eres Napoleón, 6 es un número primo". Naturalmente, Napoleón no tiene nada que ver con los números primos y que tú seas Napoleón no implica para nada que 6 sea un número primo. Un condicional puede ser verdadero sin que su antecedente implique su consiguiente. Basta con que su antecedente sea falso o su consecuente verdadero. Solamente en el caso de que el condicional sea lógicamente válido podemos hablar de implicación del consecuente por el antecedente. Sin embargo, no hay que olvidar que la traducción del lenguaje ordinario al lenguaje formal de la lógica con frecuencia supone una regimentación que cercena o ignora algunas posibilidades expresivas del habla cotidiana; y esto es especialmente claro en el caso del condicional.

Algunos autores empeñados en llamar 'implicación material' al condicional llamaron "paradoja de la implicación material" al presunto hecho de que el antecedente de una implicación (aunque fuera "material") no implique su consiguiente. Pero la paradoja se desvanece en cuanto se usa una terminología adecuada, que evite la confusión entre condicional ($\Rightarrow$) e IMPLICACIÓN ($\models$). El condicional ($\alpha \Rightarrow \beta$) es verdadero (en una interpretación) si esa interpretación hace falsa a α o verdadera a β. Puede ser verdadero en unas interpretaciones y falso en otras. La fórmula α implica la fórmula β, es decir, $\alpha \models \beta$, si toda interpretación que hace verdadera a α hace también verdadera a β, o, equivalentemente, si $\models(\alpha \Rightarrow \beta)$, es decir, si el condicional es lógicamente válido. De todos modos, Lewis y Langford en 1932 y más recientemente Anderson y Belnap trataron de construir una lógica elemental alternativa basada en lo que ellos llamaban la "implicación estricta", es decir, en interpretar la constante lógica de condicional como designando la relación semántica de implicación.

condicional contrafáctico (A. *irrealer Konditionalsatz*, F. *énoncé conditionnel contraire aux faits*, I. *counterfactual conditional*). Desde Frege (1879) y Russell se considera que, si α y β representan dos enunciados cualesquiera *A* y *B*, el CONDICIONAL verifuncional $\alpha \Rightarrow \beta$, que, por definición, es siempre verdadero a menos que el antecedente α sea verdadero y el consecuente β falso, representa una formalización apropiada del aserto condicional ordinario 'si *A*, entonces *B*'. Basta, pues, con que el antecedente sea falso para que el condicional resulte verdadero. Es claro, por otra parte, que en el lenguaje or-

dinario hacemos frecuentemente aseveraciones condicionales cuya verdad no está garantizada simplemente porque el antecedente es falso. He aquí algunos ejemplos:

(1) Si la sal se hubiera arrojado al agua, se habría disuelto.
(2) Si el contenido de oxígeno en la atmósfera fuera el doble del actual, los bosques arderían espontáneamente.
(3) Si te hubieras muerto en ese choque, la vida ya no tendría ningún sentido para mí.

Normalmente, aceptaríamos el aserto (1) como verdadero; también el (2), si entendemos algo de química. En cambio, el (3) nos suena a falso, aunque seguramente será verdad en algunos casos, según quien hable y a quien le hable. En castellano, tales condicionales se distinguen habitualmente porque usan el imperfecto del subjuntivo en el antecedente y el potencial en el consecuente. Resulta apropiado por eso llamarlos en nuestra lengua *condicionales subjuntivos*. La designación *condicional contrafáctico* (esto es, *condicional contrario a los hechos*), habitual entre filósofos, está tomada directamente del inglés, donde la diferencia entre el subjuntivo y el indicativo no es obvia para todos. Con ella se intenta expresar que, no obstante ser contraria a los hechos la condición enunciada en el antecedente, el enunciado condicional así designado no es una trivialidad sin contenido informativo, sino que es portador de información. El uso de condicionales contrafácticos y la facilidad con que las personas pueden, frecuentemente, ponerse de acuerdo sobre su verdad o falsedad es un irritante para los filósofos empiristas, pues no tienen modo de indicar qué situaciones observables hacen verdadero o hacen falso un enunciado de este tipo. Se ha propuesto entenderlos como condicionales verifuncionales que, por ende, son trivialmente verdaderos, pero que además son útiles e informativos si cumplen algún requisito adicional. Filósofos como R. Chisholm, N. Goodman y N. Rescher han buscado precisar este requisito. Aunque no hay acuerdo sobre el tema, la tendencia general es a requerir que la conjunción del antecedente con ciertos enunciados implícitos —leyes de la naturaleza y circunstancias presentes— *implique* el consecuente. Este enfoque es fácilmente aplicable a los ejemplos (1) y (2), pero no logra dar cuenta del modo como normalmente se recibiría el ejemplo (3), esto es, ya sea como una verdad nada trivial sino muy importante y decisiva, ya sea como una mentira de mal gusto, pero en ningún caso como una verdad poco informativa o inútil. Otros han intentado hacer admisible la existencia de condicionales contrafácticos falsos, recurriendo a la idea de que hay MUNDOS POSIBLES, parecidos pero no idénticos al nuestro, en que se cumplen tanto el antecedente como el consecuente de los

condicionales contrafácticos verdaderos. Lamentablemente, si los condicionales contrafácticos se entienden de este modo, no será posible averiguar cuáles son verdaderos y cuáles no hasta que alguien descubra un medio de comunicación entre mundos diferentes.

conductismo (A. *Behaviorismus*, F. *behaviorisme*, I. *behaviorism*). Propuesta metodológica de J. B. Watson (1914) según la cual la psicología humana debe prescindir del estudio de los estados de conciencia, que propiamente solo son accesibles a la introspección del individuo que los vive, y limitarse a la observación e investigación experimental de la conducta humana. El *conductismo* así concebido asegura el carácter público del objeto de la psicología y hace posible el control intersubjetivo de los resultados de esta ciencia. Watson trataba de establecer una ciencia natural de la conducta que explicase el comportamiento observado del sujeto como consecuencia del aprendizaje, es decir, del efecto de las recompesas y castigos que el sujeto haya recibido del entorno hasta ese momento. Estas correlaciones no necesitarían tener en cuenta ningún tipo de factor interno, ni mental ni genético ni neurológico, sino que se basarían en la mera observación de las pautas con que cierto tipo de estímulos provocan cierto tipo de respuestas. Pavlov ya había estudiado el condicionamiento clásico, basado en los reflejos condicionados, que era el ejemplo paradigmático del método psicológico propugnado por Watson, correlacionando los estímulos con las respuestas directamente. Skinner continuó la labor de Pavlov y Watson y estudió otros tipos de condicionamiento, como el condicionamiento operante. Desde su cátedra en Harvard ejerció una inmensa influencia en la psicología de mediados del siglo XX.

El conductismo es una teoría de caja negra que trata de correlacionar los estímulos con las respuestas sin pasar por los mecanismos reales que expliquen la correlación. Una psicología más ambiciosa trataría de desarrollar explicaciones de caja traslúcida, basadas en los mecanismos subyacentes. En este sentido, la psicología conductista sería comparable a la termodinámica fenomenológica, que considera como primitivas magnitudes tales como la temperatura o la presión, mientras que la mecánica estadística nos proporciona una explicación más profunda, identificando la temperatura, por ejemplo, con la energía cinética media de las moléculas que componen el gas de que se trate. En cualquier caso, no andamos sobrados de fuentes de información que nos ayuden a entender nuestra conducta y no parece prudente descartar a priori ninguna de las disponibles, desde la introspección y el uso lingüístico hasta los progresos de la genética o la neurología.

conectado (A. *zusammenhängend*, F. *connexe*, I. *connected*). Un ESPACIO TOPOLÓGICO $\langle S,T\rangle$ es *conectado* si y solo si S no es la unión de dos conjuntos

cerrados DISJUNTOS no vacíos. Si $\langle S,T\rangle$ no es conectado, se dice que es *desconectado*. Si $\langle S,T\rangle$ es desconectado, cada $p \in S$ pertenece al *componente* $C(p)$ de S, que es la unión de todos los entornos conectados de p; evidentemente, la colección $\{C(p) : p \in S\}$ determina una PARTICIÓN de S.

$\langle S,T\rangle$ es *conectado por caminos* (I. *path-connected*) si para cada par de puntos p, $q \in S$ hay una función continua $f : [0,1] \to S$ tal que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$. Si bien todo espacio conectado por caminos es conectado, no todo espacio conectado es conectado por caminos.

conector (A. *Junktor*, F. *connecteur*, I. *connective*). Constante lógica del lenguaje formal que permite construir fórmulas compuestas a partir de otras más simples y simboliza una conexión lógica entre ellas o entre las proposiciones que representan. En la lógica clásica, que es la habitual y que es una lógica extensional, los conectores designan funciones veritativas. La mayoría de las funciones veritativas así simbolizadas son binarias, funciones de $\{0,1\}^2$ en $\{0,1\}$; por eso se dice que los correspondientes conectores conectan dos fórmulas o proposiciones, aunque también se llama conector, con cierto abuso del lenguaje, al negador, que designa una función unaria.

Los conectores habituales son los símbolos $\neg$ (no) de NEGACIÓN, $\wedge$ (y) de CONJUNCIÓN, $\vee$ (o) de DISYUNCIÓN, $\Rightarrow$ (si ..., entonces) de CONDICIONAL y $\Leftrightarrow$ (si y solo si) de BICONDICIONAL. El primer conector es unario, es decir, antepuesto a una fórmula α, forma una nueva fórmula $\neg\alpha$. Los otros conectores citados son binarios, es decir, si α y β son fórmulas, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ son también fórmulas. Cada conector representa una función veritativa. El negador representa la función veritativa unaria $\neg$: $\{0, 1\} \to \{0, 1\}$ tal que $\neg(0) = 1$ y $\neg(1) = 0$. Los otros conectores representan funciones veritativas binarias. Así $\wedge$: $\{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ tal que $(0\wedge 0) = (0\wedge 1) = (1\wedge 0) = 0$ y $(1\wedge 1) = 1$. Análogamente, $(0\vee 0) = 0$ y $(0\vee 1) = (1\vee 0) = (1\vee 1) = 1$; $(0 \Rightarrow 0) = (0 \Rightarrow 1) = (1 \Rightarrow 1) = 1$ y $(1 \Rightarrow 0) = 0$; $(0 \Leftrightarrow 0) = (1 \Leftrightarrow 1) = 1$ y $(0 \Leftrightarrow 1) = (1 \Leftrightarrow 0) = 0$.

Algunos conectores pueden definirse en función de otros, es decir, podemos expresar la misma función veritativa mediante una fórmula en que no aparece el conector definido. Por ejemplo, podemos definir $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ como $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$. A su vez, podemos definir $(\alpha \Rightarrow \beta)$ como $(\neg\alpha \vee \beta)$, y podemos definir $(\alpha \vee \beta)$ como $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, con lo cual hemos definido los cinco conectores a partir solo de $\neg$ y $\wedge$. También pueden introducirse otros conectores poco habituales, como el conector binario $|$ (ni, ni) de negación conjunta, introducido por Sheffer en 1913: $(0|0) = 1$; $(0|1) = (1|0) = (1|1) = 0$. En función de este único conector pueden definirse todos los conectores habituales. Por ejemplo, $\neg\varphi$ se define como $(\varphi|\varphi)$; $(\alpha \vee \beta)$ se define como $\neg(\alpha|\beta)$, es decir, como $((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta))$.

conexión de Levi-Civita (A. *Riemannsche Übertragung*, *Riemannscher Zusammenhang*, F. *connexion de Levi-Civita*, I. *Levi-Civita connexion*). Sea g una MÉTRICA RIEMANNIANA sobre la variedad diferenciable $\mathcal{M}$. Levi-Civita demostró que la VARIEDAD RIEMANNIANA $\langle \mathcal{M},g\rangle$ admite una y solo una CONEXIÓN LINEAL ∇ (sin torsión) tal que $\nabla g = 0$. Esta es la *conexión de Levi-Civita* correspondiente a la métrica g. Una curva γ es una GEODÉSICA (en sentido métrico) de g si y solo si es una geodésica de la conexión ∇. El teorema descubierto por Levi-Civita vale también si g es una MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA, lo cual permite extender el concepto de geodésica a las variedades semi-riemannianas (vgr. los universos concebidos según la teoría general de la RELATIVIDAD).

conexión lineal (A. *affine Übertragung*, *affiner Zusammenhang*, F. *connexion linéaire*, I. *linear connexion*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE n-dimensional. Mediante un campo de n-ADAS sobre $\mathcal{M}$ se establece una relación de *paralelismo*, reflexiva, simétrica y transitiva (una EQUIVALENCIA) entre vectores tangentes a $\mathcal{M}$ en distintos puntos. Pero no toda variedad diferenciable admite un campo de n-adas. En cambio, siempre es posible enriquecer la estructura de $\mathcal{M}$ con un recurso, llamado *conexión lineal*, que determina una relación de paralelismo, relativa a cada curva en $\mathcal{M}$, entre vectores tangentes a $\mathcal{M}$ en puntos unidos por esa curva. Hay varios conceptos extensionalmente equivalentes de conexión lineal. El más difundido, debido a Koszul, es quizás el más fácil de definir.

Si X es un CAMPO vectorial sobre un abierto de la variedad $\mathcal{M}$, designaremos con Ω_X el dominio de X.

Decimos que ∇ es una *conexión lineal* (de Koszul) sobre $\mathcal{M}$ si ∇ asigna a cada par $\langle X,Y\rangle$ de campos vectoriales en $\mathcal{M}$ un campo vectorial $\nabla_X Y$ definido en $\Omega_X \cap \Omega_Y$, que satisface las ecuaciones siguientes, para cualesquiera campos vectoriales X, Y, Z y W y cualquier campo escalar f (campos *en* $\mathcal{M}$), dondequiera que estén simultáneamente definidas las expresiones a ambos lados de una misma ecuación:

$$\nabla_X(Z + W) = \nabla_X Z + \nabla_X W$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \qquad (1)$$

$$\nabla_{fX} Z = f\nabla_X Z$$

$$\nabla_X fZ = (Xf)Z + f\nabla_X Z$$

El campo vectorial $\nabla_X Y$ es la DERIVADA COVARIANTE *de Y en la dirección de X*.

Sea x una carta de $\mathcal{M}$ definida en un abierto U_x. Designaremos con $\nabla^k Y$ a la derivada covariante de Y en la dirección del campo vectorial $\partial/\partial x^k$. $\nabla_X Y$ puede entonces expresarse en $U_x \cap \Omega_X \cap \Omega_Y$ como una combinación lineal de los campos vectoriales $\partial/\partial x^1,\ldots, \partial/\partial x^n$. En particular,

$$\nabla^k \frac{\partial}{\partial x^h} = \Gamma^i_{kh} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2}$$

(donde utilizamos la CONVENCIÓN DE EINSTEIN). Los campos escalares Γ^i_{kh} $(1 \leq i,k,h \leq n)$ son los *componentes* de la conexión lineal ∇ relativos a la carta x. Evidentemente, en U_x la conexión lineal ∇ está completamente determinada por ellos.

La conexión lineal ∇ sobre la variedad n-dimensional $\mathcal{M}$ permite definir una relación de paralelismo entre vectores tangentes a $\mathcal{M}$ en distintos puntos de cualquier CURVA γ en $\mathcal{M}$. Considérese una curva $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathcal{M}$, donde $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Llamaremos "campo vectorial sobre γ" a un campo vectorial definido en un abierto de $\mathcal{M}$ que contiene todos los puntos por los que pasa γ. Hay innumerables campos vectoriales X sobre γ tales que X_p es igual a la tangente $\dot{\gamma}_p$ en cada punto p por el que pasa γ (↗ESPACIO TANGENTE). Sea $\dot{\gamma}$ uno cualquiera de ellos. Un campo vectorial V se dice *paralelo a lo largo de* γ (o *paralelo en la dirección de* $\dot{\gamma}$) si $\nabla_{\dot{\gamma}} V = 0$ en cada punto p del camino de γ donde V esté definido; en otras palabras: V es paralelo a lo largo de γ si y solo si la derivada covariante de V en la dirección de $\dot{\gamma}$ es idéntica a 0 en todo el recorrido de γ. La curva γ es una GEODÉSICA si y solo si $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ —esto es, si $\dot{\gamma}$ es paralelo en la dirección de sí mismo— en todo el recorrido de γ.

Expresemos estas definiciones en términos de componentes. Sea x una carta definida en un abierto $U_x \subseteq \mathcal{M}$ que incluye el recorrido completo de la curva $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathcal{M}$. (Si no existe una carta tal, se puede siempre dividir el recorrido de γ en partes cada una de las cuales está incluida enteramente en el dominio de una carta.) Sea V un campo vectorial sobre γ. Escribimos V^k por Vx^k. El campo escalar V^k, definido en la intersección de U_x y el dominio de V, es el k-ésimo componente de V relativo a la carta x. Las FUNCIONES COMPUESTAS $v^k = V^k \circ \gamma$ $(1 \leq k \leq n)$ son funciones lisas con valores en $\mathbb{R}$, definidas en el intervalo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. V es paralelo a lo largo de γ si y solo si la funciones v^k son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}u} + v^i \frac{\mathrm{d}(x^j \circ \gamma)}{\mathrm{d}u}\left(\Gamma^k_{ji} \circ \gamma\right) = 0 \tag{3}$$

donde u es el parámetro de la curva γ, y los Γ^k_{ji} son los componentes de ∇ relativos a x definidos en la ecuación (2). Ello implica a su vez que γ es una geodésica si y solo si

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{du^2} + \frac{d(x^j \circ \gamma)}{du}\frac{d(x^i \circ \gamma)}{du}\left(\Gamma^k_{ji} \circ \gamma\right) = 0 \qquad (4)$$

La conexión lineal ∇ sobre la variedad $\mathcal{M}$ dícese "sin torsión" (I. *torsion-free*) si cumple la condición siguiente: para cualesquiera campos de vectores V y W y cualquier campo escalar f,

$$(\nabla_V W - \nabla_W V)f = V(Wf) - W(Vf)$$

dondequiera que esta expresión esté definida. En tal caso, los componentes Γ^i_{kh} de ∇ relativos a una carta de $\mathcal{M}$ son siempre simétricos con respecto a sus dos índices inferiores: $\Gamma^i_{kh} = \Gamma^i_{hk}$. Combinando este hecho con las ecuaciones (4), es claro que una conexión lineal sin torsión está completamente determinada por sus geodésicas.

confirmación (A. *Bewährung*, F. *confirmation*, I. *confirmation*). En el lenguaje corriente se dice que un dato de la experiencia *confirma* una hipótesis cuando la respalda, reforzando su poder de convicción, aunque no baste para asegurar la verdad de la misma. Esto ocurre, por ejemplo, si el dato parece imposible de entender bajo cualquier otra suposición o si lisa y llanamente contradice las hipótesis alternativas que se ofrecen. A tono con este uso habitual, Carnap llamó *confirmación* a la relación entre enunciados descrita a continuación. Sean H y E dos enunciados; diremos que E confirma a H si la PROBABILIDAD CONDICIONAL de H, dada la verdad de E, es mayor que la probabilidad de H, sin este dato. En otras palabras, E *confirma* a H si y solo si $p(H \mid E) = \dfrac{p(H \wedge E)}{p(E)} \geq p(H)$ (donde la PROBABILIDAD $p(A)$ de un enunciado A se asimila a la credibilidad de A, y $p(E)$ es la probabilidad *previa* de E, esto es, la credibilidad que reviste independientemente del dato que la certifica). Obsérvese que según esta fórmula, E confirma óptimamente a H si $p(E)$, aunque positiva, es casi igual a 0, mientras que $p(H \wedge E)$ es igual o casi igual a 1; esto es, si E enuncia un hecho inverosímil, aunque no imposible, que, sin embargo, no podría o casi no podría faltar, si H fuera verdad.

congruencia de curvas (A. *Kurvenkongruenz*, F. *congruence de courbes*, I. *congruence of curves*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE. Una familia $\mathcal{C}$

de CURVAS en $\mathcal{M}$ es una *congruencia de curvas en* $\mathcal{M}$ si cada punto de $\mathcal{M}$ está situado en el camino de una y solo una curva de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{M}$ tiene n dimensiones, una congruencia de curvas en $\mathcal{M}$ es una FOLIACIÓN de $\mathcal{M}$ con codimensión $n - 1$.

conjunción (A. *Konjunktion*, F. *conjonction*, I. *conjunction*). En el lenguaje ordinario podemos mostrarnos nuestro acuerdo con dos enunciados afirmando su conjunción. La conjunción de dos enunciados *A* y *B* es un nuevo enunciado '*A* y *B*'. *A* y *B* son los miembros de la conjunción. La conjunción '*A* y *B*' es verdadera si tanto *A* como *B* son verdaderos; en cualquier otro caso es falsa. En el lenguaje formal de la lógica el papel de la partícula conjuntiva 'y' lo desempeña el conector binario '$\wedge$', que, colocado entre dos fórmulas α y β, forma una nueva fórmula $(\alpha \wedge \beta)$, llamada la *conjunción* de α y β. El conector $\wedge$ se llama el *conjuntor*. Supongamos que la fórmula α traduce el enunciado *A* y la fórmula β traduce *B*. El enunciado '*A* y *B*' se simboliza en el lenguaje formal mediante la conjunción $(\alpha \wedge \beta)$. En el lenguaje formal, una interpretación $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface α y $\mathfrak{I}$ satisface β. Esto puede expresarse también diciendo que el conector $\wedge$ representa la función veritativa binaria $\wedge$: $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $(0\wedge0) = (0\wedge1) = (1\wedge0) = 0$ y $(1\wedge1) = 1$, donde 1 es la verdad y 0 la falsedad.

conjunto (A. *Menge*, F. *ensemble*, I. *set*). Llámase *conjunto* a una colección de objetos determinados de cualquier índole. Cuando se considera un conjunto como tal solo se tiene en cuenta que cada elemento posee una identidad propia que lo distingue de todos los demás, pero no se presta ninguna atención a sus propiedades ni a sus relaciones con otros elementos. Sin embargo, no toda *multitud* de objetos forma una colección o *conjunto*. Por ejemplo, la idea misma de un conjunto de todos los conjuntos es contradictoria. Las teorías axiomáticas de conjuntos formuladas por Zermelo (1908) y otros autores postulan la existencia de ciertos conjuntos cuando ciertos otros conjuntos están dados, y también la existencia incondicional de por lo menos un conjunto con infinitos elementos. Esas teorías, hasta la fecha, nunca han generado una contradicción. Por otra parte, no puede ocultársenos que sus postulados de existencia no responden a una experiencia o intuición de lo que efectivamente existe, sino más bien a las exigencias —y conveniencias— del pensamiento matemático. (↗ TEORÍA DE CONJUNTOS.)

Si el objeto *a* es un elemento del conjunto *A*, decimos que *A contiene* a *a* y que *a pertenece* a *A* (abreviado: $a \in A$). Un conjunto puede describirse mediante una lista —por ejemplo, $\{1,5,9\}$ es el conjunto cuyos elementos son los números uno, cinco y nueve— o mediante una condición —por ejemplo, $\{x: x$ es un número entero y $x^2 < 20\}$ es el conjunto de todos los objetos *x*

que cumplen la condición indicada, o sea, el conjunto {0,1,–1,2,–2,3,–3,4,–4}. Se acepta convencionalmente que cada objeto *u* forma un conjunto {*u*} cuyo único elemento es *u* y que existe el "conjunto vacío" $\varnothing = \{x: x \neq x\}$. Si todos los elementos de un conjunto *A* son a la vez elementos de un conjunto *B*, decimos que *B incluye* a *A* y que *A* es una *parte* o *subconjunto* de *B* (abreviado: $A \subseteq B$). Nótese que según esta definición, cualquiera que sea el conjunto *A*, tenemos que $\varnothing \subseteq A \subseteq A$. Reconociendo que *A* es una parte de *A* solo en una acepción impropia de 'parte', decimos que *A* es una *parte propia* de *B* si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. (↗ TEORÍA DE CONJUNTOS.)

conjunto borroso (A. *mehrwertige Menge*, F. *ensemble flou*, I. *fuzzy set*). Los conjuntos de los que trata la TEORÍA DE CONJUNTOS son entidades extensionales, exactamente definidas, con bordes precisos. Dado un conjunto *M* y un objeto *b* del que nos preguntemos si pertenece a *M*, solo pueden ocurrir dos cosas: que *b* sea elemento de *M*, $b \in M$, o que *b* no sea elemento de *M*, $b \notin M$. Este carácter binario y preciso no corresponde al uso de muchas palabras del lenguaje ordinario, como 'alto', 'pobre', 'poco', 'lejos' o 'atmósfera'. Así, el adjetivo 'alto' se aplica con decisión a los hombres de estatura sobresaliente y se niega de los hombres extremadamente bajos. Pero muchos no son tan altos ni tan bajos y respecto a ellos la aplicación de 'alto' es bastante imprecisa y en cualquier caso dependiente del hablante y del contexto. En el análisis lógico habitual, al pasar del lenguaje cotidiano al lenguaje científico, uno abandona estas nociones vagas y las reemplaza por otras precisas, como la función métrica de altura, o simplemente por una regimentación convencional ("consideremos como altos a los hombres cuya altura sobrepase los 175 cm", por ejemplo).

En 1965 Zadeh propuso otro camino: aceptar la imprecisión y vaguedad inherente a estas expresiones del lenguaje ordinario y desarrollar una lógica y una teoría de conjuntos adaptadas a esa vaguedad. Para cada noción imprecisa postularíamos la existencia de un "conjunto", pero sería un conjunto sin bordes precisos, un conjunto con límites vagos, un *conjunto borroso* o *difuso*. Los elementos de tal conjunto le pertenecen más o menos, le pertenecen en cierto grado. Simbolicemos mediante $\pi_M(x)$ el *grado de pertenencia* de *x* al conjunto difuso *M*. Por ejemplo, si *b* es un hombre de gran estatura, diremos que *b* pertenece al conjunto *A* de los hombres altos en grado 1, $\pi_A(b) = 1$. Si *b* es un hombre que llama la atención por su escasa estatura, diremos que *b* pertenece a *A* en grado 0, $\pi_A(b) = 0$. Respecto a los hombres *x* de tamaño medio, diremos que son más o menos altos, es decir que pertenecen a *A* en algún grado intermedio entre 0 y 1, $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$, respetando siempre los juicios comparativos que hagamos (si *b* nos parece algo más alto que *c*, entonces *b* pertenece a *A* en un grado superior al de *c*).

Para los conjuntos borrosos o difusos no valen las definiciones y axiomas habituales de la teoría de conjuntos, pero se pueden definir nociones *ad hoc* parecidas. Por ejemplo, si A y B son conjuntos borrosos, su unión e intersección difusas se pueden definir del siguiente modo: $\pi_{A\cup B}(x) = \max(\pi_A(x), \pi_B(x))$; $\pi_{A\cap B}(x) = \min(\pi_A(x), \pi_B(x))$. La lógica subyacente a la teoría de conjuntos borrosos es una cierta lógica multivalente. Aunque la teoría de conjuntos borrosos no ha tenido aplicaciones en el campo de la matemática pura, sí las ha encontrado en algunas ramas de la lingüística y en ciertos sistemas tecnológicos.

conjunto constructible (A. *konstruktible Menge*, F. *ensemble constructible*, I. *constructible set*). Recordemos la definición de la jerarquía acumulativa por recursión transfinita:

$$V(0) = \varnothing$$
$$V(\alpha+1) = \wp V(\alpha)$$
$$V(\lambda) = \sup\{V(\beta): \beta < \lambda\} = \bigcup_{\beta<\lambda} V(\beta)$$

La segunda línea de la definición nos indica que el escalón $V(\alpha+1)$ se obtiene aplicando la operación $\wp$ de CONJUNTO POTENCIA a $V(\alpha)$. Mientras α, y consiguientemente $V(\alpha)$, es finito, entendemos bien lo que es el conjunto potencia de $V(\alpha)$. Sin embargo, aunque disponemos de la definición abstracta, no tenemos ninguna idea clara acerca de lo que sea un subconjunto arbitrario de un conjunto infinito ni de lo que sea el conjunto potencia de un conjunto infinito. Si bien no podemos describir lo que es un subconjunto arbitrario de un conjunto infinito A, sí que podemos describir lo que es un subconjunto definible de A. Z es un subconjunto definible de A si y solo si existe una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje formal de primer orden de la teoría de conjuntos con parámetros para los elementos de A que queramos tal que $Z = \{x \in A : \varphi(x)\}$. Llamemos $\mathrm{Df}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A definibles en A. Naturalmente, $\mathrm{Df}(A) \subseteq \wp A$, pero no siempre a la inversa. La operación Df parece más perspicua y comprensible que $\wp$. Si, en la definición de la jerarquía acumulativa, reemplazamos $\wp$ por Df, obtenemos la definición de los conjuntos constructibles:

$$L(0) = \varnothing$$
$$L(\alpha+1) = \mathrm{Df}(L(\alpha))$$
$$L(\lambda) = \sup\{L(\beta): \beta < \lambda\} = \bigcup_{\beta<\lambda} L(\beta)$$

La gran unión de todos estos escalones, $L = \bigcup_{\alpha\in\Omega} L(\alpha)$, constituye la clase de todos los conjuntos constructibles. Los conjuntos constructibles fueron intro-

ducidos por Gödel en 1938 para probar la consistencia relativa del AXIOMA DE ELECCIÓN y la HIPÓTESIS DEL CONTINUO. En efecto, la clase L, junto con la relación de pertenencia restringida a L, satisface todos los axiomas habituales de la teoría de conjuntos (sin axioma de elección), es una realización o modelo interno de la teoría de conjuntos. En esta realización se cumple el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Por tanto, si el resto de la teoría de conjuntos es consistente, lo sigue siendo al añadirle esos dos principios. La afirmación de que todos los conjuntos son constructibles, es decir, que $V = L$, constituye el AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD.

conjunto potencia (A. *Potenzmenge*, F. *ensemble des parties d'un ensemble*, I. *power set*). El conjunto potencia de un CONJUNTO A es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Simbólicamente: $\wp A = \{X : X \subseteq A\}$. La teoría de conjuntos postula que, si existe un conjunto A, también existe el respectivo conjunto potencia $\wp A$ (*axioma del conjunto potencia*). Escribimos $\wp^2 A$ por $\wp\wp A$, el conjunto potencia de $\wp A$; y, en general, $\wp^{n+1} A$ por $\wp\wp^n A$.

Cantor demostró el siguiente teorema: si A es un conjunto cualquiera, y $f : A \rightarrow \wp A$ es una FUNCIÓN inyectiva, siempre hay por lo menos un elemento de $\wp A$ que no está contenido en el recorrido de f. En este sentido preciso, se dice que A es menos numeroso que $\wp A$, o que la cardinalidad de A es menor que la de $\wp A$ (↗TEOREMA DE CANTOR).

conjunto recursivamente enumerable (A. *rekursiv aufzählbare Menge*, F. *ensemble récursivement énumérable*, I. *recursively enumerable set*). Un conjunto A es recursivamente enumerable si y solo si es el recorrido de una FUNCIÓN RECURSIVA, es decir, si y solo si hay una función recursiva f: $\mathbb{N} \rightarrow A$, tal que $f[\mathbb{N}] = A$. Al recorrer el conjunto A, f lo enumera: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$,... (ignorando las posibles repeticiones). Convencionalmente se considera que también el conjunto vacío $\varnothing$ es recursivamente enumerable. No hay que confundir la noción computacional de enumerabilidad recursiva con la noción conjuntista de numerabilidad, que se refiere a una CARDINALIDAD. Un conjunto es numerable si es finito o biyectable con $\mathbb{N}$, es decir, si tiene cardinalidad menor o igual a $\aleph_0$. Desde luego, si un conjunto es recursivamente enumerable, *a fortiori* es numerable, pero la inversa no vale en general.

conjunto recursivo (A. *rekursive Menge*, F. *ensemble récursive*, I. *recursive set*). Un conjunto A es recursivo si y solo si su FUNCIÓN CARACTERÍSTICA es una FUNCIÓN RECURSIVA. Un conjunto recursivo es siempre DECIDIBLE. Para decidir si $z \in A$ o no, basta calcular la función característica de este conjunto para el argumento z: $\chi_A(z)$. Si $\chi_A(z) = 1$, $z \in A$; si $\chi_A(z) = 0$, $z \notin A$.

conjuntos proyectivos (A. *projektive Menge*, F. *ensembles projectifs*, I. *projective sets*). La noción de conjuntos proyectivos es una extensión natural de la noción de conjuntos de Borel. Los *conjuntos de Borel* son (para cada *n*) los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ obtenidos a partir de intervalos abiertos de $\mathbb{R}^n$ mediante las operaciones de complemento y de intersección numerable (es decir, la intersección normal, iterada una cantidad numerable de veces). Los *conjuntos proyectivos* son los conjuntos de números reales definibles en un lenguaje de primer orden con parámetros para números reales y cuyas variables cuantificadas varíen sobre los números reales y cuyas relaciones primitivas sean relaciones de Borel. Dentro de la clase de los conjuntos proyectivos, podemos establecer una jerarquía según el número de cuantificadores que se necesiten para su definición, donde $\sum_0^1$ consta de los conjuntos de Borel, $\prod_n^1$ consta de los complementos de $\sum_n^1$ y $\sum_{n+1}^1$ consta de las imágenes continuas de los $\prod_n^1$. Para pasar de $\sum_n^1$ a $\sum_{n+1}^1$, necesitamos añadir un cuantificador existencial más a la definición de cada conjunto. Precisamente el signo $\sum$ fue sugerido por Peirce para el cuantificador existencial y como tal se emplea en la NOTACIÓN POLACA. La clase de los conjuntos proyectivos $\sum_\omega^1$ coincide con la unión de todos los niveles de la jerarquía proyectiva, $\sum_\omega^1 = \bigcup_{n \in \omega} \sum_n^1$.

consecuencia (A. *Folgerung*, F. *conséquence*, I. *consequence*). Una fórmula β es una *consecuencia* de una fórmula α si y solo si cada interpretación que satisface α satisface también β. Dicho de otra manera, que β sea una consecuencia de α significa que no hay manera de interpretar los signos de α y β de tal modo que α resulte verdadera y β falsa. Una fórmula β es una *consecuencia* de un conjunto Γ de fórmulas si y solo si cada interpretación que satisface o verifica a Γ (es decir, a cada una de las fórmulas de Γ) satisface también o hace verdadera a β. La relación de consecuencia entre fórmulas, o entre conjuntos de fórmulas y fórmulas sueltas, se simboliza mediante el signo '⊨' del metalenguaje lógico. Sea $\Im$ una variable del metalenguaje para referirnos indistintamente a interpretaciones cualesquiera del lenguaje formal.

α ⊨ β si y solo si para cada $\Im$: si $\Im$ satisface α, entonces $\Im$ satisface β.

Γ ⊨ β si y solo si para cada $\Im$: si $\Im$ satisface cada α ∈ Γ, entonces $\Im$ satisface β.

Si β es una consecuencia de α, entonces no hay ninguna interpretación posible del lenguaje formal que satisfaga α, pero no β, es decir, el conjunto {α} ∪ {¬β} es insatisfacible. Si la fórmula β es una consecuencia del conjunto Γ de fórmulas, entonces no hay ninguna interpretación posible del len-

guaje formal que satisfaga todas las fórmulas $\alpha \in \Gamma$, pero no β, es decir, el conjunto $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible. Por tanto, la consecuencia puede definirse en función de la satisfacibilidad.

$\alpha \models \beta$ si y solo si $\{\alpha\} \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible.
$\Gamma \models \beta$ si y solo si $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible.

La relación de consecuencia entre fórmulas es la relación semántica fundamental que caracteriza una lógica determinada. Cada nivel de la lógica clásica (la lógica proposicional, la lógica de primer orden, la lógica de segundo orden,...), así como cada lógica no clásica, tiene su propio lenguaje formal y su propia relación de consecuencia, que la caracteriza. La relación de consecuencia de la lógica proposicional es decidible (mediante un procedimiento algorítmico de decisión como las tablas de verdad) y generable o enumerable (mediante un cálculo deductivo completo). La relación de consecuencia de la lógica de primer orden es enumerable (mediante un cálculo deductivo completo), pero no es decidible. La relación de consecuencia de la lógica de segundo orden no es decidible ni enumerable.

La relación inversa a la de consecuencia es la de IMPLICACIÓN lógica: α implica β si y solo si β es una consecuencia de α. Por ello, la expresión metalingüística '$\Gamma \models \beta$' puede leerse tanto 'β es una consecuencia de Γ' como 'Γ implica β'.

consecuente (A. *Konsequens*, F. *conséquent*, I. *consequent*). La cláusula condicionada de una proposición CONDICIONAL es el consecuente del condicional. En 'si *P*, entonces *Q*', *P* es el antecedente, y *Q*, el consecuente. El consecuente de un condicional es condición necesaria de su antecedente.

consistencia (A. *Widerspruchsfreiheit*, F. *cohérence*, I. *consistency*). Propiedad que puede tener un enunciado, discurso o teoría de no implicar CONTRADICCIÓN alguna. Un enunciado consistente podría ser verdadero o falso, según los casos, y hay que seguir investigando para averiguar su valor de verdad. Una TEORÍA CONSISTENTE implica solo ciertas cosas y no otras, por lo que sus predicciones pueden ser puestas a prueba y contrastadas con los hechos. La consistencia es la mínima virtud epistémica de un discurso o de una teoría. Aunque no garantiza la verdad ni la aplicabilidad, tampoco las excluye a priori, como ocurre si la teoría es inconsistente.

constante cosmológica (A. *kosmologische Konstante*, F. *constante cosmologique*, I. *cosmological constant*). La versión inicial de las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN puede expresarse así:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \qquad (1)$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci (↗ CURVATURA), R es el escalar de curvatura, g_{ab} es la MÉTRICA, T_{ab} es el TENSOR DE ENERGÍA, G es la CONSTANTE GRAVITACIONAL, c es la VELOCIDAD DE LA LUZ. Cuando en 1917 Einstein se dio cuenta de que esta ecuación conducía a un universo dinámico, en expansión o contracción, la modificó mediante la introducción de un "término cosmológico", formado por la CONSTANTE COSMOLÓGICA Λ multiplicada por la métrica: Λg_{ab}. La nueva ecuación de Einstein sería:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \qquad (2)$$

El término cosmológico así incorporado tendría (en la intención de Einstein) la función de contrarrestar la atracción gravitatoria mediante una fuerza repulsiva que la neutralizase y permitiese mantener el Universo estático. En efecto, el término cosmológico (con $\Lambda > 0$) correspondería a una forma desconocida de energía homogéneamente distribuida en todo el espacio con densidad de energía positiva, pero presión negativa. Esa presión negativa se manifestaría como repulsión proporcional a la distancia. Si, por el contrario, $\Lambda < 0$ (lo que no parece ser el caso), Λ actuaría como una tensión cósmica atractiva extra, que se superpondría y añadiría a la atracción gravitatoria.

Una vez descubierta la expansión del Universo por Hubble en 1929, Einstein retiró la constante cosmológica de su ecuación, considerando su introducción como "la mayor metedura de pata de mi vida".

Aunque dada por muerta por su padre, la constante cosmológica ha sido resucitada repetidamente por los cosmólogos para tratar de resolver diversos tipos de situaciones incómodas y problemas intratables. Así en los años cuarenta y cincuenta, y de nuevo en los noventa, la constante cosmológica fue introducida como panacea para solucionar el "problema de la edad", es decir, el hecho de que en el modelo estándar FRW del *Big Bang* se calculaba para el Universo una edad menor que la edad estimada de los cúmulos globulares de nuestra galaxia. La introducción de la constante cosmológica tenía el efecto de alargar la vida del Universo considerablemente, solucionando así el problema. En los años ochenta y noventa el modelo inflacionario en boga postulaba un universo plano, con parámetro de densidad $\Omega = 1$. Sin embargo, todas las medidas observacionales de la cantidad total de materia conducían a una densidad mucho menor, de aproximadamente $\Omega_M = 0{,}3$. El 0,7 de densidad que falta para hacer al Universo plano se obtiene precisamente mediante la introducción de una constante cosmológica con la densidad deseada, $\Omega_\Lambda =$

0,7, con lo que $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. En 1998 dos equipos de astrónomos anunciaron nuevas mediciones de las distancias a supernovas del tipo I*a*, que apuntaban a una aceleración (no deceleración, como hasta entonces se pensaba) de la expansión del Universo. ¿Cómo explicar esa aceleración? Reintroduciendo la constante cosmológica positiva.

¿Hay algo en la realidad física que corresponda a la constante cosmológica? En 1968 Zeldovich propuso pasar el término cosmológico al lado derecho de la ecuación de Einstein, de tal modo que aparezca como un sumando más del TENSOR DE ENERGÍA, asociado no con la materia, sino con el espacio vacío:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{ab} - \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{ab})$$

donde $\frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{ab}$ puede ser interpretado como la energía del vacío postulada por la teoría cuántica de campos. Sin embargo, cuando se hicieron las estimaciones cuánticas del valor de la energía del vacío, estas arrojaban un valor que superaba los límites superiores impuestos por la observación astronómica en al menos 120 órdenes de magnitud. De hecho todavía no sabemos si hay algo en la realidad que corresponda a la constante cosmológica y, si lo hay, tampoco sabemos si es la energía del vacío o no.

De todos modos, la introducción de la constante cosmológica en la ecuación original de Einstein no es un añadido arbitrario, sino que es una generalización natural de la primera versión de las ecuaciones, en el sentido de que las ecuaciones (2) constituyen el sistema más general que satisface los requisitos que Einstein se había prescrito para la solución de su problema. En efecto, se puede probar lo siguiente: en cualquier variedad 4-dimensional con MÉTRICA LORENTZIANA, el campo tensorial modificado de Einstein con constante cosmológica

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab}$$

es el campo tensorial más general que satisface estas cuatro condiciones: (1) está construido exclusivamente a partir de la curvatura de Riemann y de la métrica, por lo que puede decirse que representa la geometría del espaciotiempo; (2) es un campo tensorial simétrico; (3) depende exclusivamente de la métrica y sus derivadas primeras y segundas, por lo que su ecuación coincide con la de Poisson en la aproximación del campo débil; y (4) su divergencia covariante es igual a 0, tal como tiene que serlo —con arreglo a la

conservación de la energía— la divergencia covariante del lado derecho de la ecuación (2): $\nabla^a T_{ab} = 0$.

Desde 1998 algunos teóricos han tratado de explicar la aceleración de la expansión cósmica inferida de las nuevas medidas de distancias a supernovas lejanas mediante la hipótesis de una "constante" cosmológica variable en función del tiempo. Esta magnitud no tendría ninguna de las ventajas recién enumeradas de la constante cosmológica de Einstein. De hecho, correspondería a un hipotético campo escalar dinámico, al que los teóricos más cuidadosos llaman "quintaesencia" (como P. Steinhardt) o "energía oscura" (como M. Turner). De todos modos, no entendemos bien a qué se refieren estas palabras y ni siquiera sabemos si se refieren a algo.

constante de Boltzmann (A. *Boltzmann-Konstante*, F. *constante de Boltzmann*, I. *Boltzmann's constant*). Constante de la naturaleza, designada comúnmente con k (o k_B), que figura en varias relaciones físicas importantes. Por ejemplo, en la ecuación del GAS IDEAL, $pV = RTn$ (donde p es la presión del gas, V el volumen, T la temperatura expresada en kelvin y n el número de moles de gas), la constante de proporcionalidad R es igual a k veces el NÚMERO DE AVOGADRO N_A. Como N_A es el número de moléculas en un mol, la ecuación del gas ideal puede reescribirse así:

$$pV = kNT$$

donde $N = nN_A$ es el número total de moléculas (↗LEY DE PLANCK).

Boltzmann (1877) introdujo la constante k como factor de proporcionalidad entre la ENTROPÍA S de un macroestado (estado termodinámico observable) y el logaritmo natural de la probabilidad W del mismo (que él hacía depender del número de microestados —esto es, arreglos moleculares— compatibles con ese macroestado):

$$S = -k \log W$$

En la moderna física estadística, se define la entropía σ de un sistema como el logaritmo natural de la "multiplicidad" o "peso estadístico" g del mismo. $\sigma = \log g$ es un número puro. Poniendo $W = g^{-1}$, resulta que la entropía clásica $S = k\sigma$. Dentro de este mismo orden de ideas, se define una temperatura τ, medida en unidades de energía, como el valor recíproco de la derivada parcial de σ con respecto a la energía U:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\partial \sigma}{\partial U}$$

Como la temperatura absoluta T, medida en kelvin, es igual al valor recíproco de $\partial S/\partial U$, resulta que $\tau = kT$. En otras palabras, la constante k es el factor de proporcionalidad entre la temperatura medida en joules, y su equivalente en kelvin. La constante de Boltzmann es aproximadamente igual a $1{,}380\ 6503(24) \times 10^{-23}$ J K^{-1}.

constante de gravitación (A. *Gravitationskonstante*, F. *constante de gravitation*, I. *gravitational constant*). Es el factor de proporcionalidad G que figura en la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON; esto es, la cantidad por la que hay que multiplicar el cociente entre el producto de dos masas y el cuadrado de la distancia entre ellas para obtener la magnitud de la fuerza que cada masa ejerce sobre la otra. Si las cantidades en cuestión se miden en unidades del SISTEMA INTERNACIONAL, $G = 6{,}673(10) \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$. El factor de proporcionalidad κ que figura en las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN es igual a $8\pi G c^{-4}$ (donde c es la VELOCIDAD DE LA LUZ en el vacío). Para simplificar las fórmulas, en la literatura teórica sobre la RELATIVIDAD GENERAL las unidades de medida se eligen comúnmente de modo que $G = 1$.

constante de Hubble (A. *Hubble-Konstante*, F. *constante de Hubble*, I. *Hubble constant*). El PARÁMETRO DE HUBBLE $H = H(t)$ es una función del tiempo cósmico, que indica la velocidad propia (= distancia propia/tiempo cósmico) a la que unas galaxias se alejan de otras. Cuanto mayor es H en un momento dado, tanto más rápida es la expansión del Universo en ese momento. El valor de H ahora (tiempo t_0) es la *constante de Hubble*, $H_0 = H(t_0)$. La constante de Hubble desempeña un papel fundamental en la cosmología. A partir de H_0 y del parámetro de densidad Ω_0 (y eventualmente de la constante cosmológica Λ), podemos calcular en el modelo estándar del *Big Bang* tanto la edad del Universo como su destino final. La constante H_0 puede definirse en función del factor de escala:

$$H_0 = H(t_0) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0}$$

H_0 asigna una velocidad propia (expresada habitualmente en kilómetros por segundo) a cada distancia propia (expresada en megaparsecs, donde 1 megaparsec = $3{,}26 \times 10^6$ años-luz). No conocemos el factor de escala lo suficientemente bien como para calcular a partir de él la constante de Hubble. Por eso tratamos de medir empíricamente su valor. En efecto, cualquier galaxia lejana se aleja de nosotros (según la ley de Hubble) a una velocidad proporcional a su distancia. Dividiendo su velocidad de recesión (en kilóme-

tros por segundo) ahora por su distancia propia (en megaparsecs) ahora, obtenemos el valor de la constante de Hubble. Desgraciadamente, ninguna de esas dos cantidades es medible experimentalmente. Lo único que podemos medir es el corrimiento hacia el rojo observado en el espectro de la luz que nos llega de la galaxia y la luminosidad aparente o flujo de energía por unidad de tiempo y superficie que nos llega de esa fuente. El corrimiento hacia el rojo z nos informa directamente de la velocidad a la que se alejaba de nosotros la galaxia cuando emitió la luz que ahora nos llega. La comparación entre la luminosidad aparente y la supuesta luminosidad intrínseca nos informa directamente de la distancia a que estaba la galaxia cuando emitió esa luz. Tal distancia es menor que la distancia propia actual, debido a la expansión del Universo. La distancia propia se define en una hipersuperficie de tiempo cósmico constante del espaciotiempo. Supongamos que hay una cadena ininterrumpida de observadores entre nosotros y la galaxia lejana, cada uno muy cerca del siguiente. Cada observador mide la longitud que lo separa de su vecino inmediato en dirección a la galaxia, todos al mismo tiempo cósmico t. Si sumamos o integramos todas esas longitudes, el resultado es la distancia propia que nos separa de esa galaxia en el tiempo cósmico t. La distancia coordenada es la distancia en coordenadas comóviles con la expansión del Universo en las que las galaxias ocupan nodos fijos de la cuadrícula; es decir, la distancia coordenada entre dos galaxias no cambia con el tiempo a pesar de la expansión. Si r es la distancia coordenada a una galaxia determinada, d_{pr} es la distancia propia a la misma galaxia y a_0 es el factor de escala ahora, entonces la distancia propia ahora es $d_{pr}(0) = a_0 r$ (si el Universo es plano), $d_{pr}(0) = a_0 \mathrm{sen}^{-1} r$ (si el Universo es esférico) y $d_{pr}(0) = a_0 \mathrm{senh}^{-1} r$ (si el Universo es hiperbólico). En general, y por ejemplo en el caso del Universo plano, en cualquier instante cósmico t, $d_{pr}(t) = a(t)r$.

A partir de esos datos y en función del corrimiento hacia el rojo observado y del flujo de energía captado (la luminosidad aparente observada) y suponiendo la validez de un determinado modelo cosmológico FRW y un valor preciso de la constante de Hubble, podemos calcular la distancia propia entre esa galaxia y la nuestra y la velociadad propia con la que esa galaxia se aleja ahora de nosotros. De hecho, los astrónomos con frecuencia usan la distancia de luminosidad, que es la distancia del observador a la que estaría el objeto emisor de la luz en un universo euclídeo que no estuviera en expansión, si produjese el mismo flujo de energía medido. Por tanto, la distancia de luminosidad es $d_{lum} = \sqrt{\frac{F}{4\pi f}}$, donde F es la energía total emitida por la fuente por segundo y f es el flujo de energía recibido en la Tierra por m^2. A partir de esa distancia ficticia pero medible y del corrimiento hacia el rojo también medible podemos inferir la inobservable distancia propia. Por ejem-

plo, en el caso más sencillo del modelo FRW plano (con la constante de curvatura espacial $k = 0$), $d_{pr} = d_{lum}/1+z$, donde z es el corrimiento hacia el rojo.

Las distancias astronómicas son muy difíciles de medir. Los métodos habituales (el paralaje y las variables cefeidas) no son aplicables a las galaxias lejanas. Recientemente el uso de las supernovas de tipo *Ia* como candelas estándar y de las lentes gravitacionales está permitiendo grandes avances en la medición de las distancias extragalácticas, pero las dificultades siguen siendo formidables. Hubble mismo se equivocó considerablemente en la determinación del valor de la constante que lleva su nombre, atribuyéndole un valor (550 km/s/Mpc) diez veces mayor que el actualmente admitido. Durante los últimos sesenta años los astrónomos han mantenido sonadas "guerras de Hubble", en las que un grupo obtenía valores bajos de la constante, de unos 50 km/s/Mpc, mientras que otros, con métodos distintos, obtenían valores más altos, de unos 90, lo que daba lugar a ruidosas polémicas. En los últimos años las nuevas mediciones parecen converger hacia un valor de unos 65 km/s/Mpc, aunque aún podría haber sorpresas.

De hecho, lo que Hubble halló por inducción sobre los datos y publicó en 1929 no fue una relación lineal entre velocidad y distancia, sino entre corrimiento hacia el rojo y distancia: z = constante × d. Hubble interpretó el corrimiento hacia el rojo como debido al efecto Doppler y calculó las velocidades multiplicando el corrimiento hacia el rojo por la velocidad de la luz, con lo que octuvo $cz = H_0 d$. Esta generalización empírica solo es válida para corrimientos pequeños y distancias pequeñas y deja de serlo a grandes distancias. Por eso la cosmología actual llama ley de Hubble a otra fórmula que Hubble no propuso, a saber, $v = H_0 d$, donde v es la velocidad propia. En general, y haciendo uso del PARÁMETRO DE HUBBLE, en cualquier tiempo cósmico t, $v = H(t)d$.

Según la ley de Hubble, las galaxias (no ligadas gravitacionalmente a la nuestra) se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a su distancia. Con ayuda de la constante de Hubble podemos calcular a partir de qué distancia ($= c/H_0$) las galaxias se alejan de nosotros a una velocidad superior a la de la luz. Esta distancia, que marca el límite y la escala de nuestro universo observable, se llama el radio de Hubble y es igual a unos 15.000 millones de años-luz, suponiendo que $H_0 = 65$. La velocidad superlumínica con que estas galaxias se alejan de nosotros se debe a la expansión del espacio, que no es una señal que pueda intercambiarse ni transmitir información, por lo que no está sometida a la prohibición especial-relativista de velocidades mayores que la de la luz.

constante de Planck (A. *Planck-Konstante*, F. *constante de Planck*, I. *Planck constant*). Constante de la naturaleza igual a 6,626 068 76(52) × 10^{-34} J s

(joule-segundos). Se designa con el símbolo h. Tuvo su primera aparición en la hipótesis adelantada por Max Planck (1900), según la cual la radiación térmica se absorbe en unidades discretas o *cuantos* de energía $E = h\nu$ (donde ν denota la frecuencia). Tras la pronta confirmación de la LEY DE PLANCK derivada de esta hipótesis, la constante h llegó a ser un ingrediente que no podía faltar en las hipótesis relativas a la microestructura de la materia. La presencia significativa de h en la descripción o explicación de un fenómeno puede servir de criterio para clasificarlo como fenómeno *cuántico*. Como h figura frecuentemente en las ecuaciones de la física multiplicado por el factor $(2\pi)^{-1}$, la cantidad $h/2\pi = 1{,}054\ 571\ 596(82) \times 10^{-34}$ J s se designa con el símbolo $\hbar$ (léase: hache barrada).

En la literatura más antigua, se daba a h el nombre de "cuanto de acción", porque su dimensión energía × tiempo corresponde a la cantidad física llamada *acción.*

constante de Rydberg (A. *Rydberg-Konstante*, F. *constante de Rydberg*, I. *Rydberg constant*). Constante de la naturaleza que aparece como factor en fórmulas espectroscópicas (↗SERIE DE BALMER). Su valor se ha establecido con enorme precisión (error de 7,6 partes en 10^{12}):

$$\mathfrak{R} = 10\ 973\ 731{,}568\ 549(83)\ \mathrm{m}^{-1}$$

Niels Bohr (1913) pudo derivar de su teoría cuántica del átomo esta expresión de la constante de Rydberg en términos de las constantes fundamentales e (carga eléctrica del electrón), h (constante de Planck) y c (velocidad de la luz):

$$\mathfrak{R} = \frac{2\pi^2 e^4 \mu}{ch^3}$$

μ denota aquí la masa reducida del átomo de hidrógeno, esto es, el producto de la masa del protón por la masa del electrón dividido por la suma de ambas. El acuerdo asombroso entre el valor de $\mathfrak{R}$ calculado según esta fórmula y el valor medido por los espectroscopistas contribuyó poderosamente a la aceptación de las ideas de la física cuántica.

constante lógica (A. *logische Konstante*, F. *constante logique*, I. *logical constant*). Un lenguaje formal puede interpretarse de diversas maneras. Lo que varía en las diversas interpretaciones es el modo como se interpretan las variables y los parámetros. Sin embargo, hay ciertos símbolos del alfabeto que son invariantes respecto a cambios de INTERPRETACIÓN, pues siempre se interpre-

tan de la misma manera: son las *constantes lógicas*. El significado de las constantes lógicas está fijado de una vez por todas, al menos mientras mantengamos el lenguaje formal y por tanto la lógica. Si cambiamos de lógica, por definición cambiamos de constantes lógicas, aunque estas conserven cierta semejanza funcional e incluso una identidad morfológica. Los paréntesis tampoco cambian de significado, pues no tienen ninguno, sino que se limitan a facilitar al usuario la determinación del alcance de los parámetros y las constantes lógicas. Quine y otros autores han caracterizado las verdades lógicas como las sentencias cuya verdad depende solo del significado de sus constantes lógicas. En la lógica clásica de primer orden las constantes lógicas son los cinco CONECTORES, los dos CUANTIFICADORES y el signo de identidad. Algunas constantes lógicas son definibles en función de otras. Así, por ejemplo, el cuantificador universal es definible en función de la negación y del cuantificador existencial: $\forall x\varphi(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\,\neg\varphi(x)$.

constantes de la naturaleza (A. *physikalische Konstante*, F. *constantes de la nature*, I. *constants of nature*). Cantidades que figuran en las ecuaciones de la física matemática como factores invariables de las cantidades físicas variables cuyas relaciones mutuas enuncian dichas ecuaciones. Las más importantes, que figuran por doquier y sirven de puente entre distintas teorías físicas, suelen llamarse *constantes fundamentales*; por ejemplo, la carga del ELECTRÓN, la CONSTANTE DE BOLTZMANN, la CONSTANTE DE GRAVITACIÓN, la CONSTANTE DE PLANCK, el NÚMERO DE AVOGADRO, la VELOCIDAD DE LA LUZ.

Las constantes de la naturaleza suelen ser cantidades dimensionadas; por ejemplo, la constante de Planck h tiene las dimensiones de una acción: *energía* × *tiempo* = *masa* × *aceleración* × *distancia* × *tiempo*. Pero algunas son números puros. También puede ocurrir que un número puro reemplace a una constante dimensionada (o viceversa) al reconcebirse las relaciones que contribuye a determinar; por ejemplo, la velocidad de la luz c se expresa normalmente en metros por segundo (299 792 458 m/s, exactamente), pero la teoría especial de la RELATIVIDAD permite concebir la velocidad relativa v_{AB} de una partícula inercial A respecto de otra B como un número puro, dependiente del ángulo β_{AB} que forman sus respectivas COSMOLÍNEAS: $v_{AB} = \tanh \beta_{AB}$; entonces, $c = \lim_{\beta\to\infty} \tanh \beta = 1$.

El valor de las constantes dimensionadas depende obviamente de las UNIDADES DE MEDIDA que se adopten. Los experimentalistas usan, por cierto, las unidades estándar del SISTEMA INTERNACIONAL; sin embargo, en las presentaciones teóricas, para aligerar expresiones y cálculos, suelen emplearse unidades tales que una o más constantes fundamentales tomen el valor 1. En particular, si las unidades de medida se definen de modo que $c = \hbar = 1$, se habla de *unidades naturales* (donde $\hbar = h/2\pi$).

De cuando en cuando aflora la idea de que las constantes fundamentales podrían variar y se aducen consideraciones teóricas y constataciones experimentales para respaldarla. Evidentemente, no es difícil imaginar que estas cantidades, cuya invariabilidad está comprobada —dentro de los límites de error experimental— sobre regiones muy pequeñas durante el periodo brevísimo en que se las ha estado midiendo, cambian gradualmente en el tiempo y en el espacio. En tal caso, claro está, no serían constantes, y habría que darles otro nombre (cf. CONSTANTE DE HUBBLE y PARÁMETRO DE HUBBLE). Y en las ecuaciones revisadas, en que las antiguas constantes fuesen sustituidas por funciones del tiempo, la posición o el estado, figurarán sin duda otros factores invariables (aunque invisibles si ocurre que son iguales a 1): las constantes fundamentales de la nueva dispensación.

Hay una diferencia importante entre las cantidades invariables que una teoría reconoce como constantes de la naturaleza y los parámetros ajustables que trata como constantes en un modelo particular: en las aplicaciones del CÁLCULO DE VARIACIONES a las ecuaciones de la teoría, estos últimos se someten a variación, aquellas no. Esta diferencia se ha hecho sentir últimamente en los debates sobre la CONSTANTE COSMOLÓGICA. ¿Es una genuina constante de la RELATIVIDAD general, o solo un parámetro que admite cambios al pasar de un modelo a otro?

constructivismo (A. *Konstruktivismus*, F. *constructivisme*, I. *constructivism*). Término utilizado para designar diversas corrientes en distintas esferas de la vida cultural que sostienen, en su respectiva esfera, la primacía de la *construcción*, en algún sentido de esta palabra. (↗ EMPIRISMO CONSTRUCTIVO).

El *constructivismo* en la fundamentación de las matemáticas surge a principios del siglo XX a raíz de la llamada crisis de la teoría de conjuntos. Sus variantes concuerdan en cuanto a la exigencia de que las demostraciones matemáticas sean *constructivas*, pero disienten en cuanto a la amplitud que conceden a este concepto. Mientras que el finitismo de Wittgenstein al parecer identifica constructibilidad y COMPUTABILIDAD, lo que prácticamente arrasaría con la matemática moderna, el INTUICIONISMO de Brouwer adopta una idea de construcción peculiarísima (y no muy clara) que excluye ciertos teoremas centrales del análisis clásico (vgr. "Toda función real acotada por arriba tiene una cota superior mínima"), pero permite demostrar otros que para éste son falsos (vgr. "Toda función real definida en el intervalo cerrado [0,1] es uniformemente continua"). El constructivismo inicial de Lorenzen (1965) preserva todos los ingredientes del análisis clásico tradicionalmente utilizados en la física. En contraste con Brouwer, admite el *TERTIUM NON DATUR*, pero evita la IMPREDICATIVIDAD y contempla, además de la cuantificación ordinaria sobre un dominio bien definido, una forma de cuantificación indefinida con la que

uno puede referirse a los dominios no DENUMERABLES típicos del análisis sin verse forzado a aceptar la existencia de un infinito innumerable actual y de CARDINALES transfinitos.

Lorenzen es también el fundador de la Escuela de Erlangen, que promovía una forma de constructivismo en la filosofía de la física (↗PROTOFÍSICA).

contexto del descubrimiento / contexto de la justificación (A. *Entdeckungszusammenhang/Begründungszusammenhang*, F. *contexte de la découverte/contexte de la justification*, I. *Context of discovery/context of justification*). Distingo introducido por Reichenbach, común entre los adeptos del EMPIRISMO LÓGICO, y aceptado también por otros autores. El *contexto del descubrimiento* es el tejido de circunstancias históricas y biográficas, sociales y personales, en que se produce un descubrimiento científico; estas circunstancias contingentes pueden incluir toda suerte de motivaciones irracionales, supuestos metafísicos, inclinaciones supersticiosas y simples fantasías, amén del juego dinámico de los intereses prácticos; los filósofos de esa escuela no niegan la realidad y eficacia de tales circunstancias en la historia de la ciencia pero desligan de ellas por completo la validez del pretendido descubrimiento. Esta ha de establecerse en el *contexto de la justificación*, consistente en el tejido de las relaciones lógicas entre el aserto que enuncia lo descubierto y el sistema de los conocimientos científicos ya aceptados, en particular aquellos que suministran una demostración o confirmación de dicho aserto. Obviamente, el distingo responde al estilo intelectualista de concebir la ciencia como un acervo de proposiciones informativas. Para quienes entienden la ciencia —o las ciencias— ante todo como forma de vida, como praxis histórico-social, el distingo de Reichenbach se disuelve, pues, desde este punto de vista, las normas a que se ciñe la aceptación de los asertos científicos son solo un factor —aunque, por cierto, decisivo— de esa praxis y, por lo tanto, el propio contexto de la justificación no pasa él mismo de ser un ingrediente más del contexto del descubrimiento.

contingente (A. *kontingent*, F. *contingent*, I. *contingent*). Si algo es NECESARIO, seguro que ocurre. Si algo es imposible, seguro que no ocurre. Si algo no es necesario ni imposible, entonces es contingente, puede ocurrir o no. La contingencia es una modalidad que afecta a proposiciones y puede definirse en función de la necesidad o de la posibilidad. Sea *P* una proposición. Es *contingente* que *P* si y solo si es posible que *P* y es posible que no *P*. Equivalentemente, es contingente que *P* si y solo si no es necesario que *P* y no es necesario que no *P*.

continuo (A. *Kontinuum*, F. *continu*, I. *continuum*). La idea de la continuidad del cambio —en particular del cambio de lugar y, con él, del tiempo y

la distancia— fue el legado más importante y perdurable de la filosofía natural de Aristóteles a la física moderna. En su *Física* (V, iii), Aristóteles define (*a*) *sucesivo* (ἐφεξῆς) = lo que está después del inicio, por su posición o forma u otro respecto bajo el cual se lo caracteriza, y no hay nada del mismo género entre eso y aquello a lo que se dice que sucede; (*b*) *seguido* (ἐχόμενον) = lo que es sucesivo y toca; (*c*) *continuo* (συνεχές) = lo que es seguido, cuando se funden y son una y la misma cosa los límites donde se tocan los objetos en cuestión.

Si el movimiento no fuese continuo no se lo podría concebir como un proceso gobernado por ECUACIONES DIFERENCIALES, conforme a la MECÁNICA CLÁSICA de Newton, Lagrange y Hamilton. Esta supone además una concepción cuantitativa del continuo, la cual ya está presente en la teoría de las proporciones de Eudoxo, adoptada por Euclides y los astrónomos matemáticos griegos, y fue perfeccionada en el siglo XIX por Weierstrass, Méray, Dedekind y Cantor de un modo que satisface a la gran mayoría de los físicos y matemáticos de hoy (↗NÚMERO REAL). En la *minoría* disidente, que repudia la aceptación del infinito actual por la doctrina dominante, militan los INTUICIONISTAS, que, con Brouwer y Weyl, conciben el continuo de los números reales como un "medio de libre devenir", y los CONSTRUCTIVISTAS, discípulos de Lorenzen y Bishop. Ambas corrientes concuerdan en basar la definición de todos los continuos en la respectiva concepción del continuo $\mathbb{R}$ de los reales, con la topología estándar. A partir de él, se construye toda suerte de continuos multidimensionales; los más simples, formando productos cartesianos; otros, más rebuscados, recurriendo a un atlas (↗VARIEDAD TOPOLÓGICA).

contracción (A. *Kontraktion*, F. *contraction*, I. *contraction*). Sea $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable. Designamos con $\mathcal{T}^r_s(\mathcal{M})$ el MÓDULO de los CAMPOS tensoriales de tipo (r,s) sobre $\mathcal{M}$. La *contracción* de un campo tensorial de tipo (r,s) sobre $\mathcal{M}$, *respecto de sus índices k-ésimo y* $(r+h)$*-ésimo* ($1 \leq k \leq r$; $1 \leq h \leq s$), es la función lineal C^k_h: $\mathcal{T}^r_s(\mathcal{M}) \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(\mathcal{M})$, que asigna a cada campo tensorial $W \in \mathcal{T}^r_s(\mathcal{M})$ que sea el PRODUCTO TENSORIAL de r campos vectoriales $V_1,\ldots,V_r$ y s campos de covectores $\omega_1,\ldots, \omega_s$, el campo tensorial de tipo $(r-1,s-1)$

$$C^k_h(W) = C^k_h(V_1 \otimes\ldots\otimes V_r \otimes \omega_1 \otimes\ldots\otimes \omega_s) =$$
$$\omega_h(V_k)(V_1 \otimes\ldots\otimes V_{k-1} \otimes V_{k+1} \otimes\ldots\otimes V_r \otimes \omega_1 \otimes\ldots\otimes \omega_{h-1} \otimes \omega_{h+1} \otimes\ldots\otimes \omega_s)$$

Como cualquier elemento del módulo $\mathcal{T}^r_s(\mathcal{M})$ es igual a una combinación lineal de campos tensoriales que cumplen la condición impuesta al campo W, la definición precedente determina la función lineal C^k_h en todo su dominio.

Los componentes de la contracción de un campo tensorial, relativos a una carta x de $\mathcal{M}$, pueden calcularse fácilmente a partir de los componentes del campo tensorial en cuestión. Por ejemplo, si R es un campo tensorial de tipo (1,3) sobre una variedad n-dimensional $\mathcal{M}$, la restricción de R al dominio de x es igual a la combinación lineal

$$R = R^i_{jkh}\left(\partial/\partial x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^h\right)$$

donde, conforme a la CONVENCIÓN DE EINSTEIN, se sobreentiende la suma sobre cada uno de los cuatro pares de índices iguales. Los n^4 campos escalares R^i_{jkh} $(1 \leq i,j,k,h \leq n)$ son los componentes de R relativos a x. La contracción $C^1_3(R)$ de R respecto a sus índices primero y tercero es un campo tensorial de tipo (0,2) que llamaremos $\tilde{R}$. En el dominio de la carta x tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{R} = C^1_3(R) &= R^i_{jkh}\, \partial/\partial x^i\, (\mathrm{d}x^k)(\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^h) \\ &= R^i_{jkh}\delta^i_k(\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^h) \\ &= R^k_{jkh}(\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^h)\end{aligned}$$

Por lo tanto, los componentes de $\tilde{R}$ relativos a x son los n^2 campos escalares

$$\tilde{R}_{jh} = R^i_{jih}$$

contradicción (A. *Widerspruch*, F. *contradiction*, I. *contradiction*). Conjunción de dos enunciados, uno de los cuales es la negación del otro. Como uno de los dos enunciados es falso, su conjunción es siempre falsa. En el lenguaje formal de la lógica, suele considerarse que una fórmula ψ es una contradicción si y solo si hay una fórmula φ tal que ψ es $(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Otras veces la noción de contradicción se identifica con la de antilogía (↗ TAUTOLOGÍA). En cualquier caso, ninguna interpretación posible satisface o verifica una contradicción. Una contradicción es irremediablemente falsa, la interpretemos como la interpretemos. Si nuestro discurso o razonamiento o teoría conduce a una contradicción, se dice que nos contradecimos o que caemos en la contradicción. Esa caída es lo peor que nos puede pasar desde un punto de vista lógico, ya que es síntoma inequívoco de que nuestro discurso o teoría están aquejados de INCONSISTENCIA. Evitar la inconsistencia no siempre es tarea fácil, sobre todo cuando tratamos de temas recónditos y alejados de la experiencia directa. Por eso la lógica práctica se define a veces como el arte de no contradecirse.

contraejemplo (A. *Gegenbeispiel*, F. *contre-exemple*, I. *counterexample*). Un ejemplo que refuta una hipótesis general o que muestra la incorrección de cierta argumentación. En filosofía de la ciencia, Popper ha subrayado la asimetría entre refutación y confirmación de una hipótesis científica. Un solo contraejemplo basta para refutar una hipótesis general, pero millones de ejemplos que la cumplen no bastan para confirmarla. En lógica se hace un uso sistemático de los contraejemplos en las pruebas de INDEPENDENCIA. Para establecer la independencia de la conmutatividad respecto a los axiomas de la teoría de grupos basta con mostrar un contrajemplo, es decir, una realización de esos axiomas que no sea un GRUPO ABELIANO.

convención de Einstein (A. *Einsteinsche Summierungsverabredung*, F. *convention d'Einstein*, I. *Einstein convention*). Llámase así a la convención notacional introducida por Einstein, que permite representar simbólicamente la suma de una lista de términos prescindiendo del signo Σ. Veamos un ejemplo. El polinomio $a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3 + a_4b^4$ (donde las variables b llevan *superíndices*, no *exponentes*) se representa tradicionalmente como la sumatoria $\sum_{k=1}^{4} a_k b^k$. Según la convención de Einstein debe sobreentenderse la suma sobre pares de índices iguales cuando constan de un subíndice y un superíndice. En virtud de ella, el mismo polinomio se representa así: $a_k b^k$. Si el recorrido del índice k no se desprende del contexto, suele indicárselo entre paréntesis, antes o después de la fórmula, así: $(1 \leq k \leq 4)$. Otro ejemplo: si el símbolo R^i_{hjk} $(0 \leq i,h,j,k \leq 3)$ representa los componentes del tensor de CURVATURA en un espaciotiempo relativista, la suma $R^0_{h0k} + R^1_{h1k} + R^2_{h2k} + R^3_{h3k}$ (con h y k fijos) se representa así: R^i_{hik}; se sobreentiende la suma sobre el índice repetido i. Si un término presenta varios pares de índices iguales de este tipo, se sobreentiende la suma sobre cada uno.

La convención de Einstein se usa comúnmente —también en este diccionario— cuando se tratan temas de relatividad general y geometría diferencial.

convencionalismo (A. *Konventionalismus*, F. *conventionalisme*, I. *conventionalism*). Basándose en resultados de Klein (↗PROGRAMA DE ERLANGEN), Poincaré (1887) sostuvo que no hay una geometría verdadera y otras falsas, puesto que las geometrías estudian los invariantes de un grupo y ningún grupo es más verdadero que otro. La adopción de una geometría determinada —clásicamente, la euclídea— como base para la descripción de las relaciones espaciales entre los fenómenos es pues, según Poincaré, una convención, basada en la comodidad. Poincaré detectó luego la presencia de otras convenciones en la física, por ejemplo, las que se aplican en la medición del tiempo (1898). Estas observaciones de Poincaré influyeron poderosamente sobre Einstein en el periodo formativo de la teoría especial de la RELATIVIDAD (↗SIMULTANEIDAD). Estimulados por su ejem-

plo, los adeptos del EMPIRISMO LÓGICO, particularmente Reichenbach y Carnap, se esmeraron en separar los componentes convencionales de los componentes fácticos de las teorías físicas. En vista del escaso éxito de sus esfuerzos y de la crítica y relativización, por Quine y otros, del distingo entre asertos ANALÍTICOS (convencionales) y SINTÉTICOS (fácticos), la idea de convención científica ha ido perdiendo fuerza (también la capacidad de escandalizar). Queda en pie la percepción, heredada de Poincaré, de que, al menos en las ciencias, los principios dependen del consenso, en último término voluntario, de los interesados.

Mención aparte merece el convencionalismo en la lógica, favorecido por Carnap y otros. En la formulación de Giannoni (1971), las reglas de inferencia propias de un sistema de lógica —por ejemplo, *MODUS PONENS*— no son sino convenciones que fijan el significado de los operadores lógicos (CONECTORES, CUANTIFICADORES).

convergencia (A. *Konvergenz*, F. *convergence*, I. *convergence*). El concepto de convergencia a un límite es la noción central del análisis matemático, decisivo a su vez para el uso de las matemáticas en la investigación del devenir. Definiremos este concepto para el caso elemental de una SECUENCIA de números reales y de una función con argumentos y valores reales y luego aludiremos a sus generalizaciones.

La secuencia de números reales $(a_k)_{k\in\omega}$ *converge al límite* $a \in \mathbb{R}$ si para cada número real $\varepsilon > 0$ hay un número natural $N(\varepsilon)$ tal que, para todo número natural $n \geq N(\varepsilon)$, $|a - a_n| < \varepsilon$. Simbólicamente: $\lim_{k\to\infty} a_k = a$.

Sea $f : x \mapsto f(x)$ una función cuyo dominio y codominio están incluidos (propia o impropiamente) en $\mathbb{R}$. f *converge* (o *tiende*) *al límite* α *cuando* x *tiende a* β si, para cada número real $\varepsilon > 0$, hay un número real $\delta(\varepsilon)$ tal que, $|f(x) - \alpha| < \delta(\varepsilon)$ cuando quiera que $|x - \beta| < \varepsilon$. Simbólicamente: $\lim_{x\to\beta} f(x) = \alpha$.

Estos conceptos de convergencia se extienden de un modo natural a cualquier estructura en que se haya definido una noción de distancia similar a la expresada arriba por la notación $|u - v|$; en particular, a los ESPACIOS DE BANACH $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ ($n \in \omega$). La matemática del siglo XX ha logrado además definir conceptos de convergencia en espacios topológicos e incluso definir la TOPOLOGÍA a partir de la convergencia, demostrando así que esta última idea no presupone una MÉTRICA. Definiremos solo el más simple de los conceptos topológicos de convergencia.

Sea $(a_k)_{k\in\omega}$ una secuencia de puntos del espacio topológico $\langle S,T\rangle$. Decimos que ella *converge* al punto $a \in S$ si para cada entorno U de a hay un número natural N_U tal que $a_n \in U$ para todo $n \geq N_U$. Decimos que a es un *límite* o un *punto límite* de la secuencia $(a_k)_{k\in\omega}$; simbólicamente: "$a_k \to a$ cuando $k \to \infty$", o bien, "$\lim_{k\to\infty} a_k = a$".

coordenada (A. *Koordinate*, F. *coordonée*, I. *coordinate*). ↗CARTA, TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

coordenadas cartesianas (A. *kartesische Koordinaten*, F. *coordonnées cartesiennes*, I. *Cartesian coordinates*). Para identificar los puntos del plano en que el geómetra construye sus figuras, se asigna a cada uno, de modo exclusivo, un par de números reales o *coordenadas*. El procedimiento más común consiste en asignar a cada punto p del plano el par de números $\langle x(p),y(p)\rangle$, donde $|x(p)|$ es la distancia de p a una recta que divide el plano en dos mitades que aquí llamaremos "este" y "oeste" y $|y(p)|$ es la distancia de p a una recta, perpendicular a la anterior, que divide el plano en dos mitades que llamaremos "norte" y "sur". $x(p)$ es la *abscisa*, $y(p)$ la *ordenada* del punto p. La abscisa es un número positivo si p está en la mitad "este", negativo si p está en la mitad "oeste" del plano; la ordenada es un número positivo si p está en la mitad "norte", negativo si p está en la mitad "sur" del plano. $x(p)$ y $y(p)$ son las *coordenadas cartesianas* de p. La recta que divide el plano en "norte" y "sur" es el *eje de las abscisas*; la que lo divide en "este" y "oeste" es el *eje de las ordenadas*. Los ejes se cortan en el punto o cuyas coordenadas son $x(o) = y(o) = 0$; este punto es el *origen* del sistema de coordenadas.

Mediante un procedimiento similar se asignan coordenadas cartesianas $x(p)$, $y(p)$ y $z(p)$ a cada punto p del espacio ordinario. Las distancias de p a tres planos perpendiculares fijan los valores absolutos de sus tres coordenadas; el signo de cada coordenada depende de la posición de p con respecto al plano correspondiente.

corrección semántica [de un cálculo] (A. *Korrektheit*, F. *correction*, I. *soundness*). Un cálculo deductivo es semánticamente correcto si solo permite derivar fórmulas que son consecuencias de las premisas. El cálculo cuya relación de deducibilidad es $\vdash$ es semánticamente correcto si y solo si para cada conjunto Γ de fórmulas y cada fórmula α, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$. En especial, si $\vdash\alpha$ entonces $\models\alpha$, es decir, todas las fórmulas deducibles sin premisas en el cálculo son lógicamente válidas. Un cálculo deductivo adecuado ha de ser a la vez semánticamente correcto y SEMÁNTICAMENTE COMPLETO.

corrimiento al rojo cosmológico (A. *kosmologische Rotverschiebung*, F. *déplacement cosmologique vers le rouge*, I. *cosmological redshift*). En la luz procedente de otras galaxias (con excepción de algunas comparativamente próximas a la nuestra), las líneas espectrales características de los distintos elementos químicos aparecen con una frecuencia menor que en la luz emitida en laboratorios terrestres. En el caso de las galaxias cuya distancia puede

establecerse aproximadamente mediante otros criterios, este desplazamiento de las frecuencias hacia el extremo más bajo del espectro visible (*corrimiento al rojo*) es tanto mayor cuanto mayor sea esa distancia. Por esa razón, los astrónomos usan el corrimiento al rojo como criterio de distancia en el caso de galaxias que, por estar muy lejos, no admiten otro. El corrimiento al rojo del espectro de la gran mayoría de las galaxias se entendió inicialmente como un EFECTO DOPPLER debido a la velocidad con que ellas se alejan de nosotros. Sería así si las galaxias existiesen en un espaciotiempo de CURVATURA cero, como el postulado por la teoría especial de la RELATIVIDAD. El fenómeno también atestigua la fuga de las galaxias según la teoría general de la relatividad, la cual además lo explica con naturalidad por la misma estructura geométrica que, según ella, el Universo posee bajo ciertas hipótesis plausibles (↗*BIG BANG*). Pero esta explicación supone que el espaciotiempo no tiene curvatura cero. De acuerdo con ella, el corrimiento al rojo refleja directamente la EXPANSIÓN DEL UNIVERSO, más bien que la velocidad de las galaxias. Supongamos que la métrica del espaciotiempo es, a grandes rasgos, una MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER. Sea μ la métrica del espacio en el momento de la historia del Universo en que una señal luminosa de longitud de onda λ fue emitida en una galaxia lejana y $R\mu$ la métrica del espacio en el momento en que la misma señal es recibida con longitud de onda $\lambda + \Delta\lambda$. Entonces, el factor de proporcionalidad R entre las métricas espaciales en esos dos momentos mide la expansión (o contracción) del Universo en el tiempo tracurrido entre ellos. El parámetro $z = \Delta\lambda/\lambda$ mide el corrimiento al rojo de la señal y no es difícil ver que $1 + z = R$. En efecto, si una onda se propaga sobre un espacio fijo, la separación entre sus crestas sucesivas no varía entre la emisión y la recepción; pero si se propaga sobre un espacio que a su vez se expande parejamente del modo descrito, las crestas estarán separadas a la recepción por una distancia R veces mayor que la que las separaba al tiempo de la emisión. De modo que $R = (\lambda + \Delta\lambda)/\lambda = 1 + z$.

corrimiento al rojo gravitacional (A. *gravitationelle Rotverschiebung*, F. *déplacement gravitationnel vers le rouge*, I. *gravitational redshift*). Una señal electromagnética de frecuencia ν emitida en un lugar de potencial gravitacional Φ se recibe en un lugar de potencial gravitacional $\Phi' < \Phi$ "corrida al rojo", esto es, con frecuencia $\nu' < \nu$. Ello se debe a la DILATACIÓN GRAVITACIONAL DEL TIEMPO, en virtud de la cual el reloj con que se mide la frecuencia en el lugar de emisión de la señal se atrasa con respecto a aquel con el cual se la mide en el lugar de recepción.

corroboración (A. *Bewährung*, F. *corroboration*, I. *corroboration*). Popper insiste en que no es posible VERIFICAR las proposiciones universales de la cien-

cia, pues el mundo siempre puede albergar contraejemplos desconocidos que las refuten. Siendo infinito —al menos, prácticamente— el número de casos particulares desconocidos, tampoco cabe esperar que sean CONFIRMADAS por la acumulación de experiencias que las respaldan. Tales proposiciones pueden, en cambio, ser falsadas, esto es, contradichas por un contraejemplo, y, según Popper, la tarea propia de la ciencia es idear proposiciones universales falsables y diseñar experimentos que las pongan en peligro de FALSACIÓN. De una hipótesis científica que pasa una prueba que pudiera falsarla, Popper dice que ha sido CORROBORADA por la experiencia; tanto más cuanto más inverosímil sea que sobreviva a la prueba. Popper trató, con poco éxito, de cuantificar la VEROSIMILITUD de una hipótesis, dependiente de su corroboración progresiva.

cosa en sí (A. *Ding-an-sich*, F. *chose en soi*, I. *thing-in-itself*). Inspirado por lo que llamó una "gran luz", Kant (1770) proclama que espacio y tiempo son formas de ordenación de los fenómenos propias de la sensibilidad humana. Hecha abstracción de ésta, no cabe atribuir predicados y relaciones espaciales y temporales a las cosas. De ahí el distingo entre las cosas *tal como nos aparecen*, ocupando espacio y durando tiempo, y las cosas *tal como son en sí mismas*, las cuales serían conocibles para un entendimiento depurado de toda noción espacial y temporal. En el curso de la década siguiente, Kant se percata de que no puede justificar la validez objetiva de las CATEGORÍAS o "conceptos puros" del entendimiento humano excepto en cuanto sirven a la organización de la experiencia sensible espaciotemporal (↗DEDUCCIÓN TRANSCENDENTAL). Por lo tanto, según él, las cosas tal como son en sí mismas quedan irremisiblemente fuera del alcance del conocimiento humano. Aunque Kant reitera que "no puede haber una apariencia" o fenómeno "sin algo que aparezca" o se manifieste, es cuestionable que esta pretendida *cosa en sí*, independiente de sus manifestaciones, pueda ser descrita como *una* o como *muchas*, como *sustancia* y como *causa*, pues todos estos términos en cursiva son justamente categorías cuya aplicabilidad a la "cosa en sí" ha sido desechada. Queda en pie, empero, el concepto puramente negativo de lo que sobrepasa a la capacidad humana de conocer, el cual pone límites a la pretensión de coartar el pensamiento moral y religioso en nombre de supuestos resultados de la ciencia.

Aunque contraída de este modo casi a un punto evanescente por su propio creador, la *cosa en sí* perdura en la literatura filosófica, donde la alzan como estandarte distintas versiones del REALISMO, que la suponen accesible, ya sea al razonamiento científico, ya sea a una u otra forma de "intuición" (estética, mística, moral).

cosmolínea (A. *Weltlinie*, F. *ligne d'univers*, I. *worldline*). Los eventos sucesivos de la historia de una partícula forman el trayecto o camino de una CURVA en el ESPACIOTIEMPO. Esta curva, parametrizada por el TIEMPO PROPIO, es la *cosmolínea* de la partícula. Cuando se habla de la cosmolínea de un cuerpo, esto puede referirse o bien a la cosmolínea de su CENTRO DE MASA, o bien —con cierta impropiedad— a la región del espaciotiempo que ocupan los eventos de la historia de ese cuerpo, y que sería tal vez más apropiado llamar su *cosmotubo*.

cosmología (A. *Kosmologie*, F. *cosmologie*, I. *cosmology*). La cosmología es la ciencia del Universo (en griego, κόσμος). Es una ciencia física peculiar. En contraste con las demás teorías físicas, que formulan leyes generales acerca de los diversos objetos de que tratan, la cosmología versa sobre un único objeto, el Universo, cuya evolución histórica trata de describir. En ello se parece a las ciencias históricas, de las que se diferencia por su alto grado de matematización y por el carácter físico de sus explicaciones.

Aunque muchas etnias y grupos religiosos han incluido mitos cosmogónicos en su acervo cultural, tales mitos no forman parte de la cosmología, pues carecen de base científica. La astronomía planetaria de los griegos y renacentistas, aunque científica, tampoco puede ser considerada como cosmología, pues se limitaba a nuestro sistema solar, ignorando el resto del Universo, reducido a mero envoltorio esférico (la esfera de las estrellas fijas) del sistema solar. De todos modos, no hay que olvidar que Hiparco y Ptolemeo elaboraron ya modelos matemáticos de los movimientos de los planetas, precursores de los posteriores modelos cosmológicos, y que Copérnico (como antes Aristarco de Samos) rechazó el antropocentrismo de la tradición geocéntrica, dando así el primer paso hacia lo que luego se llamaría el PRINCIPIO COSMOLÓGICO. Todavía Kepler observaba el firmamento con el mero ojo desnudo y elaboraba su modelo cinético de las órbitas planetarias sin base dinámica sólida. Newton inventó el telescopio reflector y unificó la mecánica celeste y la terrestre en base a sus leyes del movimiento y la gravitación. Kant presentó las primeras especulaciones cosmológicas con base física (newtoniana) sobre el origen y la estructura del Universo. William Herschel usó el telescopio reflector para estudiar con cuidado inédito los objetos celestes, incluidas las "nébulas". La discusión sobre si las "nébulas espirales" son meras nubes dentro de la Vía Láctea, como opinaba Shapley, o son galaxias ("universos islas") independientes, como sostenía Curtis, galvanizó a los astrónomos de principios del siglo XX. Todavía en 1920, en una reunión de la Academia de Ciencias en Washington, ambos astrónomos se enfrentaron frontalmente en esta cuestión que dividía a la comunidad científica en bandos opuestos. La cuestión quedó zanjada con el descubrimiento por Hubble de va-

riables cefeidas en ciertas "nébulas", pues las distancias implicadas eran de tal magnitud que resultaba imposible que estuvieran dentro de nuestra propia galaxia. El reconocimiento de que nuestra galaxia no es más que una más entre cientos de miles de millones de galaxias equivalentes no solo completaba la revolución antiantropocéntrica iniciada por Copérnico, sino que ofrecía ya la imagen moderna del Universo como un ámbito de galaxias.

El Universo nos envía información en forma de señales de diverso tipo, sobre todo radiación electromagnética, pero también rayos cósmicos, neutrinos y ondas gravitacionales. Con el ojo desnudo y desde la superficie de la Tierra solo puede captarse una minúscula proporción de tales señales. La construcción de telescopios y radiotelescopios cada vez más grandes y sofisticados, la sustitución de la retina por las placas fotográficas y los CCDs (que registran los fotones uno a uno), la puesta en órbita por encima de la atmósfera de telescopios y detectores diversos a bordo de satélites artificiales, los experimentos subterráneos de captación de neutrinos y otros desarrollos de la astronomía observacional han abierto de par en par las ventanas al Universo. Esa riqueza de información que nos suministra la observación astronómica ha de ser procesada y destilada con ayuda tanto de computadoras y programas cada vez más potentes como de teorías físicas que nos permitan analizar e interpretar las señales recibidas de un modo consistente con el resto del conocimiento científico.

La cosmología no se ocupa de los detalles locales del Universo, sino solo de su estructura y evolución a gran escala. La evolución cósmica a gran escala depende de la gravitación, que según la teoría general de la RELATIVIDAD de Einstein consiste en la curvatura del espaciotiempo, que a su vez depende de la densidad y distribución de la energía. Desde la teoría de Newton hasta las diversas teorías alternativas de la gravitación propuestas en el siglo XX, la de Einstein es la única que ha resultado compatible con las nuevas observaciones, por ejemplo con las del púlsar binario PSR 1913+16 por Hulse y Taylor. En 1917 Einstein aplicó las ecuaciones de su teoría a la construcción del primer modelo cosmológico relativista. De Sitter, Friedmann, Lemaître y otros propusieron modelos diferentes basados también en la relatividad general. Tras 1930, todos los cosmólogos han considerado la expansión del Universo como un dato a incluir en sus modelos. Extrapolando la expansión hacia atrás se llega a la idea del *Big Bang*, la singularidad que da origen a la gran explosión. En 1948 Bondi y Gold, por un lado, y Hoyle, por otro, propusieron una alternativa al modelo del *Big Bang* que tuvo bastante aceptación durante los años cincuenta: el modelo del estado estacionario del Universo, que corresponde al principio cosmológico perfecto. El Universo sería homogéneo no sólo espacialmente, sino también en el tiempo. La expansión observada, es decir, la separación creciente entre las galaxias, se vería compen-

sada por un campo de creación que iría creando nueva materia al ritmo adecuado para mantener la densidad constante. Este modelo fue abandonado tras el descubrimiento casual de la RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO por Penzias y Wilson en 1965, que resultaba inexplicable en el modelo estacionario, pero tenía una explicación fácil en el modelo del *Big Bang*. Gamow y Alpher habían estudiado la historia térmica del Universo en el contexto del modelo estándar del *Big Bang*. Unos 300.000 años después de la gran explosión se produciría el desacoplamiento de la materia y la radiación, el espacio se haría transparente a los fotones por primera vez y se produciría un gran fogonazo con espectro de cuerpo negro de Planck a la temperatura alcanzada por el Universo en aquella época. La actual radiación cósmica de fondo sería el resto fósil de aquel fogonazo, muy enfriado por la expansión del Universo. En 1992 se anunciaron los datos obtenidos por el satélite especializado COBE: una radiación de microondas con espectro de cuerpo negro a 2,7 K casi perfecto, lo que coincidía con las predicciones realizadas por Dicke y Peebles ya antes de 1965 en base al modelo del *Big Bang*. Además, el estudio de la nucleosíntesis primordial en base al mismo modelo permitía calcular las abundacias relativas de los isótopos de los elementos ligeros (H, He, Li), que también coincidían con las estimadas observacionalmente. Por esas razones, el modelo estándar del *Big Bang* ha acabado siendo aceptado por la gran mayoría de los astrónomos y cosmólogos.

Aunque el modelo estándar del *Big Bang* es el mejor modelo cosmológico del que disponemos, está lejos de ser un modelo completo o definitivo. Presupone una homogeneidad espacial perfecta que no se da en la realidad más que a lo sumo como aproximación idealizada a muy gran escala. Deja libre el valor de sus parámetros fundamentales, como la constante de Hubble, el parámetro de densidad o la constante cosmológica, cuya medición empírica es difícil. En caso de que —como querrían muchos teóricos y algunas observaciones recientes sugieren— fuese nula la curvatura espacial del Universo (esto es, la curvatura de las secciones espacialoides ortogonales a las cosmolíneas de la materia), solo el 5 por ciento de la energía del Universo correspondería a la materia visible en galaxias y otros cuerpos celestes, un 30 por ciento podría atribuirse a materia oscura, que no sabemos lo que es, y el 65 por ciento restante sería la energía oscura correspondiente a la constante cosmológica, que tampoco entendemos.

Hasta 1980, aproximadamente, el desarrollo de la cosmología estuvo en manos de los teóricos de la relatividad general. Desde esa fecha, los físicos de partículas irrumpieron con gran empuje en este campo, desarrollando sobre todo una serie de teorías arriesgadas sobre el Universo muy temprano, que con frecuencia echan mano de teorías físicas no contrastadas. A Guth, Linde y otros teóricos les molesta la presencia de condiciones iniciales en el

Big Bang, por lo que han tratado de minimizarlas con la propuesta de un brevísimo estadio de INFLACIÓN exponencial que habría producido un universo plano y homogéneo con independencia de las condiciones iniciales. Se trata del modelo o escenario inflacionario (más bien, una amplia familia de modelos), basado en la ruptura de simetría de un campo escalar (el inflatón) desconocido por la física de partículas estándar. Con esto llegamos a la peculiar mezcla de consideraciones de teoría cuántica de campos y de relatividad general cuya compatibilidad no está nada clara. Hawking, Hartle y otros autores han tratado de desarrollar una teoría de la gravedad cuántica que garantice dicha consistencia, pero el empeño está aún lejos de haber cuajado. La cosmología actual es un campo en plena efervescencia. La abundancia de especulaciones audaces y el continuo avance de las técnicas observacionales, que podría permitir contrastarlas, le auguran un futuro próximo fascinante y cargado de sorpresas.

cosmovelocidad (A. *Viergeschwindigkeit*, *Weltgeschwindigkeit*, F. *vélocité d'univers*, I. *worldvelocity*, *4-velocity*). La *cosmovelocidad*, o *4-velocidad*, o *velocidad-4* de una partícula, en un momento dado de su historia es la tangente a la COSMOLÍNEA de la partícula en el punto que corresponde a ese momento. Sea γ la cosmolínea de la partícula P y p un evento en la historia de P; entonces, la *cosmovelocidad* de P en p es el vector $\dot{\gamma}_p$ (↗ESPACIO TANGENTE, ecuación (1)). La cosmovelocidad de una partícula material ordinaria es necesariamente un vector temporaloide (↗MÉTRICA SEMI-RIEMANIANNA). Como γ, por definición, está parametrizada por el TIEMPO PROPIO, el vector $\dot{\gamma}_p$ en todos los casos tiene la misma "longitud" -1 (de acuerdo con la convención de SIGNATURA que seguimos aquí) y apunta al futuro, esto es, la dirección en que el tiempo propio aumenta.

cota inferior (A. *untere Schranke*, F. *minorant*, I. *lower bound*). Sea $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ un orden parcial. Sea $c \in A$. Sea $B \subseteq A$. c es una *cota inferior* de B si y solo si c precede a todos los elementos de B distintos de c, es decir, si $\forall x \in B : c \preccurlyeq x$. Cualquier elemento de A menor que una cota inferior de B es una cota inferior de B. B está acotado hacia abajo si y solo si posee al menos una cota inferior. B está *acotado* si está acotado hacia arriba y hacia abajo. Si el conjunto de las cotas inferiores de B tiene un máximo, esta máxima cota inferior se llama el ÍNFIMO de B.

cota superior (A. *obere Schranke*, F. *majorant*, E. *upper bound*). Sea $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ un orden parcial. Sea $c \in A$. Sea $B \subseteq A$. c es una *cota superior* de B si y solo si c sigue a todos los elementos de B distintos de c, es decir, si $\forall x \in B : x \preccurlyeq c$. Cualquier elemento de A mayor que una cota superior de B es

una cota superior de B. B está acotado hacia arriba si y solo si posee al menos una cota superior. B está *acotado* si está acotado hacia arriba y hacia abajo. Si el conjunto de las cotas superiores de B tiene un mínimo, esta mínima cota superior se llama el SUPREMO de B.

cuantificador (A. *Quantor*, F. *quantificateur*, I. *quantifier*). En la lógica de primer orden, un cuantificador es una constante lógica que sirve para referirse indistintamente a elementos cualesquiera del universo de la interpretación. Los cuantificadores habituales son el generalizador o cuantificador universal $\forall$ (para todo) y el particularizador o cuantificador existencial $\exists$ (hay o existe un). Cada cuantificador va seguido de una variable individual, que queda cuantificada o ligada por él en la fórmula inmediatamente contigua a su derecha, que constituye el alcance del cuantificador. Cada uno de estos dos cuantificadores puede definirse en función del otro y de la negación. Así, $\forall x\varphi$ se define como $\neg\exists x\,\neg\varphi$. $\exists x\varphi$ se define como $\neg\forall x\,\neg\varphi$.

En la lógica de segundo orden, los cuantificadores habituales pueden ligar también variables conjuntistas para referirse indistintamente a subconjuntos cualesquiera del universo de la interpretación; también pueden ligar variables de relaciones o funciones.

También pueden construirse lógicas con otros cuantificadores Q, donde $Qx\varphi$ se lea, por ejemplo, como "existe un número finito de x tales que φ" o "existe una infinidad innumerable de x tales que φ", aunque con ello nos salimos de la lógica de primer orden. La lógica resultante de añadir el primer cuantificador no cumple el teorema de compacidad. La resultante de añadir el segundo no cumple el de Löwenheim-Skolem.

cuatrivector (A. *Vierervektor*, F. *quadrivecteur*, I. *4-vector*). Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real de cuatro dimensiones, provisto de un PRODUCTO ESCALAR f con signatura 2. $\langle\mathcal{V},f\rangle$ es entonces un *espacio vectorial de Minkowski* y sus elementos se llaman *cuatrivectores*. f es invariante bajo las TRANSFORMACIONES DE LORENTZ. Los cuatrivectores son por eso especialmente apropiados para la representación de cantidades físicas en el contexto de la teoría especial de la RELATIVIDAD. Siguiendo a Minkowski, las cantidades físicas así representadas se designan con el nombre de la cantidad clásica análoga, precedido por el prefijo *cosmo-* (A. *Welt-*, I. *world-*): COSMOVELOCIDAD, *cosmoaceleración*, *cosmomomento*, *cosmofuerza*.

cuerpo (A. *Körper*, F. *corps*, I. *field*). En matemáticas, un *cuerpo* es una estructura del tipo definido a continuación. Sea $\langle K,\oplus\rangle$ un GRUPO ABELIANO, con elemento neutro $\mathbf{0}$. Suponemos que K contiene por lo menos un elemento distinto de $\mathbf{0}$. Sea $\otimes: K \times K \to K$ una función tal que (i) $\langle K-\{\mathbf{0}\},\otimes\rangle$ es un grupo

abeliano con elemento neutro **1**, (ii) para cualquier $k \in K$, $k \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes k = \mathbf{0}$ y (iii) cualesquiera que sean $a,b,c \in K$, $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$. Entonces, $\langle K,\mathbf{0},\mathbf{1},\oplus,\otimes\rangle$ es un *cuerpo*. Sea $a \in K$. Si $a \neq \mathbf{0}$, a tiene dos inversos: uno por $\oplus$, que designamos con $-a$, y otro por $\otimes$, que designamos con a^{-1}.

Usando este simbolismo, es fácil comprobar que, si (i) K es el conjunto de todos los quebrados, (ii) **0** y **1** son el cero y el uno y (iii) $\oplus$ y $\otimes$ son, respectivamente, la suma y la multiplicación de quebrados, entonces $\langle K,\mathbf{0},\mathbf{1},\oplus,\otimes\rangle$ es un cuerpo, llamado $\mathbb{Q}$, el *cuerpo de los números racionales* (o *quebrados*).

cuerpo ordenado (A. *geordneter Körper*, F. *corps ordonné*, I. *ordered field*). Sea $\mathbb{K} = \langle K,\mathbf{0},\mathbf{1},\oplus,\otimes\rangle$ un CUERPO. Supongamos que K incluye una parte no vacía $P \subseteq K$ tal que (i) si $a \in P$ y $b \in P$, $a \oplus b \in P$ y $a \otimes b \in P$, y (ii) si $a \in K$, a cumple con una y solo una de las tres condiciones siguientes: $a \in P$, $a = \mathbf{0}$, o $-a \in P$. En tal caso, decimos que P es el conjunto de los elementos *positivos* de $\mathbb{K}$ y que $\mathbb{K}$ es un cuerpo *ordenado*. Esta denominación se justifica porque la existencia de P determina en $\mathbb{K}$ la relación de orden lineal $<$ (léase: "es menor que") definida por

$$a < b \text{ si y solo si } b \oplus -a \in P$$

Escribimos '$a \leq b$' por '$a < b$ o $a = b$'.

Sea H una parte no vacía del cuerpo ordenado $\mathbb{K}$. Decimos que H está acotado hacia arriba si hay un $m \in K$ tal que, para todo $h \in H$, $h < m$. El cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ se dice *completo* si cada parte suya acotada arriba tiene un SUPREMO.

El cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es *arquimediano* si, cualesquiera que sean los elementos a, $b \in \mathbb{K}$, si $a \in P$ (esto es, si $\mathbf{0} < a$), siempre existe un número natural n tal que b es menor que n veces a ($b < a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$, donde a es igual a cada uno de los n sumandos a_i) (↗POSTULADO DE ARQUÍMEDES).

Hilbert (1900) demostró que todo cuerpo ordenado, completo y arquimediano es isomorfo al cuerpo $\mathbb{R}$ de los NÚMEROS REALES.

cuerpo rígido (A. *starrer Körper*, F. *corps rigide*, I. *rigid body*). Decimos que un cuerpo material es *rígido* si la distancia entre sus puntos no varía. Obviamente, no hay cuerpos rígidos en la naturaleza. Pero abundan los sólidos que, en ciertas condiciones y para ciertos propósitos, pueden considerarse como aproximaciones a este ideal. El *cuerpo rígido* ideal puede definirse como una colección de partículas (sin volumen), que incluye al menos cuatro que no están todas sobre un mismo plano, y cuyo movimiento está constreñido de tal modo que la distancia entre dos partículas cualesquiera sea siempre la misma. Un cuerpo rígido K tiene *seis grados de libertad*, porque bastan seis co-

ordenadas numéricas para especificar exactamente su posición en el espacio, a saber, las tres coordenadas espaciales de cualquier punto A en K; dos ángulos que fijen la dirección desde A hacia otro punto B en K, y, finalmente, el ángulo que forma la recta AB con el plano determinado por A, B y un tercer punto arbitrario C.

Este concepto de *cuerpo rígido*, central en la MECÁNICA CLÁSICA, perdió importancia en la teoría especial de la RELATIVIDAD porque, según esta teoría, las distancias entre los puntos de un cuerpo dependen de cómo este se mueve relativamente al MARCO DE REFERENCIA inercial adoptado. Por ejemplo, si O, X, Y y Z son cuatro partículas unidas por segmentos rectos mutuamente perpendiculares OX, OY y OZ, cada uno de los cuales tiene un metro de longitud relativamente a un marco inercial $\mathcal{R}$ en que las cuatro partículas reposan, y $\mathcal{R}'$ es otro marco inercial que se mueve con respecto a $\mathcal{R}$ en dirección paralela a OX con velocidad $v > 0$, entonces, relativamente a $\mathcal{R}'$, OY y OZ miden un metro, pero OX mide menos de un metro. El triedro $OXYZ$ puede, claro, también reputarse rígido relativamente a $\mathcal{R}'$, puesto que la contracción de OX relativa a este marco es constante y los ángulos XOY, YOZ y ZOX siguen siendo rectos en él. Pero si O, X, Y y Z no reposan en ningún marco inercial, el triedro, referido a cualquiera de estos marcos, generalmente cambiará de tamaño y de forma sin cesar.

curva (A. *Kurve*, F. *curve*, I. *curve*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE. Una *curva* en $\mathcal{M}$ es una FUNCIÓN LISA $\gamma : \mathbf{I} \to \mathcal{M}$, donde $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. El *camino* de la curva γ es su recorrido $\gamma(\mathbf{I}) \subseteq \mathcal{M}$. (Esta es la terminología dominante hoy; pero hay libros en que estos términos aparecen intercambiados: se llama 'camino' a la función y 'curva' a su recorrido.) El argumento variable $u \in \mathbf{I}$ del que dependen los valores de γ se llama el *parámetro* de la curva.

Si $\gamma : \mathbf{I} \to \mathcal{M}$ y $\gamma' : \mathbf{I}' \to \mathcal{M}$ son dos curvas tales que $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{I}'$ y $\gamma(x) = \gamma'(x)$ para todo $x \in \mathbf{I}$ (esto es, si γ es la RESTRICCIÓN de γ' a $\mathbf{I}$), se dice que γ' es una *extensión* de γ. Una curva γ en $\mathcal{M}$ se dice *inextendible* si no existe ninguna curva en $\mathcal{M}$ que sea una extensión de γ.

Con arreglo a estas definiciones, diferentes curvas pueden compartir el mismo camino. Si $\gamma_1 : \mathbf{I}_1 \to \mathcal{M}$ y $\gamma_2 : \mathbf{I}_2 \to \mathcal{M}$ están en ese caso, hay un homeomorfismo $f : \mathbf{I}_1 \to \mathbf{I}_2$, tal que $\gamma_2 \circ f = \gamma_1$. Se dice entonces que f es una *reparametrización* de γ_1; también suele decirse que cada una de las curvas γ_1 y γ_2 es una reparametrización de la otra.

curva paramétrica de una coordenada (A. *parametrische Kurve einer Koordinatenfunktion*, F. *curve paramétrique d'une coordonnée*, I. *parametric curve of a coordinate function*). Sea u una CARTA definida en un abierto U de una

VARIEDAD DIFERENCIABLE real n-dimensional $\mathcal{M}$. Designamos con u^k la k-ésima coordenada de la carta u ($1 \leq k \leq n$). Cada punto $p \in U$ está en el camino de una curva γ tal que (i) el dominio de γ es un intervalo $I_\gamma \subseteq u^k(U)$, que γ aplica inyectivamente en U; (ii) para cada punto q en el camino de γ, $q = \gamma \circ u^k(q)$; (iii) para cada punto q en el camino de γ y cada índice $h \neq k$, $u^h(q) = u^h(p)$, y (iv) no hay una extensión de γ que cumpla las tres condiciones precedentes. γ es la *curva paramétrica* de la coordenada u^k que pasa por el punto p (o, si se prefiere, la k-ésima *curva paramétrica* por p, de la carta u).

curvatura (A. *Krümmung*, F. *curvature*, I. *curvature*). Sea ∇ una CONEXIÓN LINEAL sobre la VARIEDAD DIFERENCIABLE n-dimensional $\mathcal{M}$. Designamos con $\mathcal{V}(U)$ el módulo de los CAMPOS vectoriales sobre el abierto $U \subseteq \mathcal{M}$. Si X es un CAMPO vectorial definido en un abierto de $\mathcal{M}$, designamos con U_X el dominio de X.

Sean X y Y dos campos vectoriales en $\mathcal{M}$. Simbolizamos con $[X,Y]$ el campo vectorial definido en $U_X \cap U_Y$ por la condición

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

para cada campo escalar f sobre $U_X \cap U_Y$. Introducimos una función lineal $\mathcal{R}(X,Y): \mathcal{V}(U_X \cap U_Y) \rightarrow \mathcal{V}(U_X \cap U_Y)$, caracterizada por la condición siguiente: si Z es cualquier campo vectorial en $\mathcal{M}$, entonces

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

en $U_X \cap U_Y \cap U_Z$. La *curvatura* $\mathbf{R}$ de $\langle \mathcal{M}, \nabla \rangle$ es el CAMPO tensorial sobre $\mathcal{M}$, de tipo (1,3) que, para cualesquiera campos vectoriales X, Y y Z y cualquier campo de covectores ω en $\mathcal{M}$, satisface la ecuación

$$\mathbf{R}(\omega, X, Y, Z) = \omega(\mathcal{R}(X,Y)Z)$$

en $U_X \cap U_Y \cap U_Z \cap U_\omega$. Si $\mathbf{R}$ es idéntico a 0, se dice que $\langle \mathcal{M}, \nabla \rangle$ es una variedad *plana* y que ∇ es una conexión *plana*.

Los componentes de $\mathbf{R}$ relativos a una carta x definida en el abierto $U_x \subseteq \mathcal{M}$ son los n^4 campos escalares sobre U_x definidos por las ecuaciones

$$R^h_{ijk}(p) = R_p\left(dx^h\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \right)$$

$$p \in U_x \; ; \; 1 \leq i,j,k,h \leq n$$

Se puede demostrar que

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^h_{sj} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^h_{sk}$$

donde los símbolos Γ^h_{ij} representan los componentes de la conexión ∇ relativos a la carta x y, conforme a la CONVENCIÓN DE EINSTEIN, se sobreentiende la suma sobre índices repetidos.

R suele llamarse también el *tensor de Riemann* (pero hay quienes reservan este nombre a la curvatura que genera en una VARIEDAD RIEMANNIANA o semi-riemanniana la CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA correspondiente a la métrica). La CONTRACCIÓN C^1_3(**R**) de **R** respecto a los índices primero y tercero es el *tensor de Ricci*. La contracción del tensor de Ricci respecto de sus dos índices es el *escalar de curvatura*.

D

decidible (A. *entscheidbar*, F. *décidable*, I. *decidable*). Un conjunto es decidible si hay un algoritmo para decidir qué objetos le pertenecen y cuáles no. Sea $A \subseteq B$. La FUNCIÓN CARACTERÍSTICA de A (respecto a B) es una función χ_A: $B \rightarrow \{0,1\}$ tal que para cada $x \in B$, $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Si esta función es computable, el conjunto A es decidible. Un conjunto A es *decidible* si y solo si su función característica χ_A es recursiva. Los problemas decidibles son en principio triviales, y su solución, aunque a veces farragosa, puede ser confiada a un computador. El conjunto de los números primos es decidible. Dado un número natural cualquiera, siempre es posible decidir algorítmicamente si es primo o no. También es decidible si un sistema dado de ecuaciones lineales es soluble o no. Asimismo es decidible si una fórmula cualquiera de la lógica proposicional es válida o no. Sin embargo, es indecidible si una fórmula de primer orden es lógicamente válida o no, o si una fórmula es consecuencia de otra o no. Si un conjunto es decidible, *a fortiori* es enumerable, pero no a la inversa. Un *conjunto decidible* se llama también un CONJUNTO RECURSIVO.

deducción (A. *Ableitung*, F. *déduction*, I. *deduction*). Cuando argumentamos informalmente, procedemos paso a paso, infiriendo unas proposiciones de otras. Desde sus inicios, una de las tareas fundamentales de la lógica ha consistido en regimentar o simular formalmente este proceso de argumentación. Cada uno de los pasos inferenciales se debe ajustar a una REGLA DE INFERENCIA. El conjunto de las reglas de inferencia (complementado a veces por ciertas reglas técnicas de construcción) constituye un cálculo deductivo. Hay diversos tipos de cálculo deductivo, como los de DEDUCCIÓN NATURAL y los axiomáticos. Una deducción es una secuencia finita de fórmulas (o de configuraciones de fórmulas, en los cálculos de deducción natural), obtenida de acuerdo con las reglas del cálculo. En el caso más simple de un cálculo proposicional axiomático, en que todas las reglas son esquemas axiomáticos, excepto la regla del *MODUS PONENS*, cada fórmula de la deducción es una instancia de un esquema axiomático o se obtiene de dos fórmulas anteriores por

modus ponens. La última fórmula de la deducción es la fórmula deducida. La definición exacta de deducción no puede darse en general, sino que requiere la especificación previa de un cálculo deductivo determinado. En cualquier caso, si hay una deducción sin premisas de una fórmula φ en un cálculo deductivo K, decimos que φ es deducible sin premisas en K, abreviadamente $\vdash_K \varphi$. Si hay una deducción de una fórmula φ a partir de premisas de Γ en un cálculo deductivo K, decimos que φ es deducible de Γ en K, abreviadamente $\Gamma \vdash_K \varphi$.

deducción natural (A. *natürliches Schliessen*, F. *déduction naturelle*, I. *natural deduction*). Los primeros cálculos deductivos, empezando por el de Frege (1879), eran cálculos de tipo axiomático. El más conocido de ellos fue el ofrecido por Hilbert y Bernays en 1934. Este tipo de cálculos tienen la ventaja de ser muy fáciles de exponer (incluso tipográficamente, con la excepción del de Frege, por otras razones). Además, son los más adecuados para las pruebas metamatemáticas, pues simplifican mucho la inducción sobre las pruebas. Sin embargo, son muy poco intuitivos y muy difíciles de usar en la práctica para hacer deducciones, pues se apartan bastante de las pautas habituales del razonamiento matemático. Cuando razonamos y demostramos algo en matemáticas, nunca procedemos mediante largas cadenas de axiomas lógicos, sino que constantemente introducimos supuestos, hacemos pruebas indirectas, probamos algo en un caso concreto, etc. Los cálculos de deducción natural tratan de acercar el formalismo a los hábitos informales de razonamiento, por lo que su uso resulta más natural; de ahí su nombre.

El primer y más famoso cálculo de deducción natural fue introducido por Gentzen en 1934. El cálculo de Gentzen ofrece la peculiaridad de que para cada constante lógica contiene una regla de inferencia para introducirla y otra regla para eliminarla. Así, respecto al conector de conjunción o conjuntor ∧, contiene una regla de introducción del conjuntor (I∧) y otra de eliminación del conjuntor (E∧), y lo mismo ocurre, por ejemplo, con la introducción del cuantificador universal (I∀) y su eliminación (E∀):

$$(\mathrm{I}\wedge)\quad \frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \qquad\qquad (\mathrm{E}\wedge)\quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \qquad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

$$(\mathrm{I}\forall)\quad \frac{\varphi}{\forall x\, \varphi(a/x)} \ \text{si } a \text{ no aparece en ningún supuesto del que dependa } \varphi$$

$$(\mathrm{E}\forall)\quad \frac{\forall x \varphi}{\varphi(x/\tau)}$$

Ese mismo año 1934 Jaśkowski introdujo independientemente otro cálculo de ese tipo. Posteriormente una gran variedad de cálculos de deducción natural han sido introducidos por numerosos autores, como Beth, Smullyan, Bell, Machover, Kalish, Montague y Hodges, entre otros. El cálculo de Kalish y Montague incluye reglas específicas de construcción formal de deducciones correspondientes a los principales tipos de razonamiento informal matemático. Si queremos probar φ, lo indicamos escribiendo un signo de interrogación delante, $?\varphi$. Si φ es un condicional, $(\beta \Rightarrow \psi)$, podemos escribir como línea siguiente el antecedente, φ, y seguir deduciendo hasta obtener el consiguiente, en cuyo caso podemos tachar el interrogante que precede a φ, indicando que ya hemos probado φ. Esto corresponde a una prueba condicional. Después de $?\varphi$, podemos escribir lo contrario de lo que queremos probar, $\neg\varphi$, y seguir deduciendo hasta obtener una contradicción, es decir, una línea ψ y otra $\neg\psi$, en cuyo caso podemos tachar el interrogante que precede a φ, indicando que ya hemos probado φ. Esto corresponde a una prueba indirecta o por reducción al absurdo.

$?(\beta \Rightarrow \psi)$	$?\varphi$
$\mid\ \beta$	$\mid\ \neg\varphi$
$\mid\ .$	$\mid\ .$
$\mid\ .$	$\mid\ .$
$\mid\ .$	$\mid\ .$
$\mid\ \psi$	$\mid\ \psi$
	$\mid\ \neg\psi$

Prawitz y otros han llevado a cabo sofisticados estudios metamatemáticos de los cálculos de deducción natural y han investigado en detalle el papel de sus diversas reglas.

deducción trascendental (A. *transzendentale Deduktion*, F. *déduction transcendantale*, I. *transcendental deduction*). Expresión utilizada por Kant para designar una forma de argumentación utilizada por él para justificar la validez objetiva de sus CATEGORÍAS. Según lo alegado por Kant, el enlace de las apariencias sensibles mediante operaciones intelectuales regidas por leyes correspondientes a esas categorías es una condición necesaria para que dichas apariencias sean referidas a un objeto, lo cual a su vez es una condición necesaria para que se sostenga en el tiempo una conciencia autoconsciente de las mismas (para que el 'yo pienso' pueda acompañar a todas *mis* representaciones). Analógicamente, llámase a veces *argumento trascendental* a cualquier razonamiento dirigido a establecer la necesidad de algo mostrando que es un requisito que tiene que cumplirse para que sea posible otra cosa cuya necesidad o efectividad se da por descontada.

deducibilidad (A. *Ableitbarkeit*, F. *déductibilité*, I. *deducibility*). Una fórmula φ es deducible sin premisas en un cálculo deductivo *K*, simbolizado $\vdash_K \varphi$, si y solo si hay una DEDUCCIÓN de φ en *K* en la que no se han introducido premisas. Una fórmula φ es deducible a partir del conjunto Γ de fórmulas en un cálculo deductivo *K*, simbolizado $\Gamma \vdash_K \varphi$, si y solo si hay una DEDUCCIÓN de φ en *K* en la que se ha introducido un número finito de premisas de Γ. El cálculo deductivo *K* es correcto si y solo si todas las sentencias deducibles en *K* sin premisas son lógicamente válidas y todas las sentencias deducibles en *K* a partir de un conjunto Γ de premisas son consecuencias de Γ. El cálculo deductivo *K* es semánticamente completo si y solo si todas las sentencias lógicamente válidas son deducibles en *K* sin premisas y si todas las consecuencias de un conjunto cualquiera Γ de premisas son deducibles en *K* a partir de Γ.

definición (A. *Definition*, F. *définition*, I. *definition*). El verbo latino *definire* significa de-terminar, marcar los límites. La definición sirve para determinar el significado de una palabra, marcando los límites de su aplicación correcta. También sirve para introducir nuevas palabras, delimitando el sentido en que queremos usarlas. Aristóteles caracterizó la definición (ὅρος) como un enunciado en que el predicado gramatical es coextensivo con el sujeto y, además, expresa la esencia del sujeto. Si es coextensivo, pero no expresa la esencia, se trataría de una mera peculiaridad (ἴδιον). Esta concepción esencialista de la definición fue abandonada por la dificultad insalvable de establecer la diferencia entre peculiaridad y esencia. La tendencia ha sido a aceptar cualquier predicado coextensivo como definición. De todos modos, las palabras del lenguaje ordinario se usan de maneras variadas en diversos contextos y la definición lingüística o lexicográfica de una palabra puede aspirar a poco más que a describir sus varios usos. Sin embargo, en el lenguaje científico los conceptos empleados son definidos de un modo a la vez exacto y convencional. Este carácter de las definiciones es especialmente manifiesto en las matemáticas y las teorías matematizadas de la ciencia empírica.

Supongamos que T es una teoría de primer orden formulada en cierto lenguaje formal $\mathscr{L}$. Los parámetros de $\mathscr{L}$ son los símbolos primitivos de T. Una definición en T de un símbolo derivado o nuevo (no presente en $\mathscr{L}$) es una sentencia que establece el significado de ese nuevo símbolo en función de los signos primitivos (y de los derivados ya previamente introducidos). Esa sentencia suele ser un bicondicional generalizado. El miembro izquierdo del bicondicional, que contiene el símbolo nuevo, se llama el *definiendum*; el miembro derecho, que no lo contiene, se llama el *definiens*. La definición debe obedecer dos criterios formulados por S. Leśniewski en 1931: (1) el símbolo definido debe ser siempre eliminable de cualquier fórmula de la teoría; y (2)

la definición debe ser no creativa, es decir, no debe permitir la deducción de nuevas fórmulas de $\mathscr{L}$ (que no fueran ya deducibles sin la definición).

Una definición del predicado n-ario P en la teoría T es una sentencia $\forall x_1 \ldots \forall x_n(Px_1 \ldots x_n \Leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n))$, donde $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ es una fórmula abierta del lenguaje de T en la que no aparece P y sin otras variables libres que $x_1,\ldots, x_n$.

Una definición del functor n-ario f en la teoría T es una sentencia $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y(fx_1 \ldots x_n = y \Leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n,y))$, donde $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ es una fórmula abierta del lenguaje de T en la que no aparece f y sin otras variables libres que $x_1,\ldots, x_n$, a condición de que T $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ y de que T $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \forall z(\varphi(x_1,\ldots,x_n,y) \wedge \varphi(x_1,\ldots,x_n,z) \Rightarrow y = z)$.

Una definición de la constante individual (es decir, del functor 0-ario) c en la teoría T es una sentencia $\forall y(c = y \Leftrightarrow \varphi(y))$, donde $\varphi(y)$ es una fórmula abierta del lenguaje de T en la que no aparece c y sin más variable libre que y, a condición de que T $\vdash \exists y \varphi(y)$ y de que T $\vdash \forall y \forall z(\varphi(y) \wedge \varphi(z) \Rightarrow y = z)$. En especial, la definición de c puede tomar la forma $c = \tau$, donde τ es un término cerrado.

definición recursiva (A. *rekursive Definition*, F. *définition récursive*, I. *recursive definition*). Ciertos conjuntos, como el de los números naturales o el de los ordinales o el de los términos o las fórmulas de un lenguaje formal, se definen recursivamente o por recursión. Primero se indican sus elementos iniciales y luego se introducen unas operaciones de formación de nuevos miembros que, aplicadas a elementos ya obtenidos, permiten obtener nuevos elementos. Finalmente los conjuntos en cuestión se definen como la CLAUSURA del conjunto de los elementos iniciales respecto a las operaciones de formación. Cualquier propiedad, relación o función de elementos de ese conjunto (de números naturales u ordinales, de términos o fórmulas) puede también definirse por recursión mediante una definición recursiva, que sigue los pasos antes indicados. En el caso de una función de números naturales, por ejemplo, hablamos de definición recursiva, porque definimos el valor de la función para un argumento $n+1$ recurriendo al valor de esa función para n, que suponemos ya previamente definido.

Sea S la función numérica del siguiente, $S(x) = x+1$. Sea g: $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ una función numérica n-aria ($n \geq 0$) y sea h una función (n+2)-aria. Decimos que la función (n+1)-aria f está *definida recursivamente* con ayuda de g y h si y solo si para cualesquiera números naturales y, $x_1,\ldots, x_n$ ocurre que:

$$f(x_1,\ldots,x_n,0) = g(x_1,\ldots,x_n)$$

$$f(x_1,\ldots,x_n,S(y)) = h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n, y))$$

Por ejemplo, la adición y la multiplicación de números naturales (para un número natural dado x) pueden definirse recursivamente así:

$x+0 = 0$ $\qquad\qquad$ $x \cdot 0 = 0$

$x+S(y) = S(x+y)$ $\qquad\qquad$ $x \cdot S(y) = (x \cdot y)+x$

Las definiciones de funciones ordinales por RECURSIÓN TRANSFINITA se basan en el siguiente teorema, debido a von Neumann: Si h: $\Omega \rightarrow \Omega$ es una función de ordinales y $\delta \in \Omega$, entonces existe una función de ordinales f: $\Omega \rightarrow \Omega$, unívocamente determinada, tal que

1) $f(0) = \delta$
2) $f(S(\beta)) = h(f(\beta))$ para todo ordinal β
3) $f(\lambda) = \sup\{f(\gamma) : \gamma<\lambda\} = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\lambda)$ para todo ordinal límite λ

Por ejemplo, la adición de ordinales (para un ordinal dado α) puede definirse así:

1) $\alpha+0 = \alpha$
2) $\alpha+S(\beta) = S(\alpha+\beta)$
4) $\alpha+\lambda = \sup\{\alpha+\gamma : \gamma<\lambda\} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha+\gamma$ para todo ordinal límite λ

delta de Dirac (A. *Diracsche Deltafunktion*, F. *delta de Dirac*, I. *Dirac delta*). En sus contribuciones fundamentales a la MECÁNICA CUÁNTICA, a partir de 1926, Dirac utilizó en el análisis de estados cuánticos con espectro continuo la llamada función δ, que definió mediante las condiciones:

(i) $\qquad$ $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$, y

(ii) $\qquad$ $\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x) = 1$

De estas condiciones dedujo que, si $f(x)$ es cualquier función regular de x y a es un número real dado,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(a-x)dx = f(a)$$

Dirac reconoció que, "por supuesto, $\delta(x)$ no es propiamente una función de x, y solo puede considerarse como un límite de una secuencia de funciones". La delta de Dirac se deja concebir rigurosamente como un ejemplo de *distribución* (concepto generalizado de función definido más tarde por Laurent Schwartz).

delta de Kronecker (A. *Kroneckersches Symbol*, F. *delta de Kronecker*, I. *Kronecker delta*). Cualquiera de los símbolos δ_{ik}, δ^i_k o δ^{ik} utilizados en diferentes contextos para denotar los $n \times n$ elementos de una MATRIZ diagonal en que los elementos distintos de 0 son todos iguales a 1. Por lo tanto, $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ y $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$ $(1 \leq i,k \leq n)$; y otro tanto vale para δ^i_k y δ^{ik}.

demonio de Laplace (A. *Laplacescher Dämon*, F. *démon de Laplace*, I. *Laplace's demon*). Ser ficticio ideado por Laplace para ilustrar su concepción determinista del acontecer natural, y que describe así: "Una inteligencia que, en un instante dado, conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, si fuese lo bastante vasta como para someter estos datos al análisis [matemático], abarcaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del Universo y los del átomo más liviano: para ella nada sería incierto, y el porvenir, igual que el pasado, estaría presente a sus ojos" (*Œuvres complètes de Laplace*, t. VII, pp. vi-vii).

demonio de Maxwell (A. *Maxwellscher Dämon*, F. *démon de Maxwell*, I. *Maxwell's demon*). Ser ficticio introducido por Maxwell para ilustrar el carácter puramente estadístico de la segunda ley de la TERMODINÁMICA (carta a Tait de 11.12.1867). Maxwell imagina un recipiente lleno de gas a temperatura uniforme, dividido en dos partes A y B por un diafragma con un pequeño orificio cerrado con una tapa corrediza de masa insignificante, e invita a concebir un ser finito que es capaz de seguir el curso de cada molécula e incapaz de hacer otro trabajo que el de abrir y cerrar la tapa. El geniecillo observa primero las moléculas en A. En cuanto ve venir hacia el orificio una molécula cuya velocidad es menor que el cuadrado de la velocidad media de las moléculas en B, abre momentáneamente la tapa y la deja entrar en B. Luego presta atención a las moléculas en B. En cuanto ve venir una cuya velocidad es mayor que el cuadrado de la velocidad media de las moléculas en A, abre momentáneamente la tapa y la deja entrar en A. La reiterada aplicación de este procedimiento ocasiona un aumento de la temperatura en la parte A del recipiente y una disminución de la temperatura en la parte B, contradiciendo la segunda ley.

Brillouin (1951) señaló que el demonio de Maxwell no podría ver las moléculas, pues la radiación contenida en un recipiente cerrado a temperatura uniforme es RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO. Si se equipa al demonio con una linterna eléctrica para que las ilumine, se introduce una fuente de radiación que no está en equilibrio con el contenido del recipiente. La linterna vierte entropía negativa en el recipiente, y no es posible tratarlo como un sistema cerrado sujeto a la segunda ley.

denotación y sentido (A. *Bedeutung und Sinn*, F. *dénotation et sens*, I. *reference and sense*). Cabe sostener que la semántica filosófica moderna comienza cuando Frege (1892) introduce un distingo entre dos términos, *Sinn* y *Bedeutung*, que hasta el día de hoy se emplean comúnmente en alemán como sinónimos (en la acepción de 'significado'). Decimos 'sentido' por *Sinn*; 'denotación' o 'referencia' por *Bedeutung* (según la define Frege).

Frege considera primero ambos términos en cuanto se aplican a lo que él llama un NOMBRE PROPIO (A. *Eigenname*), esto es, cualquier palabra, frase o signo que designa un objeto particular. La *denotación* de un nombre propio es justamente el objeto que designa; su *sentido* es el modo como presenta al objeto designado. Por ejemplo, si *a*, *b* y *c* son tres rectas concurrentes, la frase "la intersección de *a* y *b*" designa el mismo punto que la frase "la intersección de *b* y *c*", y así comparte con ésta la denotación, pero ambas frases no tienen el mismo sentido. También, las frases "el creador de la teoría de la relatividad general" y "el connotado pacifista que instó al presidente de los Estados Unidos a financiar el invento de la bomba atómica" denotan a Albert Einstein, pero lo presentan de distintas maneras. Otro tanto ocurre con "Leningrado" y "San Petersburgo".

Luego, Frege considera los enunciados. Según él, el *sentido* de un enunciado en modo indicativo es el "pensamiento" (A. *Gedanke*) que dicho enunciado "contiene", esto es, "no la actividad subjetiva de pensarlo, sino su contenido objetivo, que es capaz de ser la propiedad común de muchos". Por otra parte, la *denotación* de un enunciado no puede, según él, ser otra cosa que el valor veritativo del mismo. No cabe discutir aquí esta conclusión sorpresiva (y rechazada por muchos). Ella se funda en que hay contextos —llamados *extensionales*— donde es posible intercambiar sin menoscabo de la verdad dos nombres propios si y solo si denotan un mismo objeto, y dos enunciados si y solo si tienen el mismo valor veritativo. Con respecto a los contextos en que tal intercambio no puede efectuarse *salva veritate*, sostiene Frege que los nombres propios y los enunciados que figuran en ellos se utilizan allí para referirse al *sentido* respectivo y no al objeto que habitualmente *denotan*.

densidad crítica (A. *kritische Dichte*, F. *densité critique*, I. *critical density*). En el modelo cosmológico estándar, el destino del Universo depende de su densidad. La noción cosmológica de densidad crítica es comparable con la noción de velocidad de escape (la velocidad más allá de la cual el cohete lanzado al espacio ya no regresa a la Tierra) en cohetería espacial. Si su densidad es alta, el Universo dejará de expandirse a partir de cierto momento y se contraerá hasta acabar en una nueva singularidad, en una gran implosión (*Big Crunch*). Si su densidad es baja, seguirá expandiéndose indefinidamente. La frontera la marca la densidad crítica, ρ_{crit}, aquella densidad más allá de la cual

el Universo está condenado a contraerse. La densidad crítica del Universo $\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, donde H_0 es la constante de Hubble y G es la constante gravitacional. Suponiendo un valor de 70 km/s/Mpc para la constante de Hubble, la densidad crítica en el Universo actual sería de unos 10^{-26} kg/m^3, lo que equivale aproximadamente a 6 átomos de hidrógeno por cada m^3 de espacio. El PARÁMETRO DE DENSIDAD $\Omega = \Omega_{tot}$ mide la razón de la densidad de energía total del Universo ρ_{tot} a la densidad crítica ρ_{crit}: $\Omega_{tot} = \rho_{tot}/\rho_{crit} = \Omega_M + \Omega_\Lambda$.

denso (A. *dicht*, F. *dense*, I. *dense*). Sea $\mathcal{S} = \langle S,T\rangle$ un ESPACIO TOPOLÓGICO. El subconjunto $M \subseteq S$ es denso en $\mathcal{S}$ si y solo si, cualquiera que sea el punto $p \in S$, hay un punto de M en cada entorno de p.

derivada (A. *Ableitung*, F. *derivée*, I. *derivative*). La derivada de una función mide la rapidez (o lentitud) con que varía su valor según varía su argumento. Definiremos (1) el concepto más familiar de la derivada de una función con argumentos y valores en $\mathbb{R}$, y (2) el concepto más general de la derivada de una función $f:\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son ESPACIOS DE BANACH.

1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. La derivada de la función $f: I \to \mathbb{R}$ en el punto $u \in I$ es el límite a que tiende el cociente $(f(u+h) - f(u))/h$ cuando h tiende al límite 0. Simbólicamente:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=u} = \lim_{h\to 0}\frac{f(u+h)-f(u)}{h}$$

La función f es *diferenciable* en u si dicho límite existe. La función f es *diferenciable* si es diferenciable en todos los puntos de su dominio I. En tal caso, existe la función $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ de I en $\mathbb{R}$, la cual asigna a cada $u \in I$ la derivada de f en u. Esta función puede, obviamente, tener o no una derivada en cualquier punto de I y en todos ellos. La derivada de $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ en $u \in I$ es la segunda derivada (o derivada de segundo orden) de f en u, simbolizada con $\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=u}$. Repitiendo esta construcción, y siempre que los límites requeridos existan, se define la derivada r-ésima (o de r-ésimo orden) de f en un punto $u \in I$, y en su dominio entero (simbolizada esta última con $\mathrm{d}^r f/\mathrm{d}x^r$).

2. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios de Banach, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ un abierto y $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ un vector cualquiera. Consideremos dos funciones $f_1:\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ y $f_2:\mathcal{U} \to \mathcal{W}$. Porque $\mathcal{U}$ es un abierto de la topología de $\mathcal{V}$, si r es cualquier número real positivo suficientemente pequeño, el conjunto

$$\{\|f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})\| : \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| < r\}$$

es un conjunto no vacío y acotado de números reales positivos, que tiene, por lo tanto, un SUPREMO $\mu(r)$. Diremos que f_1 y f_2 son *tangentes en* $\mathbf{u}$ si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que $r < \delta$ implica que $\mu(r)/r < \varepsilon$. (En otras palabras, f_1 y f_2 son *tangentes en* $\mathbf{u}$ si el cociente $\mu(r)/r$ tiende al límite 0 cuando r tiende a 0.) En tal caso, suele decirse que $\mu(r) = o(r)$.

Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ como en el párrafo anterior. La función $f:\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ es *diferenciable* en $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ si f es una FUNCIÓN CONTINUA y existe una FUNCIÓN LINEAL $g:\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ tal que las funciones $\mathbf{x} \mapsto (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{u}))$ y $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ son tangentes en $\mathbf{u}$. Esta condición puede expresarse así:

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{u}) - g(\mathbf{x} - \mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|)$$

Si f es diferenciable en $\mathbf{u}$, la susodicha g es única y continua. Se llama la *derivada* de f *en* $\mathbf{u}$ y se designa con $f'(\mathbf{u})$.

f es *diferenciable* si es diferenciable en todo su dominio $\mathcal{U}$. En tal caso, la función $f':\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ por $\mathbf{u} \mapsto f'(\mathbf{u})$ es la *derivada* de f (donde $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ es el espacio de las funciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$; ↗FUNCIÓN LINEAL). Como es posible definir en forma análoga la derivada f'' de f', etc., suele llamarse a f' la *derivada de primer orden*, a f'' la *derivada de segundo orden*, etc., de la función f.

derivada covariante (A. *kovariante Ableitung*, F. *derivée covariante*, I. *covariant derivative*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE n-dimensional. Sea ∇ una CONEXIÓN LINEAL sobre $\mathcal{M}$. Si V es un CAMPO vectorial en $\mathcal{M}$ y W es un campo tensorial de tipo (r,s) en $\mathcal{M}$ ($r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s > 0$), ∇ asigna a V y W un campo tensorial de tipo (r,s), definido en la intersección de los dominios de V y W, que cumple las condiciones siguientes:

DC1 Si $r = 1$ y $s = 0$, esto es, si W es un campo vectorial, $\nabla_V W$ es precisamente el campo vectorial designado con este símbolo conforme a la definición de la CONEXIÓN LINEAL ∇.

DC2 Si Z es un campo tensorial de tipo (r,s) en $\mathcal{M}$ y a y b son números reales (o complejos, si $\mathcal{M}$ es una variedad compleja), entonces, en la intersección de los dominios de V, W y Z,

$$a\nabla_V W + b\nabla_V Z = \nabla_V(aW + bZ)$$

(en otras palabras, la función $W \mapsto \nabla_V W$ es $\mathbb{R}$-lineal o $\mathbb{C}$-lineal, según que $\mathcal{M}$ sea una variedad real o compleja).

DC3 Si Z es un campo tensorial en $\mathcal{M}$ de cualquier tipo, entonces, en la intersección de los dominios de V, W y Z,

$$\nabla_V(W \otimes Z) = \nabla_V W \otimes Z + W \otimes \nabla_V Z$$

(donde $\otimes$ simboliza el PRODUCTO TENSORIAL entre campos tensoriales en $\mathcal{M}$).

DC4 Si C es cualquier CONTRACCIÓN, $\nabla_V \circ C = C \circ \nabla_V$.

Como se indicó bajo CONEXIÓN LINEAL, si V es el campo vectorial $\partial/\partial x^k$ definido por la carta x, en vez de $\nabla_{\partial/\partial x^k}$, escribimos ∇^k.

Ocasionalmente, dado un campo escalar f en $\mathcal{M}$, el campo escalar $Vf : p \rightarrow V_p(f)$, definido en la intersección de los dominios de V y f, se llama 'derivada covariante de f en la dirección del campo vectorial V' y se lo denota con $\nabla_V f$. En particular, la derivada covariante de f en la dirección de $\partial/\partial x^k$ es precisamente la DERIVADA PARCIAL: $\nabla^k f = \partial f/\partial x^k$.

Si W es cualquier campo tensorial de tipo (r,s) en $\mathcal{M}$, la *derivada covariante* (absoluta) de W es el campo tensorial ∇W, de tipo $(r,s+1)$, definido en el dominio de W por la ecuación

$$\nabla W(\omega_1, \ldots, \omega_r, V_1, \ldots, V_s, V) = (\nabla_V W)(\omega_1, \ldots, \omega_r, V_1, \ldots, V_s, V)$$

donde $\omega_1, \ldots, \omega_r$ son cualesquiera campos de covectores y $V, V_1, \ldots, V_r$ son cualesquiera campos vectoriales, definidos en el dominio de W.

Los conceptos definidos aquí hallan aplicación en la física de la RELATIVIDAD general. Los FIBRADOS a que recurre la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS dan lugar a conceptos más generales de *conexión* y de *derivada covariante*, utilizados en la caracterización de transformaciones *gauge*.

derivada parcial (A. *partielle Ableitung*, F. *derivée partielle*, I. *partial derivative*). La derivada parcial de una función cuyo argumento depende de más de una variable mide la rapidez (o lentitud) con que varía su valor según varía una de esas variables mientras las demás permanecen fijas. Definiremos este concepto para el caso de una función con argumento en $\mathbb{R}^n$ y valores en $\mathbb{R}$.

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ (↗TOPOLOGÍA, TOPOLOGÍA ESTÁNDAR EN $\mathbb{R}^n$). Sea π_k: $U \rightarrow \mathbb{R}$ la función que asigna a cada n-TUPLO $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \mathrm{x} \in U$ su k-ésimo término x_k. Sea $\tau_k : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la función que asigna a cada $\mathrm{x} \in U$ el $(n-1)$-tuplo $\langle x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n\rangle$. Es claro que toda función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ determina, para cada entero positivo $k \leq n$ y cada $(n-1)$-tuplo $\langle u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_n\rangle \in \tau_k(U)$ una función φ: $\pi_k(U) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la ecua-

ción $\varphi(x) = f(u_1,\ldots,u_{k-1},x,u_{k+1},\ldots,u_n)$. Si φ es diferenciable en $u \in \pi_k(U)$, esto es, si existe el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(u+h)-\varphi(u)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(u_1,\ldots,u_{k-1},u+h,u_{k+1},\ldots,u_n)-f(u_1,\ldots,u_{k-1},u,u_{k+1},\ldots,u_n)}{h}$$

decimos que f es *diferenciable* en $\mathbf{u} = \langle u_1,\ldots,u_{k-1},u,u_{k+1},\ldots,u_n\rangle \in U$ *con respecto a la k-ésima variable*. El límite mencionado es *la k-ésima derivada parcial de f* (o *la derivada parcial de f con respecto a la k-ésima variable*) en el punto $\mathbf{u} \in U$ y se designa con el símbolo:

$$\left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}}$$

f es *diferenciable con respecto a la k-ésima variable* si lo es en cada punto de su dominio. En tal caso, existe la función de U en $\mathbb{R}$ por $\mathbf{u} \mapsto \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}}$

Esta función es la primera derivada parcial de f con respecto a la k-ésima variable y se designa con $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_k$. La derivada parcial de *esta* función con respecto a la *k-ésima variable* es la segunda derivada parcial (o derivada parcial de segundo orden) de f con respecto a la k-ésima variable y se designa con $\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_k^2$. Repitiendo esta construcción, y siempre que los límites requeridos existan, puede definirse la r-ésima derivada parcial de f con respecto a la k-ésima variable, para cualquier entero positivo r (el símbolo utilizado para designarla es $\partial^r f(\mathbf{x})/\partial x_k^r$). La derivada parcial $\partial^r f(\mathbf{x})/\partial x_k^r$ $(r \geq 1)$ puede ser diferenciable con respecto a variables distintas de la k-ésima. Por una construcción análoga a la utilizada para definir $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_k$ se definen entonces derivadas parciales mixtas. Por ejemplo, si $n = 3$, puede que existan las segundas derivadas $\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_1\partial x_2$, $\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_1\partial x_3$, $\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_2\partial x_3$, las derivadas terceras $\partial^3 f(\mathbf{x})/\partial x_1^2\partial x_2$, $\partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_1\partial x_2\partial x_3$, etc. Conviene observar que, aunque generalmente el orden de las variables no importa, hay casos especiales en que

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k\partial x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right) \neq \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_h}\right) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_h\partial x_k}$$

(y una situación similar puede producirse, por cierto, con derivadas mixtas de orden superior a 2).

El concepto de derivada parcial de cualquier orden, mixta o no, se extiende de un modo natural a cualquier función f cuyo dominio es un abierto de un ESPACIO DE BANACH que sea el producto de espacios de Banach y cuyo codominio también es un espacio de Banach.

descripción (A. *Kennzeichnung*, **F.** *description*, **I.** *description*). En el lenguaje ordinario solemos decir que describimos algo cuando enunciamos consecutivamente algunos de sus rasgos más o menos visibles. En la jerga filosófica llamamos descripción definida a una expresión que empieza por el artículo determinado 'el' o 'la' y enuncia una condición que parece caracterizar unívocamente a un objeto. Si efectivamente es así, es decir, si hay un objeto y solo uno que satisface la condición descriptiva, decimos que se trata de una descripción propia; si no hay ningún objeto que la satisfaga o si hay más de uno, hablamos de descripción impropia. La expresión 'el mínimo número natural' es una descripción propia que se refiere al 0. ¿A qué se refiere la descripción impropia 'el máximo número natural'? Para evitar seudoproblemas es importante ser consciente de que no todas las descripciones definidas se refieren a algo. Muchas descripciones, incluso consideradas en su contexto, son impropias y carecen de referencia. El problema de las descripciones impropias fue analizado por Russell en 1905 y ha concitado considerable interés en la filosofía analítica.

El lenguaje formal de la lógica de primer orden puede extenderse con la introducción de una nueva constante lógica, el descriptor, que es un operador ι que liga a una variable x y va seguido de una fórmula φ (en la que normalmente x está libre) para formar un término $\iota x\varphi$, que se lee el x tal que φ. Por ejemplo, el mínimo número natural es $\iota x \forall y(x \leq y)$. En la interpretación estándar de la aritmética $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}(\iota x \forall y(x \leq y)) = 0$. En una interpretación, cada término del lenguaje formal designa un individuo del universo. ¿Qué individuo designa el término $\iota x \forall y(x \geq y)$, que en la interpretación estándar sería el número mayor de todos (que no existe)? Russell propuso eliminar las descripciones del lenguaje, considerando las fórmulas en que aparecen como meras abreviaturas de otras en que no aparecen. Así, una fórmula $\alpha(\iota x\varphi(x))$ que afirma α del x tal que φ sería una abreviatura de la fórmula $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \Rightarrow y = x) \wedge \alpha(x))$, en la que no aparece descripción alguna, sino que se limita a afirmar que hay un y solo un individuo que cumple φ y que ese individuo cumple también α. Por tanto, podemos decir sin contradecirnos que aquello de lo que hablamos (el ser supremo o la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas) no existe, que es lo que le interesaba a Russell. De todos modos, en el lenguaje matemático a veces resulta conveniente disponer de expresiones de límites, derivadas e integrales, por ejemplo, que son descripciones. Frege prefería seguir conservando las descripciones en el

lenguaje formal, pero introducía la convención semántica de que cada interpretación ha de elegir un individuo del universo como cabeza de turco a la que referir todas las descripciones impropias. Esta solución de Frege, adoptada también por Carnap, es la que menos problemas formales plantea, pero resulta muy poco natural. Hilbert prefería no introducir una descripción $\imath x\varphi(x)$ en el lenguaje de una teoría hasta que se hubiera probado en ella el teorema $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \Rightarrow y = x))$ que afirma la existencia y unicidad del x tal que $\varphi(x)$. Este proceder corresponde a la práctica usual, pero tiene el inconveniente de que el conjunto de los términos y de las fórmulas dejan de ser decidibles y varían con el tiempo. En definitiva, en la lógica hay varias maneras aceptables de tratar las descripciones, aunque ninguna de ellas resulta del todo satisfactoria.

descripción de estado (A. *Zustandsbeschreibung*, F. *description d'état*, I. *state description*). Sea $\mathscr{L}$ un LENGUAJE FORMAL de primer orden. Sea $\mathscr{A}$ el conjunto de todos los enunciados atómicos de $\mathscr{L}$ (esto es, de todos los enunciados formados por un predicado n-ádico seguido de n constantes individuales). Carnap (1947) llama *descripción de estado* a un conjunto $\mathscr{S}$ de enunciados de $\mathscr{L}$, tal que, para cada $\sigma \in \mathscr{A}$, o bien $\sigma \in \mathscr{S}$, o bien $\neg\sigma \in \mathscr{S}$. Según él, este nombre es apropiado, pues los enunciados de $\mathscr{S}$ "obviamente dan una descripción completa de un estado posible del universo de individuos con respecto a todas las propiedades y relaciones expresadas por predicados" de $\mathscr{L}$. Así, "las descripciones de estados representan los MUNDOS POSIBLES de Leibniz o los estados de cosas posibles de Wittgenstein".

designador (A. *Bezeichner*, F. *terme clos*, I. *closed term*). Así como una SENTENCIA de un lenguaje formal es una fórmula sin variables libres, un *designador* es un término sin variables libres. Un designador puede ser un nombre propio o constante individual, como 3 o ∅, o un término functorial $f\tau_1 \ldots \tau_n$ formado por un functor n-ario f y n designadores $\tau_1 \ldots \tau_n$, como 3 + 5. En un lenguaje formal extendido con DESCRIPCIONES, donde $\imath$ es el descriptor y $\varphi(x)$ es una fórmula cuya única variable libre es x, $\imath x\varphi(x)$ es también un designador, aunque Hilbert no permite introducirlo si previamente no hemos probado que hay un y solo un x tal que $\varphi(x)$. Un término con variables libres, por ejemplo un polinomio, como $2x^2 + y$, es un término abierto. Un designador es un término cerrado.

desintegración beta (A. *Beta-Zerfall*, F. *radioactivité bêta*, I. *beta decay*). Proceso por el cual un neutrón se transforma en un protón, emitiendo un electrón (anteriormente llamado rayo beta, de donde el nombre; ↗RADIACTIVIDAD) y un antineutrino electrónico. El electrón se lleva la carga eléctrica sobrante

y el antineutrino se lleva la energía sobrante, de tal modo que la carga y la energía totales se conserven. En realidad, la desintegración beta está mediada por la interacción nuclear débil, y en concreto por su bosón *gauge* W^-. En efecto, el neutrón que se desintegra emite un bosón W^-, que casi inmediatamente se transforma en un electrón y su correspondiente antineutrino electrónico.

desviación gravitacional de la luz (A. *gravitationelle Beugung des Lichts*, F. *déviation gravitationelle de la lumière*, I. *gravitational light deflection, gravitational bending of light*). Según la teoría general de la RELATIVIDAD, una señal luminosa trasmitida en el vacío describe en el espaciotiempo una geodésica nula. El trayecto de estas geodésicas depende de la estructura del campo gravitacional. En la proximidad de grandes concentraciones de materia el campo se hace más intenso alterando la forma habitual de ese trayecto en regiones donde el campo es débil. Una consecuencia de ello es el efecto descrito a continuación, que Arthur Eddington habría observado durante el eclipse total de Sol de 1919.

Sean *A* y *B* dos estrellas cuya distancia angular en la bóveda celeste es aproximadamente igual al ángulo subtendido por el Sol. Si el Sol se encuentra situado momentáneamente entre esas estrellas y la Tierra, las geodésicas nulas trazadas por los fotones que nos llegan desde ellas sufren, en la vecindad del Sol, una desviación que las separa, aumentando la distancia angular entre las imágenes observadas de *A* y *B*. Obviamente, la observación óptica de *A* y *B* no es posible en las condiciones prescritas, si el Sol está visible, pues su brillo oculta inexorablemente todas las estrellas. Pero una foto del Sol durante un eclipse total exhibe estrellas como *A* y *B* cuya distancia angular puede compararse con la distancia angular entre las mismas estrellas cuando el Sol estaba en otra región del cielo. En particular, se podrá observar a ambos lados del Sol, cerca de su corona, estrellas cuya distancia angular normal es un poco menor que el ángulo subtendido por el Sol. Específicamente, la teoría general de la relatividad predice una desviación de 1,75″ en la dirección de un rayo de luz que pase bordeando el Sol.

Eddington anunció haber observado una desviación de esta magnitud, aunque con un margen de error bastante grande. En eclipses posteriores, otros astrónomos obtuvieron resultados diferentes. La cuestión solo vino a resolverse después de 1960, cuando el progreso de la radioastronomía hizo posible observar las estrellas a plena luz del Sol. Las mediciones sumamente precisas obtenidas por el método de interferometría de base muy larga (I. *very long baseline interferometry*) confirman sin lugar a dudas la predicción relativista.

determinismo (A. *Determinismus*, F. *déterminisme*, I. *determinism*). Conviene distinguir entre *determinismo físico* y *metafísico* y aprovechar la precisión del primero para arrojar luz sobre el significado y las pretensiones del segundo (aunque este surgió antes y promovió la formación de aquel).

a. *Determinismo físico*. Decimos que un sistema físico es determinista si su ESTADO en un momento dado determina unívocamente su estado en cualquier otro momento de su existencia. Si la evolución del sistema está regida por ecuaciones diferenciales, las propiedades matemáticas típicas de estas (existencia y unicidad de las soluciones) aseguran el determinismo del sistema. La representación de un proceso natural mediante un modelo determinista permite predecir su desarrollo y brinda una comprensión —ordinariamente reputada satisfactoria— de la necesidad de este. Conviene, sí, no perder de vista las siguientes limitaciones:

(i) La predicción de estados futuros (y la "retrodicción" de estados pasados) de un sistema determinista S se basa en el conocimiento de su estado actual. Como es imposible conocerlo con perfecta precisión, la predicción (o "retrodicción") tiene que ser imprecisa, y su inexactitud suele aumentar con el lapso de tiempo entre el momento actual y el estado predicho (o "retrodicho"). Esta limitación es particularmente grave si la evolución de S está regida por ecuaciones diferenciales con soluciones inestables, esto es, tales que una pequeñísima diferencia en el estado inicial dé lugar a una divergencia muy grande y rápidamente creciente entre los estados que le suceden (o preceden). Se dice, en tal caso, que la evolución de S, aunque estrictamente determinista, es *caótica* (↗CAOS).

(ii) La evolución determinista del sistema S con arreglo a las ecuaciones diferenciales del modelo con que se lo representa está asegurada solo en la medida en que S sea un sistema cerrado, sustraído a la injerencia de factores externos, que no se hayan tenido en cuenta en la especificación del estado inicial. En el mundo no hay sistemas perfectamente cerrados. Earman (1986) ha subrayado que, como la mecánica newtoniana admite la acción instantánea a distancia, cualquier sistema regido por ella está expuesto en todo momento a la acción súbita de fuerzas de cualquier magnitud ejercidas desde cualquier distancia. Ello limita severamente el alcance del determinismo en la física clásica.

(iii) La teoría de la RELATIVIDAD (especial y general), que fija una cota superior a la velocidad de transmisión de la acción física, escapa obviamente a la limitación (ii). Un modelo (realización) $\mathcal{M}$ de esta teoría es cabalmente determinista si y solo si incluye una superficie de Cauchy, definida como sigue. Una hipersuperficie (esto es, una "loncha" tridimensional) $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ es una superficie parcial de Cauchy si $\mathcal{S}$ es espacialoide y ninguna curva no es-

pacialoide intersecta más de una vez a $\mathcal{S}$; el dominio de dependencia $\mathfrak{D}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ es la unión del futuro CAUSAL y el pasado CAUSAL de $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}$ es una superficie global de Cauchy o *superficie de Cauchy* a secas si y solo si $\mathfrak{D}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ contiene una superficie de Cauchy $\mathcal{S}$, la historia completa de $\mathcal{M}$ está determinada por el valor de las variables dinámicas sobre $\mathcal{S}$. Obviamente, dicho valor puede ser conocido para todo $\mathcal{S}$ solo por alguien situado en el futuro causal de *cada* punto de $\mathcal{S}$. Por otra parte, no hay ninguna razón para suponer que un modelo relativista satisfactorio del Universo real incluiría una superficie de Cauchy. Entre las soluciones exactas de las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN que se conocen, hay varias que no la incluyen.

Desde el advenimiento de la MECÁNICA CUÁNTICA y su PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE (o de indeterminación), suele escucharse que el determinismo físico ha llegado a su fin. Sin embargo, un sistema mecánico cuántico, esto es, un sistema cuya evolución está regida por la ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER, no es ni un ápice menos determinista que un sistema mecánico clásico, regido por las ECUACIONES DE HAMILTON. Si $|\psi(t_0)\rangle$ es el estado de un sistema mecánico cuántico S en un momento t_0, la ecuación de Schrödinger permite calcular exactamente su estado $|\psi(t)\rangle$ en cualquier otro momento t, siempre que la evolución de S entre t_0 y t no esté expuesta a intervenciones externas. La indeterminación cuántica tiene que ver más bien con la índole de los estados $|\psi(t_0)\rangle$ y $|\psi(t)\rangle$. Si Q es una cantidad física observable en el sistema S, representada por un OPERADOR LINEAL Q, el estado $|\psi(t)\rangle$ conlleva un determinado valor $q(t)$ de la cantidad Q en el momento t si y solo si $|\psi(t)\rangle$ es un vector propio de Q, esto es, si y solo si ocurre que $\mathsf{Q}|\psi(t)\rangle = q(t)|\psi(t)\rangle$. En general, esto no ocurre, y el estado $|\psi(t)\rangle$ prescribe solamente la distribución de las probabilidades entre los distintos valores posibles de Q en t. Lo mismo vale, por cierto, para el estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$; el sistema S puede ciertamente prepararse de modo que $|\psi(t_0)\rangle$ sea un vector propio del operador representativo de alguna cantidad física de interés, pero entonces, inevitablemente, $|\psi(t_0)\rangle$ no es un vector propio de muchísimas otras cantidades físicas no menos interesantes y, por lo tanto, no lleva aparejado un valor de cada una de ellas, sino distribuciones de probabilidades entre los valores posibles respectivos. Por otra parte, aunque la conservación de importantes propiedades del sistema S y su estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ está asegurada por la ecuación de Schrödinger, esta no garantiza que, si preparamos a S de modo que $|\psi(t_0)\rangle$ sea un vector propio de un operador cualquiera Q, $|\psi(t)\rangle$ será también un vector propio de Q para $t \neq t_0$. Por lo tanto, el determinismo cuántico no permite, en general, predecir con certeza el valor futuro $q(t)$ de cualquier cantidad física observable en S y cuyo valor actual $q(t_0)$ sea conocido.

b. *Determinismo metafísico.* A la luz de la noción precisamente definida de *determinismo físico*, el *determinismo metafísico* puede caracterizarse simplemente como la extrapolación de aquel a todo el acontecer. Esta extrapolación tendría sentido si poseyésemos un modelo matemático adecuado del devenir universal en todos sus detalles, aunque no fuéramos capaces de registrar todas las cantidades que fijan cada uno de sus estados, ni de resolver las ecuaciones con arreglo a las cuales estos se suceden. Pero no tenemos ese modelo, y si alguien lo propusiera, no sería fácil corroborarlo. De hecho, ni siquiera sabemos si el Universo posee la estabilidad causal sin la cual ni siquiera tiene sentido asignar a todo él *un* estado en *cada* momento (y especular sobre una supuesta concatenación de los mismos). Mientras estas lagunas del saber persistan, el determinismo metafísico no pasará de ser un sueño de la razón, cuya falta de base y aun de contenido queda en evidencia al compararlo con los determinismos, limitados pero efectivos, de la física.

día (A. *Tag*, F. *jour*, I. *day*). De buenas a primeras, se puede definir el *día* (de 24 horas) como el tiempo que demora la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje. Para mayor precisión, conviene distinguir entre el *día solar*, que es el lapso de tiempo entre dos tránsitos sucesivos del Sol por el meridiano, y el *día sideral*, o lapso de tiempo entre dos sucesivos tránsitos por el meridiano de una estrella distinta del Sol. El día sideral es unos cuatro minutos más breve que el día solar, debido a que la Tierra se traslada alrededor del Sol en el mismo sentido en que gira en torno a su eje, y, por lo tanto, en el lapso de un año —digamos, entre dos solsticios de verano sucesivos— trascurre exactamente un día sideral más que el número de días solares trascurridos (aproximadamente 366,25636 días siderales y 365,25636 días solares). Además, el día solar varía a lo largo del año —debido a la cambiante velocidad de la Tierra en su órbita elíptica— y el 23 de septiembre dura 51 segundos menos que el 23 de diciembre. Por eso, una unidad de tiempo más práctica que el día solar es el *día solar medio*, igual a la duración media de todos los días solares del año (↗SEGUNDO). La duración del día sideral, en cambio, es prácticamente constante, aunque de hecho crece muy lentamente a medida que la Tierra pierde momento angular debido a la acción gravitacional del Sol y la Luna. Gracias a la enorme precisión de los relojes atómicos se han detectado también variaciones pequeñísimas en el periodo de rotación de la Tierra atribuibles a cambios en la distribución de las aguas entre la atmósfera, los océanos y los casquetes polares. Como el momento angular de la Tierra —descontada la tendencia secular antedicha— es constante, la velocidad angular tiene que variar con la redistribución de la masa de agua.

difeomorfismo (A. *Diffeomorphismus*, F. *difféomorphisme*, I. *diffeomorphism*). Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ VARIEDADES DIFERENCIABLES. Un HOMEOMORFISMO liso $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$, cuya inversa f^{-1} también es una FUNCIÓN LISA, es un *difeomorfismo*. La existencia del difeomorfismo f implica que $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son isomorfas como variedades diferenciables o, como también se dice, son variedades *difeomorfas*.

diferencia (A. *Differenz*, F. *différence*, I. *difference*). La diferencia $n - p$ de dos números n y p es el número m tal que $n = m + p$. La diferencia $A - B$ de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos de A que no son elementos de B. Formalmente, $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

dilatación gravitacional del tiempo (A. *Zeitdilatation*, F. *dilatation gravitationnel du temps*, I. *gravitational time dilation*). En virtud del PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA, el potencial gravitacional afecta a la marcha de un reloj que mide el TIEMPO PROPIO a lo largo de su COSMOLÍNEA. Si A y B son dos relojes contiguos que marchan al unísono, y A es trasladado por un tiempo a un lugar de mayor potencial gravitacional que aquel donde está B, al reunirlos nuevamente A estará atrasado con respecto a B. Este efecto ha sido confirmado por diversos fenómenos, entre otros, por el atraso de 5 microsegundos al año que acumula el reloj estándar de Estados Unidos situado en Boulder, Colorado, a 1.600 m de altura, respecto a su homólogo británico, situado en Greenwich, a pocos metros sobre el nivel del mar.

dimensión (A. *Dimension*, F. *dimension*, I. *dimension*). Entre las propiedades de un continuo, la *dimensión* es quizás la más fácil de captar, pero también una de las más difíciles de analizar y definir. Intuitivamente entendemos que un volumen, una superficie, una línea y un punto tienen, respectivamente, 3, 2, 1 y 0 dimensiones, porque una superficie es capaz de cortar un volumen (esto es, de dividirlo en dos partes inconexas, al menos localmente), una línea puede cortar una superficie, un punto puede cortar una línea, y no hay nada que pueda cortar un punto. Esta característica, ya señalada por Aristóteles, inspira la definición moderna de la dimensión inductiva *ind* de un ESPACIO TOPOLÓGICO X: $ind\ X = -1$ si y solo si $X = \varnothing$; $0 \leq ind\ X \leq n$ si cada entorno abierto de un punto $p \in X$ incluye un abierto U cuya frontera $fr(U)$ satisface la desigualdad $ind\ fr(U) \leq n - 1$; $ind\ X = n$ si y sólo si $ind\ X \leq n$ pero es falso que $ind\ X \leq n - 1$. (Para otras definiciones topológicas de dimensión, cf. Pears, 1975.)

En el siglo XVII, junto con el método de las coordenadas, surgió la idea de un espacio n-dimensional, cada uno de cuyos puntos pudiese individualizarse mediante una lista de n números reales. Este modo de caracterizar el

número de dimensiones de un "espacio" es fácil pero inadecuado, pues para cualquier entero positivo n se puede definir una función inyectiva $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Este descubrimiento de Cantor precipitó una crisis del concepto de dimensión y motivó la búsqueda de definiciones topológicas. Brouwer (1911) probó que la dimensión inductiva es invariante bajo HOMEOMORFISMOS. (Todas las definiciones topológicas se han formulado de modo que cumplan esta condición.) Con ello, puso sobre un pie firme el concepto intuitivo de dimensión, a la vez que justificaba en alguna medida su caracterización analítica mediante el número de coordenadas, al menos en el caso de los dos tipos de espacio topológico más comunes en física: las VARIEDADES DIFERENCIABLES y los ESPACIOS VECTORIALES topológicos. En efecto, si $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable que, considerada como espacio topológico, tiene n dimensiones, cada punto de $\mathcal{M}$ tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (o a $\mathbb{C}^n$), cuyos puntos pueden por ende individualizarse mediante CARTAS de n coordenadas reales (o, respectivamente, complejas). Asimismo, si $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial que, considerado como espacio topológico, tiene n dimensiones, $\mathcal{E}$ tiene una BASE de n vectores y por ende cada uno de sus puntos (vectores) puede individualizarse mediante la lista de sus n COMPONENTES relativos a esa base.

disjuntos (A. *disjunkt*, F. *disjoints*, I. *disjoint*). Dos conjuntos A y B son disjuntos entre sí si y solo si carecen de elementos comunes, es decir, si no existe ninguna cosa que sea a la vez elemento de A y elemento de B, es decir, si su intersección es nula: A y B son disjuntos si y solo si $A \cap B = \varnothing$. Se dice que varios conjuntos son disjuntos dos a dos si cada par de estos conjuntos son disjuntos entre sí.

disyunción (A. *Disjunktion*, F. *disjonction*, I. *disjunction*). La disyunción de dos enunciados A y B es un nuevo enunciado 'A o B'. A y B son los miembros de la disyunción. En el lenguaje ordinario afirmamos una disyunción para expresar nuestro acuerdo con al menos uno de sus miembros (sin especificar con cuál). La disyunción 'A o B' es falsa si tanto A como B son falsos; en cualquier otro caso es verdadera. En el lenguaje formal de la lógica el papel de la partícula disyuntiva 'o' lo desempeña el conector binario '$\vee$', que, colocado entre dos fórmulas α y β, forma una nueva fórmula $(\alpha \vee \beta)$, llamada la disyunción de α y β. El conector $\vee$ se llama el *disyuntor*. Supongamos que la fórmula α traduce el enunciado A y la fórmula β traduce B. El enunciado 'A o B' se simboliza en el lenguaje formal mediante la disyunción $(\alpha \vee \beta)$.

Una interpretación $\mathfrak{I}$ del lenguaje formal satisface $(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface α o $\mathfrak{I}$ satisface β. Esto puede expresarse también diciendo que el conector $\vee$ representa la función veritativa binaria $\vee$: $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ tal que $(0\vee 0) = 0$ y $(0\vee 1) = (1\vee 0) = (1\vee 1) = 1$, donde 1 es la verdad y 0 la false-

dad. La disyunción aquí considerada se llama a veces *disyunción inclusiva* (porque incluye entre los casos que la hacen verdadera aquel en que ambos miembros son verdaderos), por contraposición a la llamada *disyunción exclusiva*, que excluye tal caso y exige que uno solo de sus miembros sea verdadero, nunca los dos. Cuando un anuncio solicita una secretaria que sepa inglés o francés, se trata de la disyunción inclusiva, pues no excluye a las candidatas que dominen ambos idiomas. Si queremos expresar en el lenguaje formal la disyunción exclusiva de α y β, escribimos $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta))$.

En la lógica clásica vale el principio del TERTIUM NON DATUR, es decir, para cada fórmula φ, $(\varphi \vee \neg\varphi)$ es válida, una tautología. Esto no ocurre en la lógica intuicionista de Brouwer y Heyting, donde la 'disyunción' tiene un sentido distinto, algo así como que tenemos una demostración de alguno de los miembros. Por tanto, si no tenemos una demostración de *A* ni tampoco de su negación, no podemos afirmar (intuicionistamente) que *A* o no *A*.

DNA (A. *DNA*, F. *ADN*, I. *DNA*). Ácido desoxirribonucleico, un POLÍMERO compuesto por una secuencia de NUCLEÓTIDOS (adenina, timina, citosina y guanina) con el azúcar desoxirribosa. El DNA también es llamado en castellano ADN. En las células el DNA se dispone en forma de una doble hélice de cadenas complementarias. Esta doble hélice tiene la capacidad de autorreplicarse y de inducir la síntesis del RNA, en presencia de las enzimas apropiadas. El DNA sólo se reproduce dentro de la célula y con ayuda de las enzimas de la célula, como un virus. Por tanto, el DNA no es un ser vivo en ningún sentido estricto de 'vida' que implique autorreproducción. El DNA consta de una "columna vertebral" de elementos repetitivos (el azúcar y el fosfato), portadores de bases distintas, cuya secuencia codifica y almacena la información.

La reproducción de un organismo con herencia de su estructura requiere un sistema de almacenamiento y transmisión de la información. Toda la información genética del organismo está codificada y almacenada en su DNA. Dentro de la célula el DNA dirige la síntesis de proteínas, que tiene lugar en los ribosomas. Las instrucciones para hacer una proteína están en un GEN (un cierto fragmento de DNA). Primero se hace una copia de trabajo del gen en RNA mensajero. Luego se transporta esa copia hasta un ribosoma, donde se ensambla la proteína. La secuencia de bases del RNA mensajero determina la secuencia de aminoácidos de la proteína ensamblada, que a su vez induce el pliegue y estructura tridimensional de la proteína, lo que determina su función. El código genético se basa en un alfabeto de cuatro letras (los cuatro nucleótidos del DNA) y en palabras de tres letras (los tripletes o codones), que codifican la secuencia de aminoácidos de las proteínas. Con un código de este tipo se pueden codificar 64 ($= 4^3$) aminoácidos. Puesto que solo hay

que codificar los 20 únicos aminoácidos usados por la vida terrestre para hacer proteínas, el código genético presenta cierta redundancia. Por eso a veces varias palabras diferentes codifican el mismo aminoácido. Así, por ejemplo, las distintas palabras GCC, GCA y GCG codifican todas ellas el mismo aminoácido, alanina.

dualismo (A. *Dualismus*, F. *dualisme*, I. *dualism*). En la literatura filosófica actual el epíteto *dualista* se aplica ante todo a la doctrina cartesiana descrita a continuación y, generalmente como reproche, a cualquier postura afín a aquella o que parezca suponerla. Según Descartes, hay dos clases de sustancias finitas (esto es, entes cuya existencia depende únicamente de la voluntad de Dios y que no dependen de nada más para subsistir): las almas o "cosas que piensan" y los cuerpos o "cosas extensas". Descartes reconoce y destaca la estrecha unión de una cosa de cada clase en cada individuo humano pero no puede explicarla. Porque el alma puede subsistir sin un cuerpo y estos solo se le hacen presente a través de ideas, la certeza de que existen cuerpos, inclusive el asociado con cada alma, no puede tener para ésta la misma evidencia que su propia existencia, manifiesta en el acto de pensar. Por eso, según Descartes, nuestro conocimiento de la existencia de los cuerpos no tiene otra garantía que la veracidad de Dios.

En otros contextos, *dualismo* —seguido a veces de un epíteto aclaratorio— designa cualquier doctrina que sostenga alguna forma de dualidad o bipolaridad primordial, como el Bien y el Mal, la Teoría y la Práctica, el Contenido y la Forma, la Sensibilidad y la Razón, etc.

E

economía de pensamiento (A. *Denkökonomie*, F. *économie de pensée*, I. *economy of thought*). El filósofo positivista alemán Avenarius sostuvo que el solo propósito de la formación de conceptos y la formulación de enunciados generales es la *economía de pensamiento*, que resulta indispensable porque la inteligencia humana es incapaz de llevar la cuenta de todos los objetos y sucesos individuales, que, por otra parte, son la única realidad. Por eso, la adopción de teorías y aseveraciones científicas debe atenerse a estándares de simplicidad y manejabilidad. Expresa o tácitamente, la tesis de Avenarius subyace a muchas manifestaciones de la filosofía de la ciencia del siglo XX.

ecuación de estado (A. *Zustandsgleichung*, F. *équation d'état*, I. *equation of state*). Ecuación que expresa la relación entre las cantidades observables que caracterizan el estado termodinámico de un sistema. En el caso de un fluido esas cantidades son la presión p, el volumen V y la temperatura T. En el caso de un sólido hay que considerar además los componentes del tensor de tensión; también la magnetización y el campo magnético aplicado, si se trata de un ferroimán.

La ecuación de estado más simple corresponde a un GAS IDEAL:

$$pv = RT$$

Aquí R es la llamada constante molar (o universal) de los gases, igual a 8,314 472(15) J mol^{-1} K^{-1}, y v es el volumen específico, esto es, el cociente V/n entre el volumen y el número de MOLES del gas. Un modelo más realista del comportamiento efectivo de los gases ofrece la ecuación de van der Waals:

$$p = \frac{RT}{(v-b)-a/v^2}$$

donde a y b son parámetros que reflejan la atracción mutua y el volumen de las moléculas, respectivamente.

ecuación de Schrödinger (A. *Schrödingersche Gleichung*, F. *équation de Schrödinger*, I. *Schrödinger equation*). Ecuación del movimiento de la MECÁNICA CUÁNTICA (no relativista). La evolución temporal de un sistema cuántico S, cuyo estado en el instante t está representado por el vector $|\psi(t)\rangle$, se rige por la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathsf{H}\,|\,\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}\,|\,\psi(t)\rangle \tag{1}$$

donde H es el HAMILTONIANO de S.

Consideremos el caso simple en que el sistema cuántico consta de una sola partícula sin spin, Π. En la representación preferida por Schrödinger (llamada a veces también "representación mediante coordenadas"), el estado $|\psi(t)\rangle$ de Π se expresa en términos de los vectores propios $\{|\mathbf{r}\rangle\}_{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3}$ del operador de posición Q de la partícula; como estos vectores forman un continuo, los coeficientes de dicha expresión son los valores de una función $\Psi(\mathbf{r},t) = \langle\mathbf{r}|\psi(t)\rangle$. Sea P el operador de momento cinético. Si no hay un potencial vectorial (ausencia de campo magnético), el operador de energía cinética de una partícula de masa m es

$$\frac{\mathsf{P}\cdot\mathsf{P}}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{2}$$

donde ∇ es el operador NABLA. En presencia del potencial escalar $V(\mathbf{r})$ la ecuación (1) toma entonces la forma de la *ecuación de onda de Schrödinger*:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) \tag{3}$$

Es natural imaginarse entonces que hay una onda física asociada a la partícula Π, y que la ecuación (3) rige la propagación de esta onda en el espacio absoluto de Newton (téngase presente que la ecuación de Schrödinger no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz). Esta idea se disipa en cuanto consideramos el caso de un sistema de N partículas $\Pi_1,\ldots,\Pi_N$, en condiciones como las descritas.

El estado de este sistema se representa mediante un vector $|\psi(t)\rangle$ perteneciente al PRODUCTO TENSORIAL de los espacios de Hilbert de cada una. La representación mediante coordenadas de $|\psi(t)\rangle$ se expresa en términos de la base formada por todos los vectores $|\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)}\rangle = |\mathbf{r}^{(1)}\rangle \otimes \ldots \otimes |\mathbf{r}^{(N)}\rangle$, donde

cada $|\mathbf{r}^{(k)}\rangle$ ($\mathbf{r}^k \in \mathbb{R}^3$) es uno de los vectores propios de $Q^{(k)}$, el operador de posición de Π_k ($1 \leq k \leq N$). Los coeficientes de dicha expresión son los valores de una función $\Psi(\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)},t) = \langle\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)}|\psi(t)\rangle$. El hamiltoniano del sistema es la suma de los hamiltonianos de cada partícula, más el potencial $W(\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)})$ de la interacción entre ellas. La ecuación (1) toma entonces la forma

$$\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{-\hbar^2}{2m_k}\nabla^2_{(k)} + \sum_{k=1}^{N}V(\mathbf{r}^{(k)}) + W(\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)})\right]\Psi(\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)},t) \tag{4}$$

donde el índice k refiere una cantidad o restringe un operador a la k-ésima partícula. La ecuación (4), como la (3), es una ecuación de onda, pero una onda gobernada por ella se propaga en un espacio abstracto de $3N$ dimensiones, comparable al ESPACIO DE CONFIGURACIÓN de la mecánica clásica.

Frustrada la posibilidad de entender la función $\Psi(\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)},t)$ —conforme a la imaginería tradicional— como la representación matemática de una onda física, su verdadero significado es el tema de una discusión interminable entre los filósofos de la ciencia y algunos físicos de inclinación metafísica. En la práctica científica se la maneja sin titubeos como una función estadística de estado, que permite calcular distribuciones de probabilidades para todos los OBSERVABLES. En particular, $|\Psi(\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)},t)|^2$ es la densidad de probabilidad en el espacio de configuración de que, en el momento t, el sistema esté en el punto representado por el N-tuplo $\langle\mathbf{r}^{(1)},\ldots,\mathbf{r}^{(N)}\rangle$ y, por ende, la k-ésima partícula tenga la posición representada por $\mathbf{r}^{(k)}$.

ecuación diferencial (A. *Differentialgleichung*, F. *équation différentielle*, I. *differential equation*). Las ecuaciones diferenciales son la espina dorsal de la física matemática. Explicamos este concepto en su forma más simple: la ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Luego aludimos a algunas generalizaciones.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $f: U \to \mathbb{R}^n$ una función continua que asigna al par $\langle t,\mathbf{r}\rangle$ ($t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$) el valor $f(t,\mathbf{r})$. La expresión siguiente constituye una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden*:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = f(t,\mathbf{r}) \tag{1}$$

Una *solución exacta* de la ecuación (1) es cualquier función $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ (donde I es un intervalo cualquiera en $\mathbb{R}$) que cumple las tres condiciones siguientes:

(i) La derivada de primer orden φ' está definida y es continua en el interior de I.

(ii) Para cada $t \in \mathrm{I}$, $\langle t, \varphi(t)\rangle \in U$.

(iii) Para cada $t \in \mathrm{I}$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

El concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden puede generalizarse reemplazando en la definición precedente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los reales por el cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos o estipulando que el dominio U de f en la ecuación (1) sea un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ o de $\mathbb{C} \times \mathcal{W}$, donde $\mathcal{V}$ es un ESPACIO DE BANACH real y $\mathcal{W}$ un espacio de Banach complejo. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n envuelven las derivadas de sus soluciones de orden igual o menor que n. Si $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{V}^n$, y $f : U \to \mathcal{V}$ es una función continua, una *ecuación diferencial ordinaria de orden n* se escribe así:

$$\mathrm{d}^n\mathbf{r}/\mathrm{d}t^n = f(t,\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t,\ldots,\mathrm{d}^{n-1}\mathbf{r}/\mathrm{d}t^{n-1}) \qquad (2)$$

con $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$. Una solución es una función $\varphi: \mathrm{I} \to \mathcal{V}$ (donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$) que cumple las tres condiciones siguientes:

(i′) Todas las derivadas de orden igual o menor que n, $\varphi',\ldots, \varphi^{(n)}$, están definidas y son continuas en el interior de I.

(ii′) Para cada $t \in \mathrm{I}$, $\langle t,\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(n-1)}(t)\rangle \in \mathrm{U}$.

(iii′) Para cada $t \in \mathrm{I}$, $\varphi^{(n)}(t) = f(t,\varphi(t),\varphi'(t),\ldots,\varphi^{(n-1)}(t))$.

Buscar una solución de la ecuación (2) equivale entonces a buscar una solución del siguiente sistema de n ecuaciones de primer orden:

$$\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{r}_1, \qquad \mathrm{d}\mathbf{r}_1/\mathrm{d}t = \mathbf{r}_2,\ldots,$$
$$\mathrm{d}\mathbf{r}_{n-2}/\mathrm{d}t = \mathbf{r}_{n-1}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{r}_{n-1}/\mathrm{d}t = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1,\ldots, \mathbf{r}_{n-1})$$

En vez de buscar una sola función desconocida φ que satisfaga las condiciones (i′)-(iii′), se busca un sistema de n funciones desconocidas φ, $\varphi_1,\ldots,$ φ_{n-1} que cumplen las condiciones (i) y (ii) y también la condición siguiente:

(iii″) $\varphi'(t) = \varphi_1(t)$, $\quad \varphi_1'(t) = \varphi_2(t),\ldots,$ $\quad \varphi_{n-2}'(t) = \varphi_{n-1}(t)$,
$\varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi_1(t),\ldots, \varphi_{n-1}(t))$.

Las ecuaciones diferenciales parciales tienen soluciones definidas en una región de $\mathbb{R}^m$ o de $\mathbb{C}^m$ (para algún entero $m > 1$) y envuelven sus derivadas parciales.

Para la representación matemática del devenir, la propiedad más importante de las ecuaciones diferenciales es la existencia de soluciones únicas, esto es, tales que haya una y solo una para cada descripción cabal de las condiciones iniciales o de frontera. Ella pueden demostrarse con toda generalidad para las ecuaciones ordinarias de primer orden, bajo condiciones que se cumplen en todos los casos de interés para la física. En el caso de las ecuaciones diferenciales parciales, la existencia y unicidad de las soluciones se han podido demostrar en diversos casos de interés para la física, ya sea sometiendo las condiciones de frontera admisibles a importantes restricciones, ya liberalizando el concepto de solución.

ecuaciones de campo de Einstein (A. *Einsteinsche Feldgleichungen*, F. *équations de champ d'Einstein*, I. *Einstein field equations*). Ecuaciones por las que se rige el campo gravitacional según la teoría general de la RELATIVIDAD. Einstein (1915) las formuló originalmente así:

$$R_{ik} = -\kappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T_r^r\right) \tag{1}$$

donde R_{ik}, g_{ik} y T_{ik} son, respectivamente, los componentes —relativos al sistema de coordenadas escogido— del tensor de Ricci (↗CURVATURA), la MÉTRICA LORENTZIANA del espaciotiempo y el TENSOR DE ENERGÍA; la expresión T^r_r sigue la CONVENCIÓN DE EINSTEIN, y la constante $\kappa = 8\pi G/c^4$ (↗CONSTANTE GRAVITACIONAL, VELOCIDAD DE LA LUZ). Más adelante, Einstein (1917b) juzgó necesario reescribirlas así:

$$R_{ik} - \Lambda g_{ik} = -\kappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T_r^r\right) \tag{2}$$

donde Λ es una nueva constante, conocida como la CONSTANTE COSMOLÓGICA. El término Λg_{ik} agregado al lado izquierdo estaba destinado a asegurar que el modelo cosmológico homogéneo y esférico de Einstein fuera estático. Cuando se descubrió la EXPANSIÓN DEL UNIVERSO, Einstein declaró que la introducción de la constante cosmológica había sido el peor error de su vida. No obstante, en la actualidad, algunos científicos consideran que hay buenas razones para asignarle un valor pequeñísimo, pero distinto de 0.

En la literatura más reciente las ecuaciones de campo de Einstein suelen formularse de modo que a la derecha aparezca solo el TENSOR DE ENERGÍA que representa la distribución de la materia y la energía no gravitacional y a la izquierda un tensor —llamado *tensor de Einstein*— construido exclusivamente a partir de la métrica y sus derivadas primeras y segundas. En esta versión, las ecuaciones (1) y (2) se escriben, respectivamente, así:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik} \qquad (1^*)$$

y

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik} \qquad (2^*)$$

donde $R = R^k_k$ es el escalar de curvatura. La supresión del signo menos que figuraba al lado derecho de (1) y (2) se debe a que ahora definimos el tensor de Ricci como la CONTRACCIÓN $C^1_3(\mathbf{R})$ del tensor de Riemann **R**, mientras que Einstein lo definía como $C^1_4(\mathbf{R})$.

Las ecuaciones (1) —lo mismo que sus sustitutas y equivalentes— forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales de segundo grado, a derivadas parciales, con 10 incógnitas (los componentes métricos g_{ik}). Admiten soluciones tan diferentes que los modelos de espaciotiempo ajustados a ellas ni siquiera tienen que ser topológicamente equivalentes. Las pocas soluciones exactas encontradas hasta la fecha se basan en supuestos que simplifican drásticamente la abigarrada complejidad de las cosas (↗CAMPO DE SCHWARZSCHILD; MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER).

ecuaciones de Euler y Lagrange (A. *Euler-Lagrangesche Gleichungen*, F. *équations de Lagrange*, I. *Euler-Lagrange equations*). Ecuaciones del movimiento que gobiernan la evolución de un sistema mecánico clásico. Un sistema $\mathcal{S}$ con n grados de libertad se representa mediante un punto en una VARIEDAD de n dimensiones, el ESPACIO DE CONFIGURACIÓN de $\mathcal{S}$. El estado mecánico de $\mathcal{S}$ en un momento dado t se especifica sin ambigüedad mediante n coordenadas de posición $q_1(t),\ldots, q_n(t)$ y sus derivadas respecto al tiempo $\dot{q}_1(t),\ldots,\dot{q}_n(t)$. Si las fuerzas externas que actúan sobre $\mathcal{S}$ son derivables de un potencial o de un potencial generalizado (↗MECÁNICA CLÁSICA), es posible definir el LAGRANGIANO del sistema, $L = T - U$, donde T designa la energía cinética y U el potencial. La evolución del sistema $\mathcal{S}$ está completamente determinada por las n ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

Conviene advertir que las coordenadas $q_1,\ldots, q_n$ son lo que se llama coordenadas *generalizadas* de posición y no necesariamente representan la posición de las distintas partes de $\mathcal{S}$ en el espacio físico, aunque pueden hacerlo. Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ consta de m partículas, cada una de las cuales tiene 3 grados de libertad, $n = 3m$ y $q_1,\ldots, q_n$ podrían ser las $3m$ coordenadas de posición de esas partículas, en un orden convenido. Pero las partículas de $\mathcal{S}$ pueden estar constreñidas en sus movimientos por *ligaduras* que reducen sus grados de libertad. Por ejemplo, una vara rígida y sin espesor, que cuelga por un extremo de un punto fijo en el techo y no puede subir más arriba que este, tiene solo dos grados de libertad; las coordenadas generalizadas de posición pueden en este caso definirse así: $q_1(t)$ = el ángulo que forma la vara con la vertical en el momento t ($-\pi/2 \leq q_1(t) \leq \pi/2$); $q_2(t)$ = el ángulo que forma en ese momento el plano determinado por la vertical y la vara con un plano fijo perpendicular al techo ($-\pi \leq q_2(t) \leq \pi$). Por otro lado, un CUERPO RÍGIDO, libre para moverse en el espacio de cualquier manera, tiene seis grados de libertad.

Para una caracterización más general de estas ecuaciones y su significado matemático, ↗CÁLCULO DE VARIACIONES.

ecuaciones de Hamilton (A. *Hamiltonsche Gleichungen*, F. *équations de Hamilton*, I. *Hamilton equations*). Ecuaciones del movimiento que gobiernan la evolución de un sistema mecánico conforme a la MECÁNICA CLÁSICA. Un sistema $\mathcal{S}$ con n grados de libertad se representa mediante un punto en un espacio de $2n$ dimensiones, el ESPACIO DE LAS FASES de $\mathcal{S}$. Si las fuerzas externas que actúan sobre $\mathcal{S}$ son derivables de un potencial o de un potencial generalizado (↗MECÁNICA CLÁSICA), se puede definir el LAGRANGIANO del sistema, $L = T - U$, donde T designa la energía cinética y U el potencial. El estado de $\mathcal{S}$ en un momento dado t se especifica sin ambigüedad mediante las n coordenadas generalizadas de posición $q_1(t),\ldots, q_n(t)$ (↗ECUACIONES DE EULER Y LAGRANGE) y las n coordenadas generalizadas de momento $p_1(t),\ldots, p_n(t)$, conjugadas con aquellas, respectivamente, por las relaciones

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

Si $\mathcal{S}$ es un sistema holonómico y conservador (↗MECÁNICA CLÁSICA), su HAMILTONIANO es

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L$$

La relación siguiente expresa el efecto sobre el hamiltoniano H de una variación infinitesimal arbitraria de las q_k y p_k, que deje fijo el tiempo t:

$$\delta H = \sum_{k=1}^{n}\left(p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}_k \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k \right)$$

De dicha relación se sigue que

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

Estas ecuaciones se deducen simplemente de la definición de H. Por otra parte, las ecuaciones de Euler y Lagrange que rigen la dinámica del sistema implican que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k$$

Llegamos así a las *ecuaciones canónicas* del movimiento o *ecuaciones de Hamilton*:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

Son $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden. Razonando a la inversa, se demuestra que, en las condiciones prescritas, ellas equivalen a las n ecuaciones de segundo orden de Euler y Lagrange.

ecuaciones de Maxwell (A. *Maxwellsche Gleichungen*, F. *équations de Maxwell*, I. *Maxwell equations*). Ecuaciones diferenciales por las que se rige el campo electromagnético según la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA, llamadas así en honor de James Clerk Maxwell, que fundó la teoría, pero nunca escribió las ecuaciones que hoy llevan su nombre. Si las cantidades mencionadas se expresan en unidades del SISTEMA INTERNACIONAL, las *ecuaciones de Maxwell* para el espacio vacío pueden formularse así:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}$$

donde (i) ∇ es el operador NABLA; (ii) c es la VELOCIDAD DE LA LUZ; (iii) ε_0 (= 8,854 187 817 × 10^{-12} es la constante eléctrica o "permitividad del vacío" (↗LEY DE COULOMB); (iv) **E** es la intensidad del campo eléctrico (esto es, la fuerza que éste ejerce en cada punto sobre una carga eléctrica de 1 coulomb situada en ese punto); (v) **B** es la intensidad del campo magnético (de modo que éste ejerce en cada punto una fuerza igual a **v** × **B** sobre una carga de 1 coulomb que transita por ese punto con velocidad **v**); y (vi) ρ es la densidad de carga y **J** = ρ**v** es la corriente eléctrica o flujo de carga (de modo que $\partial\rho/\partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J}$).

edad del Universo (A. *Alter des Universums*, F. *âge de l'univers*, I. *age of the universe*). Los modelos cosmológicos dotados de una MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER (FRW) son —salvo un par de casos excepcionales— variedades diferenciables GEODÉSICAMENTE INCOMPLETAS, en que las COSMOLÍNEAS de la materia naufragan todas en SINGULARIDADES. Si el modelo tiene una fase de expansión, cada cosmolínea descrita por una partícula material en esa fase tiene una singularidad en la dirección del pasado (sin perjuicio de que tenga otra en la dirección del futuro si el modelo luego se contrae). Esto significa que el intervalo de tiempo propio trascurrido sobre una de esas cosmolíneas antes de un evento cualquiera *e* situado en ella tiene una cota superior mínima (un SUPREMO). Si el modelo FRW en cuestión es una idealización satisfactoria del Universo en que vivimos (y en la medida en que lo sea) y el evento *e* ocurre ahora, es admisible llamar a esa cota la *edad del Universo* o "el tiempo desde la creación del mundo" (como la llamó Friedmann en 1922).

efecto Compton (A. *Compton-Effekt*, F. *effet Compton*, I. *Compton effect*). Estudiando la dispersión de rayos X por un bloque de parafina, Compton (1922) descubrió que, contra la predicción clásica, la radiación dispersada con un ángulo de menos de 90° tiene mayor LONGITUD DE ONDA y, por ende, menor FRECUENCIA que la radiación incidente. Este fenómeno, llamado *efecto Compton*, es ininteligible en el contexto de una teoría ondulatoria de la luz, pero se explica inmediatamente si la luz consta de corpúsculos (FOTONES) de energía proporcional a la frecuencia, conforme a la hipótesis de Einstein (1905a). En tal caso, la dispersión de la luz por un cuerpo que la refleja es

el resultado de la colisión de los fotones con electrones en la superficie del cuerpo. La colisión trasmite energía a los electrones y, por ende, la luz reflejada tiene una frecuencia menor que la luz incidente.

efecto Doppler (A. *Doppler-Effekt*, F. *effet Doppler*, I. *Doppler effect*). Cambio observado en la FRECUENCIA de una señal oscilatoria debido al movimiento del observador con respecto a la fuente emisora. Cuando un vehículo policial pasa rápidamente a nuestro lado tocando la sirena, ésta cambia bruscamente de tono: mientras el vehículo se acerca, oímos un sonido más agudo que el que escucha el conductor; cuando se aleja, oímos uno más grave. Este efecto se explica simplemente: el sonido es un fenómeno ondulatorio; el número de ondas por segundo que llegan al oído receptor es mayor que el número emitido si la fuente del sonido se acerca continuamente, y es menor si la fuente se aleja. Si u es la velocidad de propagación del sonido, $\mathbf{n}$ es un vector de magnitud 1 perpendicular al frente de la onda y los vectores $\mathbf{v}_e$ y $\mathbf{v}_r$ representan, respectivamente, la velocidad de la fuente y la velocidad del observador con respecto al medio, entonces la frecuencia emitida ν_e y la frecuencia recibida ν_r se relacionan con arreglo a la ecuación siguiente, donde en la última expresión desdeñamos los términos de orden superior al segundo y escribimos $\mathbf{v}$ en vez de $\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_e$ (la velocidad de la fuente, relativa al observador):

$$\nu_r = \nu_e \frac{1 - \frac{\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}}{u}}{1 - \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}}{u}} \approx \nu_e \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{u} - \frac{(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})}{u^2} \right) \qquad (1)$$

La misma fórmula fue aplicada a las señales luminosas mientras se pensó que son ondas propagadas en el ÉTER. Para la teoría especial de la RELATIVIDAD, en cambio, el éter no existe, y la luz se propaga en el vacío con la misma velocidad constante c relativamente a cualquier MARCO DE REFERENCIA INERCIAL. Por lo tanto, el efecto Doppler óptico —esto es, el cambio de frecuencia de la luz debido al movimiento del observador con respecto a la fuente emisora— depende solamente de la velocidad de la fuente en el marco inercial en que reposa el observador, que denotaremos con $\mathbf{v}$ (como arriba). Si $\mathbf{e}$ es un vector de magnitud 1 que apunta en la misma dirección que la señal luminosa en dicho marco, entonces, según la teoría especial de la relatividad, la frecuencia ν_e con que una señal luminosa se emite y la frecuencia ν_r con que se la recibe se relacionan de acuerdo con la ecuación siguiente (que se deduce sin dificultad de la fórmula relativista para la transformación de las velocidades de un marco inercial de referencia a otro):

$$v_r = v_e \frac{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

Visiblemente, la ecuación (2) se reduce a (1) si |v| es tanto menor que c que los términos de segundo orden pueden desdeñarse. La corrección relativista fue confirmada experimentalmente por Ives y Stilwell (1937).

efecto fotoeléctrico (A. *Photoeffekt, Lichtelektrische Wirkung*, F. *effet photoélectrique*, I. *photoelectric effect*). La iluminación de una placa metálica provoca la emisión de electrones. Este *efecto fotoeléctrico* fue constatado en 1890 por Halbwachs poco después que Hertz observara que las chispas eléctricas saltan más fácilmente entre electrodos iluminados por la radiación ultravioleta de otras chispas. Lenard (1902) comprobó que la velocidad máxima que alcanzan los electrones emitidos no depende de la intensidad de la luz. De hecho, la máxima energía cinética E_{max} de aquellos depende de la frecuencia ν de esta, con arreglo a la ecuación $E_{max} = h\nu - A$, donde h es la CONSTANTE DE PLANCK y A es una constante característica del metal. Einstein (1905a) derivó esta ecuación de la hipótesis propuesta por él, según la cual la luz se emite, trasmite y absorbe en "cuantos de energía" de magnitud $h\nu$ (hoy llamados FOTONES). Aunque los experimentos de Millikan (1914) convencieron a la mayoría de los físicos de la validez de esta ecuación, la hipótesis cuántica de Einstein no fue generalmente aceptada hasta después del descubrimiento del EFECTO COMPTON en 1922.

efecto Zeeman (A. *Zeeman-Effekt*, F. *effet Zeeman*, I. *Zeeman effect*). Escisión de las LÍNEAS ESPECTRALES observada cuando la fuente emisora es afectada por la acción de un campo magnético. Fue descubierto por Zeeman en 1896. A poco andar hubo que distinguir entre (i) el *efecto Zeeman normal*, observable en las líneas espectrales del hidrógeno, cada una de las cuales se divide en tres, separadas por una distancia proporcional a la intensidad del campo magnético, con la línea intermedia equidistante de las otras dos, y (ii) el *efecto Zeeman anómalo*, más diversificado y complejo, observable en los demás casos. El segundo resistió múltiples intentos de explicación hasta que Uhlenbeck y Goudsmidt (1925) introdujeron la hipótesis del SPIN del electrón.

electrodinámica clásica (A. *klassische Elektrodynamik*, F. *électrodynamique classique*, I. *classical electrodynamics*). Teoría de los fenómenos electromagnéticos aplicable en situaciones en que la CONSTANTE DE PLANCK h resulta desdeñable y puede igualarse a 0.

La teoría fue ideada por Maxwell en 1856, para darle una formulación matemática precisa a los resultados experimentales de Faraday y a sus intuiciones sobre el CAMPO eléctrico y el campo magnético. Su mayor novedad fue la predicción de ondas electromagnéticas con un vasto espectro de longitudes y frecuencias, que trasmiten energía y momento cinético a distancias enormes. Basándose en el valor experimental de la permeabilidad y la permitividad del vacío, Maxwell calculó la velocidad de propagación de estas ondas, comprobó que concordaba con la velocidad observada de la luz y concluyó que esta consistía en ondas del tipo predicho por su teoría. Aunque esta conclusión permitió explicar la acción del campo magnético sobre el plano de polarización de la luz descubierta por Faraday y pudo combinarse bien con la óptica recibida, los físicos de Europa continental resistieron la teoría de Maxwell, que abandonaba el paradigma de las FUERZAS CENTRALES, hasta que Hertz, en 1888, produjo ondas electromagnéticas de baja frecuencia en su laboratorio (cf. Hertz, 1893).

En su versión inicial, la teoría postulaba la existencia de un medio material *sui generis*, el ÉTER, tensado por las fuerzas del campo y capaz de propagar sus oscilaciones. Como la concepción de un modelo mecánico satisfactorio del éter presentaba enormes dificultades, este se fue tornando cada vez más elusivo a manos de Maxwell y sus sucesores. A fines del siglo XIX, mientras Larmor proponía entender el éter como otra forma de realidad física, más fundamental que la materia ordinaria, Lorentz llegó a concebirlo como un medio que operaba sobre la materia sin que esta, a la inversa, actuase sobre él, vale decir, como una encarnación —o sucedáneo— del espacio absoluto de Newton. Por su parte, Hertz —anticipando lo que la física teórica llegaría a ser en el siglo XX— declaró que "la teoría de Maxwell es el sistema de las ecuaciones de Maxwell" y dejó a un lado la cuestión del éter. Trató también, sin éxito, de darle a esas ecuaciones una forma adaptada a los cuerpos en movimiento, un problema que pocos años más tarde genialmente fue resuelto por Einstein en su teoría especial de la RELATIVIDAD. Según esta, no hay éter, y las ecuaciones de Maxwell, en su forma estándar, están adaptadas a cualquier MARCO DE REFERENCIA inercial, puesto que, de suyo, son invariantes bajo las TRANSFORMACIONES DE LORENTZ. Con este descubrimiento, la *electrodinámica clásica* alcanza la madurez, manifiesta en la elegante y económica formulación espaciotemporal que le dio Minkowski (1908).

Habitualmente, la electrodinámica clásica se presenta referida a un marco de referencia inercial cualquiera $\mathcal{R}$. El campo eléctrico **E** y el campo magnético **B** son dos campos vectoriales sobre el espacio euclidiano de $\mathcal{R}$, que varían con el tiempo. Las relaciones mutuas entre ellos y de ambos con sus fuentes —la densidad de carga ρ (un campo escalar) y la densidad de corriente **J** (otro campo vectorial)— se expresan en las ECUACIONES DE MAX-

WELL. Para el espacio vacío, estas se formulan así (en unidades del SISTEMA INTERNACIONAL):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}$$

donde ∇ es el operador NABLA, c es la VELOCIDAD DE LA LUZ en el vacío, ε_0 es la constante eléctrica o permitividad del vacío (↗LEY DE COULOMB) y t es el tiempo definido en $\mathfrak{R}$ por el método de Einstein (↗SIMULTANEIDAD). La densidad de carga y la densidad de corriente satisfacen la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Una partícula con carga eléctrica q que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al marco $\mathfrak{R}$ experimenta en cada instante la FUERZA DE LORENTZ

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

donde $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son los valores de los campos eléctrico y magnético en el punto en que la partícula se encuentra en ese instante y $\times$ es el símbolo del PRODUCTO VECTORIAL.

electrodinámica cuántica (A. *Quantenelektrodynamik*, F. *electrodynamique quantique*, I. *quantum electrodynamics*). Teoría de los fenómenos electromagnéticos aplicable en situaciones en que no puede desdeñarse el valor pequeño pero finito de la CONSTANTE DE PLANCK h.

La teoría se centra en la ecuación relativista del electrón de Dirac (1928). La ecuación tiene soluciones que representan partículas con energía negativa; la explicación que Dirac propuso para el hecho de que estas jamás se observen implica la posible manifestación de un nuevo tipo de partícula, con la misma masa que el electrón y carga eléctrica opuesta. Una partícula con estas características fue observada por Anderson en 1932 (↗POSITRÓN). Otra dificultad de la ecuación de Dirac consiste en que, en cuanto se contemplan interacciones, sus soluciones son series que divergen rápidamente. Poco después de 1945, Tomonaga, Schwinger, Feynman y Dyson inventaron un modo

de tratar estas divergencias llamado "renormalización", que produjo predicciones de precisión sin rival en toda la ciencia y tranquilizó a la mayoría de los físicos (aunque no a Dirac). La *electrodinámica cuántica* fue la primera TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS y su versión renormalizada es el paradigma que imitan las demás.

electrón (A. *Elektron*, F. *électron*, I. *electron*). PARTÍCULA ELEMENTAL con carga eléctrica negativa e = 1,602 176 462(63) × 10^{-19} C (coulomb) y spin ½. La masa del electrón m_e = 9,109 381 88(72) × 10^{-31} kg, o, en unidades de energía, m_ec^2 = 0,510 998 902(21) MeV. El electrón es un FERMIÓN y un LEPTÓN.

El electrón fue la primera partícula subatómica detectada y reconocida como tal. En 1897, J. J. Thomson estableció experimentalmente que los RAYOS CATÓDICOS emitidos por cualquier metal son haces de corpúsculos iguales entre sí, negativamente cargados, de tamaño mucho menor que el de un átomo, y no una forma de radiación, como sostenía Hertz. A diferencia de Hertz, Thomson pudo desviar sus rayos catódicos mediante un campo eléctrico, gracias a que logró un vacío mucho mejor. El 7 de enero de ese año, Wiechert había anunciado oralmente la misma conclusión, junto con su estimado de que la masa de uno de esos corpúsculos era entre 2.000 y 4.000 veces menor que la del átomo de hidrógeno. El nombre 'electrón' que pronto se les dio había sido introducido por Stoney en 1891 para designar la "unidad natural de electricidad", es decir, la cantidad de carga eléctrica —positiva o negativa— que debe pasar a través de una solución para liberar un atómo de un elemento monovalente (por ejemplo, hidrógeno). Inicialmente Thomson sólo midió el cociente e/m_e entre la carga y la masa del electrón; pero en 1899 midió su carga, obteniendo $e \approx 2.27 \times 10^{-19}$ C, esto es, 1,42 veces el valor actual indicado arriba. El mismo año, Thomson identificó como electrones las partículas producidas por el EFECTO FOTOELÉCTRICO; otro tanto hicieron al año siguiente Becquerel y los Curie con las partículas emitidas en la DESINTEGRACIÓN BETA. Otros pasos decisivos en la historia experimental del electrón son los siguientes: 1° Entre 1909 y 1912, Millikan midió e con mayor precisión, estableciendo que todas las cargas eléctricas observables en la naturaleza son múltiplos integrales de ésta —un resultado no rebatido hasta hoy a pesar de que, conforme al MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS, los QUARKS portan cargas de $e/3$ y $2e/3$, que no podrían observarse separadas; 2° Davisson y Germer e, independientemente, G. P. Thomson (hijo de J. J. Thomson) demostraron en 1927 la DIFRACCIÓN de los electrones; 3° Anderson descubrió en 1931 una partícula de masa m_e y carga e positiva, luego identificada como la antipartícula del electrón y llamada POSITRÓN.

electrón-voltio (A. *Elektronenvolt*, F. *electronvolt*, I. *electron-volt*). Unidad de energía preferida en microfísica por su pequeñez. Un *electrón-voltio* (*e*V) es igual a la energía cinética adquirida por un electrón al atravesar una diferencia de potencial de un voltio. 1 *e*V = 1,602 177 33(49) × 10^{-19} J.

elemento de línea (A. *Linienelement*, F. *élément linéaire*, I. *line element*). Damos aquí una explicación moderna del *elemento de línea* de una VARIEDAD RIEMANNIANA, tradicionalmente representado con el símbolo *ds*.

Sea $\mathcal{V}$ un ESPACIO VECTORIAL *n*-dimensional real o complejo. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de escalares de $\mathcal{V}$. Una FUNCIÓN BILINEAL $f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}$ determina unívocamente una FORMA CUADRÁTICA Q_f por la relación $Q_f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v},\mathbf{v})$ para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. En particular, si $\langle \mathcal{M},\mathrm{g}\rangle$ es una variedad riemanniana (o semi-riemanniana), la métrica g asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ una función bilineal g_p definida en el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$. Si llamamos q_p a la forma cuadrática determinada unívocamente por g_p, es dable concebir un objeto q, unívocamente determinado por la métrica g, el cual asocia a cada $p \in \mathcal{M}$ la forma cuadrática q_p y asigna a cada campo vectorial V sobre $\mathcal{M}$ el campo escalar $\mathrm{q}(V) : p \mapsto \mathrm{q}_p(V_p)$. Este objeto q, característico de la variedad $\langle \mathcal{M},\mathrm{g}\rangle$, es precisamente aquello que en la literatura clásica de la geometría diferencial se denotaba con ds^2, y se concebía como el "cuadrado" del "elemento de línea" *ds* de la variedad riemanniana en cuestión.

empirismo constructivo (A. *konstruktiver Empirismus*, F. *empirisme constructive*, I. *constructive empiricism*). Concepción de la ciencia propuesta por Bas van Fraassen (1980) en expresa oposición al REALISMO CIENTÍFICO. Según ella, la meta de la ciencia es darnos teorías que sean empíricamente adecuadas, y la aceptación de una teoría comporta la creencia en que dicha teoría es empíricamente adecuada, y en nada más. Van Fraassen aclara que una teoría es empíricamente adecuada si y solo si "es verdad lo que dice sobre las cosas y sucesos observables en este mundo —o sea, si 'SALVA LOS FENÓMENOS'." Con más precisión: "Tal teoría tiene al menos un modelo en que caben todos los fenómenos actualmente existentes" (no solo los actualmente observados, u observados en alguna ocasión pasada o futura). No obstante sus aires de crítica cautela, el empirismo constructivo se muestra ingenuo en un respecto: supone que *lo que son los fenómenos* está dado con toda claridad y sin equívocos (¿precientíficamente?) como un estándar al cual las teorías pueden adecuarse o no. En la práctica, sin embargo, una de las tareas principales de las ciencias consiste en decirnos qué fenómenos hay, qué es en efecto eso que observamos, y las teorías que proponen tienen un papel decisivo justamente en el desempeño de esta función.

empirismo lógico (A. *logischer Empirismus*, F. *empirisme logique*, I. *logical empiricism*). Nombre que dan a su movimiento filosófico los partidarios del POSITIVISMO LÓGICO después que adoptan el FISICALISMO en 1930.

energía (A. *Energie*, F. *énergie*, I. *energy*). Cantidad atribuida a los sistemas físicos por la MECÁNICA CLÁSICA y las grandes teorías físicas que han surgido más tarde —TERMODINÁMICA, ELECTRODINÁMICA CLÁSICA, RELATIVIDAD especial y general, MECÁNICA CUÁNTICA, TEORÍAS CUÁNTICAS DE CAMPOS—, que concuerdan en que la energía de un sistema cerrado se conserva. Como todas estas teorías conciben la energía de un modo esencialmente igual, este concepto constituye el principal lazo de unión entre ellas y el mayor mentís a la tesis filosófica de que son INCONMENSURABLES. La *energía* de un sistema se define habitualmente como su capacidad para ejecutar TRABAJO. Sin embargo, en la vida real, la energía que la contabilidad de la física asigna a un sistema dado no puede nunca convertirse totalmente en trabajo. Por esta y otras razones, quizás sea preferible la definición recomendada por R. Mills (1994, p. 141): *La energía es la cantidad conservada, conforme al* TEOREMA DE NOETHER, *en virtud de la invariancia de las leyes de la física bajo traslaciones del tiempo*. Esta definición resalta bien el carácter fundamental de la conservación de la energía, pues, si dicha invariancia faltase, los experimentos de ayer no podrían compararse con los de hoy y mañana y la ciencia física como la conocemos sería imposible.

La palabra 'energía' proviene del griego ἐνέργεια, voz acuñada por Aristóteles para designar el ser actual. Incorporada temprano a las lenguas europeas modernas en varias acepciones, adquiere su presente significado en el siglo XIX. Thomas Young (1807) propuso llamar '*energy*' a lo que hasta entonces se llamaba 'fuerza viva', esto es, el producto de la masa de un cuerpo por el cuadrado de su velocidad. Esta es la cantidad que, multiplicada por 1/2, llamamos hoy 'energía cinética'; el factor 1/2 fue introducido por Coriolis en 1829 para igualar el valor numérico de la misma al trabajo que es capaz de producir. El interés en obtener trabajo de cualquier fuente —esfuerzo animal, viento, caídas de agua, combustión del carbón, baterías eléctricas, etc.— unido a la convicción de que este no sale de la nada —no hay máquinas de movimiento perpetuo— motivó la idea de que la energía existe en una variedad de formas intercambiables en proporciones constantes, de modo que la cantidad total se conserva. Kuhn (1959) cuenta por lo menos doce autores en que esta idea aflora entre 1830 y 1850. Tres de ellos —Mayer, Joule, Colding— cuentan como los descubridores independientes del *principio de conservación de la energía*, que Helmholtz formula finalmente con entera claridad en 1847. Su memoria se titula "De la conservación de la fuerza" y fueron los ingleses, empezando por Kelvin, quienes adoptaron e impusieron el término *energía*.

En las décadas siguientes, Clausius con su teoría cinética de los gases y Maxwell y Boltzmann con su MECÁNICA ESTADÍSTICA procuraron una base firme a la vieja tesis de que el calor manifiesta los movimientos microscópicos de los átomos y moléculas, cuya energía cinética es la energía térmica. Maxwell supone asimismo que la energía guardada y trasmitida por el campo electromagnético también tiene una explicación mecánica, aunque no logra dar con ella. Por otro lado, el *energetismo*, profesado por científicos como Ostwald, Mach y Duhem, cuestiona insistentemente la realidad del ÁTOMO y ve la energía como realidad proteica universal. A principios del siglo XX se consolida el triunfo del atomismo, gracias particularmente a los trabajos de Perrin, apoyados por los estudios de Einstein sobre el MOVIMIENTO BROWNIANO. Por otra parte, en el marco de su teoría especial de la RELATIVIDAD, Einstein deriva la equivalencia de energía y MASA, vindicando así, en cierto modo, lo esencial de la visión energetista, desacreditada por su asociación con el antiatomismo. La energía total E de un cuerpo, referida a un marco inercial $\mathfrak{R}$, es igual a su masa o inercia m, referida al mismo marco, multiplicada por c^2 (el cuadrado de la VELOCIDAD DE LA LUZ en el vacío). En particular, si $\mathfrak{R}$ es el marco en que el cuerpo reposa, $E = mc^2$ es la energía radiante que liberaría la aniquilación de todas las partículas elementales que lo forman, en caso de chocar con sus respectivas antipartículas.

energía del vacío (A. *Energiedichte des Vakuums*, F. *densité d'énergie du vide*, I. *vacuum energy density*). Según la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS, el vacío (el espacio vacío) está ocupado por todos los campos (correspondientes a los diversos tipos de partícula elemental). El vacío se da cuando todos estos campos están en su estado fundamental $|0\rangle$, es decir, en su estado de mínima energía. Debido al principio de incertidumbre, la energía de punto cero o mínima energía de un campo es siempre distinta de cero. Según la teoría general de la relatividad, cualquier forma de energía contribuye a la curvatura del espaciotiempo; por tanto, el vacío también contribuye. Algunos han pretendido identificar la energía del vacío con la constante cosmológica introducida por Einstein.

Ya en 1911 Max Planck había calculado que la energía promedia de un oscilador armónico cuántico a 0 K (cero absoluto) de temperatura es de $h\nu/2$, donde h es la constante de Planck y ν es la frecuencia. El campo electromagnético puede ser representado como un conjunto de osciladores armónicos, uno para cada modo del campo. La energía del campo se obtiene sumando las de todos sus modos; esta suma es siempre infinita. Mediante trucos formales como la renormalización y el "corte ultravioleta" (que excluye todos los modos de frecuencia superior a una dada), puede solventarse el problema de los valores infinitos. Más graves son las discrepancias entre las es-

timaciones teóricas y la cota superior ($< 10^{-10}$ J/m^3) impuesta por la astronomía observacional en función de los efectos previsibles en la curvatura del espacio. En efecto, si establecemos el corte ultravioleta a 100 GeV (es decir, eliminamos o ignoramos todos los modos de energía superiores), obtenemos una densidad de energía de 10^{45} J/m^3, una discrepancia de 55 órdenes de magnitud. Si el corte lo establecemos a la energía de Planck, 10^{-19} GeV, la discrepancia con la cota observacional es de 120 órdenes de magnitud. Además, el campo electromagnético es solo uno entre varios. Los demás campos también tienen una energía no nula de punto cero. Especialmente notable sería la contribución del campo de Higgs, postulado por el modelo estándar de la física de partículas para explicar la masa de las partículas de los otros campos. Y es posible que haya otros campos que no forman parte del modelo estándar, pero que también contribuirían (de haberlos) a la energía del vacío.

En vista de las enormes discrepancias citadas, algo parece fallar en nuestras concepciones sobre el vacío. Por otro lado, la energía del vacío parece tener cierta realidad física, pues se manifiesta en el efecto Casimir, en que se genera una fuerza atractiva entre dos planchas metálicas paralelas suficientemente próximas. Esta fuerza es interpretada como la presión ejercida por la energía de punto cero del espacio vacío sobre las planchas por fuera (superior a la ejercida entre ellas, pues su escasa separación elimina muchos modos de energía).

energía nuclear (A. *Kernenergie*, F. *énergie nucleaire*, I. *nuclear energy*). Llámase así a la energía latente en el núcleo de los átomos y que se libera —como radiación emitida y energía cinética de partículas disparadas— con la *fusión* de los elementos livianos o la *fisión* de los pesados. Los ejemplos siguientes ilustran estos conceptos.

(1) El Sol irradia energía liberada por la fusión del hidrógeno. Dos átomos de hidrógeno se fusionan para formar un átomo de deuterio, emitiendo un electrón y un neutrino. El átomo de deuterio se fusiona con otro átomo de hidrógeno para formar un átomo de helio-3, emitiendo radiación de alta frecuencia. A partir de esta etapa, el proceso puede seguir uno de tres caminos cuyos detalles omitiremos (aunque dos de ellos generan radiación adicional). Aquí interesa destacar esto: un átomo de helio-3, con masa atómica 3,01602970, resulta de la fusión de tres átomos de hidrógeno, con masa atómica 1,00782522. Así, en la fabricación de un MOL de helio-3 entran tres moles de hidrógeno, que pesan 3,02347566 gramos. Resta, pues, un saldo de 0,00744596 gramos, equivalente a $4{,}16 \times 10^{30}$ eV (185 891,5 kWh), el cual se reparte entre los electrones, los neutrinos y la radiación emitida.

(2) La fisión de un átomo pesado consiste en su fragmentación espontánea en átomos más livianos, partículas elementales y radiación. La suma de

las masas atómicas de los elementos químicos generados por la fisión es menor que la del elemento original. La diferencia se manifiesta como energía radiante y como energía cinética de los fragmentos. Entre los elementos susceptibles de fisión, además del plutonio-239, fabricado por el hombre con este fin, y el tristemente célebre uranio-235, cabe mencionar el torio, el polonio y también otros menos pesados como el bismuto, el oro y el plomo. La fisión de un átomo de plutonio o de uno de los isótopos del uranio libera aproximadamente 200 MeV (millones de electrón-voltios) de energía, de los cuales entre 160 y 180 MeV son energía cinética de los fragmentos, 15 a 30 MeV corresponden a la masa en reposo y la energía cinética de los neutrones emitidos y unos 7 MeV toman la forma de rayos γ.

entorno (A. *Umgebung*, F. *voisinage*, I. *neighborhood*). ↗TOPOLOGÍA.

entropía (A. *Entropie*, F. *entropie*, I. *entropy*). Los procesos de conversión de energía térmica en mecánica y viceversa (tema de la TERMODINÁMICA) son notoriamente asimétricos: mientras el TRABAJO espontáneamente genera CALOR con perfecta eficacia, la conversión de calor en trabajo supone arreglos y dispositivos especiales (máquinas térmicas), cuya eficacia imperfecta varía con las condiciones ambientales, y también con el estado del sistema. Este se caracteriza por la ENERGÍA interna y la TEMPERATURA, pero estas dos propiedades no bastan para dar cuenta del hecho de que en cada situación solo una fracción propia (variable) de la primera está disponible para transformarse en energía mecánica; hay que tener en cuenta además una tercera propiedad de los sistemas termodinámicos, que Clausius llamó *entropía*. (Fue concebida también independientemente por Rankine, quien la llamó *función termodinámica*.)

Para definir la entropía S de un sistema $\mathcal{Y}$, consideramos un proceso cíclico en el curso del cual $\mathcal{Y}$ intercambia calor con n cuerpos a las temperaturas absolutas $T_1,\ldots, T_n$, respectivamente. Sea Q_k la cantidad de calor intercambiada a temperatura T_k; ponemos $Q_k > 0$ si $\mathcal{Y}$ absorbe el calor y $Q_k < 0$ si $\mathcal{Y}$ lo entrega. Invocando el segundo principio de la termodinámica y las propiedades consiguientes de la MÁQUINA DE CARNOT, puede demostrarse que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{T_k} \leq 0 \tag{1}$$

y que la igualdad vale si y solo si el proceso es reversible (A. *umkehrbar*) según la definición de Clausius, esto es, si "también puede tener lugar en sen-

tido inverso bajo la influencia de las mismas fuerzas". Supongamos ahora que $\mathcal{Y}$ intercambia cantidades infinitesimales de calor con un continuo de fuentes de energía. Sea dQ el calor intercambiado por $\mathcal{Y}$ con una fuente a temperatura T. Entonces

$$\oint_{\mathcal{Y}} \frac{dQ}{T} \leq 0 \tag{2}$$

donde el símbolo $\oint$ indica que la integral se toma sobre un ciclo completo de $\mathcal{Y}$.

$$\oint_{\mathcal{Y}} \frac{dQ}{T} = 0 \tag{3}$$

si y solo si el ciclo es reversible. La última ecuación implica que, para todos los procesos reversibles que llevan al sistema $\mathcal{Y}$ de un estado A a otro estado B, la integral tiene el mismo valor, dependiente solo de los estados A y B y no de los pasos intermedios. Por lo tanto, dado un estado de referencia arbitrario O, se puede definir una propiedad del estado A por la ecuación

$$S(A) = \int_O^A \frac{dQ}{T} \tag{4}$$

$S(A)$ es la *entropía* de A o, si se quiere, la entropía del sistema $\mathcal{Y}$ en el estado A. Evidentemente,

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^O \frac{dQ}{T} + \int_O^B \frac{dQ}{T} = \int_O^B \frac{dQ}{T} - \int_O^A \frac{dQ}{T} = S(B) - S(A) \tag{5}$$

De aquí se infiere que las entropías $S(A)$ y $S'(A)$ asignadas a un mismo estado A con respecto a dos estados de referencia O y O' conforme a la ecuación (4) difieren entre sí solo por una constante aditiva igual a $\int_O^{O'} dQ/T$ y por tanto independiente de A. Este último residuo de arbitrariedad en la definición de entropía puede eliminarse tomando como referencia el estado del sistema a la temperatura 0 K (↗KELVIN) y asignándole convencionalmente entropía 0; pues, como demostró Nernst, la entropía de un sistema a esta temperatura es independiente de toda particularidad macroscópica del mismo.

La definición de entropía mediante la integral (4) presupone que esta última depende solo de O y A y, por tanto, tiene que tomarse sobre una sucesión continua de intercambios de calor *reversibles*; otro tanto vale para la integral $\int_A^B dQ/T$ en el extremo izquierdo de (5). Pero una vez que la entropía se ha definido como una propiedad de los sistemas termodinámicos, la diferencia de entropía en el extemo derecho de (5) puede compararse con la integral del extremo izquierdo *tomada sobre un continuo cualquiera* de intercambios de calor. Considérese un ciclo formado por un proceso arbitrario que lleva el estado A al estado B seguido por un proceso reversible que lleva de B a A. Entonces, por la ecuación (2), $0 \geq \oint_{ABA} dQ/T = \int_A^B dQ/T + \int_B^A dQ/T$; de modo que, por (5), en el caso general, $0 \geq \int_A^B dQ/T + S(A) - S(B)$, esto es,

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \tag{6}$$

Si el sistema termodinámico considerado está completamente aislado, $dQ = 0$. Por lo tanto, la entropía del estado final B es siempre igual o mayor que la del estado inicial A. *En un sistema termodinámico cerrado la entropía nunca puede disminuir.* Esta proposición, demostrable a partir del segundo principio de la termodinámica, a su vez lo implica y puede, por tanto, tomarse como una formulación concisa del mismo. Aplicada al Universo entero, esta proposición implica que su evolución, que consta casi exclusivamente de procesos irreversibles, redunda en un incremento continuo de la entropía hasta que esta alcance un máximo más allá del cual no puede crecer. Llegado a ese punto, el Universo alcanza un estado en que el calor ya no puede nunca convertirse en trabajo. La divulgación de este resultado a fines del siglo XIX inspiró toda una literatura sobre la "muerte térmica" del Universo.

En su reducción de la termodinámica a la MECÁNICA ESTADÍSTICA, Boltzmann mostró que la entropía $S(A)$ del estado A del sistema $\mathcal{Y}$ es una función de la probabilidad $\mathbf{p}(A)$ de dicho estado:

$$S(A) = -k \log \mathbf{p}(A) \tag{7}$$

donde k es la CONSTANTE DE BOLTZMANN, log denota el logaritmo natural y la probabilidad $\mathbf{p}(A)$ es igual al cociente entre el número de configuraciones microscópicas del sistema $\mathcal{Y}$ que se traducen en el estado macroscópico A y el número total de las configuraciones microscópicas posibles de $\mathcal{Y}$. Se escucha a veces que la entropía de Boltzmann es una medida del desorden. Ello es trivialmente así si acordamos caracterizar el orden de un sistema fí-

sico en un cierto estado por la improbabilidad de este. Sin embargo, tal caracterización convencional no concuerda necesariamente con lo que en castellano se llama 'orden', el cual depende en alto grado del contexto y, sobre todo, de nuestros propósitos. Por ejemplo, si el desorden creciera con la entropía, en una taza de café con leche bien mezclados habría menos orden que en una en la que todo el café flota sobre la leche; pero es claro que al ir a bebérnosla, el orden de esta nos parecería deficiente y usaríamos una cuchara para ayudarla a alcanzar cuanto antes el orden de aquella. (A menos, claro está, que *deseemos tomar el café sin leche*, en cuyo caso, el segundo orden es el más apropiado, pues permite —hasta cierto punto— tomarlo solo y dejar la leche.)

En la teoría matemática de la comunicación creada por Shannon (1948), se considera una fuente F capaz de asumir m estados diferentes caracterizables por la probabilidad que F tiene en cada estado de transmitir cada uno de los símbolos $s_1,\ldots, s_n$. Sea P_i la probabilidad de que F esté en el i-ésimo estado y sea $p_i(s_k)$ la probabilidad de que F trasmita el símbolo s_k cuando se encuentra en dicho estado ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$). Shannon llama *entropía* de la fuente F "por símbolo de texto" a la suma ponderada

$$H(F) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_i p_i(s_k) \log p_i(s_k) \qquad (8)$$

El nombre fue motivado por el parecido formal entre las fórmulas (8) y (7) y también, quizás, por las ideas expuestas por Szilard (1929), a propósito del DEMONIO DE MAXWELL, acerca de la relación entre la entropía del gas en que este interviene y la información que tiene que recoger para cumplir su tarea. Con todo, no hay que perder de vista que en la fórmula (7) la proporción entre la entropía $S(A)$ y el logaritmo de la probabilidad $\mathrm{p}(A)$ es un número de joules por kelvin, de modo que $S(A)$ es una cantidad física dimensionada; en tanto que en la fórmula de Shannon, $H(F)$ es un número puro. No cabe sostener, pues, que la entropía de Shannon sea la misma cantidad física que la entropía de Boltzmann o la entropía de Clausius. Por otra parte, la homonimia de estos conceptos ha inspirado muchísimas disquisiciones, algunas muy confusas, pero otras ciertamente interesantes.

enumerable (A. *aufzählbar*, F. *énumérable*, I. *enumerable*). Un conjunto es enumerable si hay un algoritmo para enumerarlo, es decir, si ese conjunto constituye el recorrido de una función computable sobre los números naturales. Un conjunto A es *recursivamente enumerable* si y solo si hay una función recursiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, cuyo recorrido $f[\mathbb{N}] = A$. Al recorrer el conjunto

A, *f* lo enumera: *f*(0), *f*(1), *f*(2), *f*(3)... (ignorando las posibles repeticiones). No hay que confundir la noción recursiva de enumerabilidad con la noción conjuntista de numerabilidad. Un conjunto es NUMERABLE si es finito o biyectable con ℕ. Todo conjunto enumerable es numerable, pero no a la inversa. Cualquier conjunto de fórmulas de primer orden es numerable, pero, por ejemplo, el conjunto de todas las sentencias finitamente válidas (es decir, satisfechas por todas las estructuras finitas) no es enumerable, como probó Trakhtenbrot en 1950. Una lógica es semánticamente completa si y solo si el conjunto de sus fórmulas válidas es enumerable. Por eso el conjunto de las fórmulas válidas de la lógica de primer orden es recursivamente enumerable, mientras que el de la lógica finita de primer orden o el de la lógica de segundo orden no lo son.

enunciado de Ramsey (A. *Ramsey Satz*, F. *énoncé de Ramsey*, I. *Ramsey sentence*). Según Ramsey (1929), la presentación formal de una teoría científica puede purgarse de todos los términos que designen entes inobservables, mediante el siguiente procedimiento: si $\Phi(u)$ es un enunciado de la teoría en que aparece una o más veces un nombre *u* que designa un ente inobservable, hay que reemplazarlo en cada una de las posiciones en que aparece por una variable libre *x* que no figure en $\Phi(u)$, obteniendo así la fórmula $\Phi(x)$; prefijándole a esta el cuantificador existencial $\exists x$ se obtiene el *enunciado de Ramsey* $\exists x\Phi(x)$ que tiene las mismas consecuencias observables que $\Phi(u)$. Hay quienes consideran que esta fue una gran idea. Antes de concluir que así es será útil tener presente que, según la semántica estándar de la lógica de primer orden (que Ramsey no vivió para conocer), el enunciado $\exists x\Phi(x)$ es verdadero en una interpretación $\mathfrak{I}$ de la teoría en cuestión si y solo si el universo del discurso contiene un objeto individual tal que, si el nombre *u* designa ese objeto en la propia $\mathfrak{I}$ o en una variante suya $\mathfrak{I}'$ que en todo lo demás coincide con $\mathfrak{I}$, el enunciado $\Phi(u)$ es verdadero, respectivamente, en $\mathfrak{I}$ o en $\mathfrak{I}'$.

enunciado protocolar (A. *Protokollsatz*, F. *énoncé protocolaire*, I. *protocol statement*). Propiamente, un enunciado que registra el resultado de una observación científica en el protocolo de un laboratorio. En la literatura del EMPIRISMO LÓGICO la expresión designa los enunciados en lenguaje FISICALISTA en que tiene que expresarse toda la información de que dispone la ciencia y que, por lo tanto, en último término proveen de significado a todos los enunciados científicos. El ejemplo siguiente ilustra la forma típica de tales enunciados: "El 3 de junio de 1932, a las 10:25 A.M., Otto vio que la columna de mercurio del termómetro adyacente a la ventana norte llegaba al número 27,8". Es claro que los enunciados de este género no son irrefutables. Por lo

tanto, una filosofía que base en ellos todo el conocimiento científico no puede, estrictamente, ser calificada de fundacionista.

EPR. Sigla de Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen, que se utiliza para referirse a la crítica de la mecánica cuántica formulada por estos autores en 1935, al experimento mental ideado por ellos para justificar esa crítica y a la paradoja que supuestamente pusieron de manifiesto. ↗PARADOJA DE EINSTEIN, PODOLSKY Y ROSEN.

equivalencia (A. *Äquivalenz*, F. *équivalence*, I. *equivalence*). Sea M un conjunto. Una *relación de equivalencia* en M es una relación binaria R que cumple las tres condiciones siguientes, para cualesquiera elementos a, b, $c \in M$:

E1 *Raa* (la relación de equivalencia es *reflexiva*).
E2 *Rab* solo si *Rba* (la relación de equivalencia es *simétrica*).
E3 Si *Rab* y *Rbc*, entonces *Rac* (la relación de equivalencia es *transitiva*).

Una relación de equivalencia en M determina una PARTICIÓN de M en subconjuntos mutuamente exclusivos llamados *clases de equivalencia*. Si $a \in M$, a pertenece a la clase de equivalencia $[a]_R = \{x : x \in M \text{ y } Rax\}$. El conjunto $\{[x]_R : x \in M\}$ de todas las clases de equivalencia que la relación R determina en M se llama el *cociente* o *espacio cociente* de M por R y suele designarse con M/R.

equivalencia elemental (A. *elementare Äquivalenz*, F. *équivalence élémentaire*, I. *elementary equivalence*). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos estructuras del mismo tipo de semejanza σ, donde σ es una secuencia de números que indica el número, tipo y aridad de los parámetros del correspondiente lenguaje formal de primer orden $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se diferencian en algo expresable en el lenguaje $\mathcal{L}$, es decir, si hay una sentencia φ tal que $\mathcal{A}$ satisface φ pero $\mathcal{B}$ no satisface φ, entonces decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no son elementalmente equivalentes. Si, por el contrario, entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no hay ninguna diferencia expresable en el lenguaje $\mathcal{L}$, decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes. $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *elementalmente equivalentes* (en símbolos, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) si y solo si, para cada sentencia φ de $\mathcal{L}$: $\mathcal{A}$ satisface φ si y solo si $\mathcal{B}$ satisface φ. Dos sistemas elementalmente equivalentes pueden ser muy distintos y pueden no ser isomorfos. Lo que se requiere es que todo lo expresable en $\mathcal{L}$ que se cumpla en $\mathcal{A}$ se cumpla también en $\mathcal{B}$ y todo lo expresable en $\mathcal{L}$ que sea falso en $\mathcal{A}$ sea también falso en $\mathcal{B}$. Por lo demás, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ pueden diferenciarse en muchas cosas no expresables en $\mathcal{L}$.

La teoría de la estructura $\mathcal{A}$, $th(\mathcal{A})$, es el conjunto de las sentencias de $\mathcal{L}$ satisfechas por $\mathcal{A}$ (es decir, verdaderas en cualquier interpretación sobre $\mathcal{A}$).

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes, entonces satisfacen las mismas sentencias y, por tanto, comparten la misma teoría: si $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, entonces $th(\mathcal{A}) = th(\mathcal{B})$.

La relación de equivalencia elemental entre estructuras es una relación de EQUIVALENCIA. También la isomorfía entre estructuras es una relación de equivalencia y como tal es más fina y exigente que la equivalencia elemental. En efecto, la isomorfía siempre implica equivalencia elemental, pero no a la inversa. Solo en el caso de las estructuras finitas (es decir, con universo finito) coincide la isomorfía con la equivalencia elemental. Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Si $\mathcal{A}$ es finito y $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Dos sistemas isomorfos son estructuralmente idénticos. Dos sistemas elementalmente equivalentes coinciden en sus aspectos estructurales expresables en un lenguaje formal de primer orden, pero pueden tener diferencias estructurales solo expresables en un lenguaje de orden superior. Así las realizaciones o modelos no estándar de la aritmética de Peano de primer orden son elementalmente equivalentes al modelo estándar, con el que no son isomorfas. La isomorfía es una típica relación algebraica, que interrelaciona sistemas sin pasar por la mediación de lenguaje formal alguno. Sin embargo, la equivalencia elemental es una típica relación semántica o de teoría de modelos, que interrelaciona sistemas a base de considerar qué sentencias de cierto lenguaje formal satisfacen.

error (A. *Fehler*, F. *erreur*, I. *error*). En general, los resultados de distintas mediciones de una misma cantidad física en circunstancias consideradas iguales no coinciden unos con otros ni con el valor previsto por la teoría aceptada. En muchos casos la frecuencia relativa de los valores obtenidos en una serie larga de mediciones tiende a distribuirse simétricamente en torno a un valor medio. Dicha distribución puede entonces representarse satisfactoriamente mediante el histograma descrito enseguida. Entre los resultados obtenidos, elegimos una muestra de $n + 1$ valores $x_0, \ldots, x_n$, no necesariamente equidistantes, ordenados de menor a mayor, y que incluya tanto el mínimo resultado obtenido x_0 como el máximo x_n. Definimos una función $F_n : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \mathbb{N}$ de este modo: ponemos $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ $(0 < k \leq n)$; si $k < n$, $F_n(x_k)$ es igual a la frecuencia relativa de los valores x que satisfacen la desigualdad $x_{k-1} \leq x < x_k$ para cada entero positivo, dividida por Δ_k; $F_n(x_n)$ es igual a $(1/\Delta_n)$ veces la frecuencia relativa de los valores x que satisfacen la desigualdad $x_{n-1} \leq x \leq x_n$. Construimos un histograma formado por n columnas tales que el ancho de la k-ésima sea Δ_k y su altura sea $F_n(x_k)$. Es claro que

$$\sum_{k=1}^{n} F_n(x_k)\Delta_k = 1 \qquad (1)$$

Si la multitud de los distintos valores registrados tiende a aumentar indefinidamente con el número de mediciones, es conveniente y razonable concebir la distribución de sus frecuencias relativas como continua. Pasando al límite $n \rightarrow \infty$, la sumatoria (1) puede reemplazarse por la integral (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 1 \tag{2}$$

El valor *medio* de todas las mediciones está dado entonces por:

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} xF(x)dx \tag{3}$$

Bajo los supuestos antedichos, X es asimismo el *modo* de la distribución (el valor registrado con mayor frecuencia) y también la *mediana* (el número de las mediciones que arrojan un resultado menor que X es igual al número de las que arrojan un resultado mayor). Si una medición arroja un valor x, la diferencia $x - X$ se suele llamar el *error* de esa medición. Esta denominación es claramente un vestigio de una época en que se pensaba que cada cantidad física medida tenía "en sí misma" un único valor verdadero, representado en nuestro caso por el constructo matemático X. El valor medio de los errores,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - X)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xF(x)dx - X\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = X - X = 0 \tag{4}$$

y por ello carece de interés. Pero tomando el valor absoluto $|x - X|$ de los errores o sus cuadrados $(x - X)^2$, se obtienen dos cantidades que informan significativamente sobre la dispersión de los valores registrados x en torno al valor medio X, a saber, la *desviación media absoluta* τ y la *variancia* (o *dispersión*) σ^2, definidas así:

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |x - X| F(x)dx \tag{5}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^2 F(x)dx \tag{6}$$

La raíz cuadrada σ de esta última cantidad es la *desviación estándar* de la distribución F. En el caso ideal de una distribución simétrica continua, considerado aquí, la probabilidad de que una medición cualquiera arroje un resultado comprendido en el intervalo $[X - 0{,}6745\sigma, X + 0{,}6745\sigma]$ es igual a

0,5; por esta razón, en la literatura más antigua la cantidad 0,6745σ solía llamarse *error probable*. Las definiciones de *valor medio*, *desviación media absoluta*, *variancia* y *desviación estándar* se extienden naturalmente al caso de una distribución continua asimétrica.

errores de tipo I y de tipo II (A. *Fehler erster und zweiter Klasse*, F. *erreurs du type I et du type II*, I. *Type I and Type II errors*). El test de una hipótesis estadística puede dar lugar a dos tipos de error. Llámase *error de tipo I* al rechazo de la hipótesis cuando ella es verdadera y *error de tipo II* a la aceptación de la hipótesis cuando ella es falsa. El *tamaño* (I. *size*) del test es la probabilidad de incurrir con él en un error de tipo I. El *poder* (I. *power*) del test es igual a 1 menos la probabilidad de incurrir con él en un error de tipo II. Idealmente, pues, convendría minimizar el tamaño y maximizar el poder de los tests. Pero, evidentemente, en muchos casos solo se puede progresar en la dirección de una de estas metas al precio de sacrificar la otra.

escala de intervalos (A. *Intervallskala*, F. *échelle d'intervalles*, I. *interval scale*). A veces no resulta posible introducir en un sistema comparativo una operación de combinación empírica representable aditivamente, como la que se requiere para definir una ESCALA PROPORCIONAL, pero es posible establecer comparaciones entre pares de objetos (o entre diferencias entre objetos) respecto a la propiedad que nos interesa metrizar, como la temperatura o la preferencia. Ello nos permite introducir una *escala de intervalos*, más informativa que una mera ESCALA ORDINAL, aunque menos que una proporcional.

En un sistema de diferencias no solo comparamos entre sí dos objetos cualesquiera del dominio respecto a si poseen más o menos la propiedad en cuestión, sino que también comparamos las diferencias entre pares de objetos respecto a esa propiedad. Si se trata de preferencias, no solo preferimos una cosa a otra, sino que nuestra preferencia de x sobre y es mayor que nuestra preferencia de z sobre w (es decir, estamos más dispuestos a canjear y por x que a canjear w por z). Si se trata de temperaturas cualitativas (comparadas mediante un tubo de mercurio no calibrado), no solo podemos decir que un líquido está menos caliente que otro (pues la columna de mercurio dentro del tubo sube menos), sino que también podemos comparar las diferencias entre dos tazas de café y entre dos vasos de agua, comprobando si el recorrido del mercurio en el tubo al pasar de una taza de café a otra es menor o mayor que al pasar de un vaso de agua a otro.

Un sistema de diferencias es la expansión de un sistema comparativo (con universo A) mediante la introducción de dos relaciones cualitativas binarias. Una de estas relaciones, E, es una relación de equivalencia en $A \times A$. La otra, D, es una relación de precedencia u orden débil en $A \times A$. Estas relaciones

deben satisfacer ciertas condiciones, que son las que aseguran que luego se pueda introducir la correspondiente escala de intervalos. En vez de '$(x,y)D(z,w) \vee (x,y)E(z,w)$' escribimos '$(x,y)D{\cup}E(z,w)$', que significa que la diferencia entre x e y es equivalente o menor que la diferencia entre z y w.

$\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$ es un *sistema de diferencias* si y solo si $\langle A,\sim,\prec\rangle$ es un sistema comparativo y para cualesquiera x, y, z t, r, $w \in A$:

(1) E es una relación de equivalencia en $A \times A$
D es una relación de orden débil en $A \times A$
(2) $(x,y)D{\cup}E(z,w) \Rightarrow (w,z)D{\cup}E(y,x)$
(3) $(x,y)D{\cup}E(z,t) \wedge (w,r)D{\cup}E(s,l) \Rightarrow (x,w)D{\cup}E(z,l)$
(4) $(x,x)D{\cup}E(y,z) \wedge (y,z)D{\cup}E(w,x) \Rightarrow \exists v \exists u{\in}A[(u,x)E(y,z) \wedge (w,v)E(y,z)]$
(5) Toda sucesión estándar *estrictamente* acotada de A es finita.

La segunda condición de la definición del sistema de diferencias indica que la relación se invierte si trastocamos el orden de los pares. La tercera indica una monoticidad débil. La cuarta asegura la solubilidad de las ecuaciones. La quinta usa la noción de sucesión estándar estrictamente acotada. Una sucesión cualquiera, a_1, a_2,..., a_i,... de elementos de A es una sucesión estándar estrictamente acotada de A si y solo si (1) las diferencias entre elementos sucesivos son equivalentes, es decir, $(a_1,a_2)E(a_i,a_{i+1})$, (2) las diferencias entre elementos sucesivos no son nulas, es decir, $\neg(a_1,a_2)E(a_1,a_1)$, y (3) hay cotas en A que acotan estrictamente la sucesión, es decir, hay $b,c \in A$ tales que, para cada a_i, $(b,c)D(a_1a_i)D(c,b)$.

Una *escala de intervalos* sobre un sistema de diferencias $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$ es un homomorfismo de $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$ en $\langle \mathbb{R},=,<,=_d,<_d\rangle$ (donde $=_d$, $<_d$ son la igualdad y la relación de precedencia entre diferencias numéricas), es decir, una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $x,y \in A$:

$$x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$x \prec y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
$$(x,y)E(z,w) \Rightarrow f(x) - f(y) = f(z) - f(w)$$
$$(x,y)D(z,w) \Rightarrow f(x) - f(y) < f(z) - f(w)$$

El teorema de representación nos asegura que si $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$ es un sistema de diferencias, entonces hay al menos una escala de intervalos sobre $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$.

Una transformación lineal positiva de una función es otra función que resulta de multiplicar cada valor de la primera por un número positivo fijo y añadir al resultado otro número determinado. Es decir, h es una transformación lineal positiva de f si y solo si hay un $k \in \mathbb{R}^+$ y un $s \in \mathbb{R}$, tales que,

para cada $x \in A$, $h(x) = k{\cdot}f(x) + s$. Toda transformación similar es lineal positiva (para $s = 0$), pero no a la inversa. Y toda transformación lineal positiva es monótona, pero no a la inversa. El teorema de unicidad dice que si $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$ es un sistema de diferencias, f es una escala de intervalos sobre $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$, y h es una transformación lineal positiva de f, entonces h es también una escala de intervalos sobre $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$. Por tanto, un sistema de diferencias *no* determina unívocamente una escala de intervalos más que hasta transformaciones lineales positivas.

Si queremos construir una escala concreta, procedemos del siguiente modo. Elegimos dos objetos no equivalentes (o dos clases de equivalencia de objetos) del dominio y les asignamos convencionalmente dos números distintos. Esos objetos (o clases de equivalencia de objetos) y los números que les asignamos fijan la escala. Una vez efectuada esa elección por nuestra parte, las propiedades del sistema de diferencias determinan unívocamente los valores de la escala de intervalos para el resto de los objetos, de tal modo que se preserva el orden y las diferencias. Las diversas escalas sobre el mismo sistema de diferencias se basan en la elección de pares de objetos no equivalentes como patrones o en la asignación de números distintos a los mismos patrones.

Las magnitudes que consisten en escalas de *intervalos* son *magnitudes intensivas*. Ejemplos típicos de magnitudes intensivas son la temperatura (en la física) y la utilidad (en la teoría económica o en la teoría de la decisión). Consideremos la temperatura (métrica), que es un homomorfismo del sistema de diferencias cualitativas de temperatura en un sistema matemático. Supongamos que ya disponemos de un sistema cualitativo de diferencias de temperatura $\langle A,\sim,\prec,E,D\rangle$ en el dominio A de los líquidos presentes en el laboratorio, basado en el tubo de mercurio sin graduar. Toda asignación f de números reales a los líquidos de A que preserve las relaciones de equivalencia y precedencia entre líquidos de A y entre pares de (o diferencias entre) líquidos de A será una escala de temperatura. Para fijar una escala determinada, elegimos un cierto tipo de líquidos del dominio A y asignamos un número c a estos líquidos cuando se encuentran en un estado determinado y fácilmente reproducible. Luego asignamos otro número distinto k a los líquidos del mismo tipo que se encuentran en otro estado determinado y fácilmente reproducible, pero distinto del anterior. En el caso de la escala Celsius, lo que hacemos es asignar el número 0 al agua en el punto de fusión y el número 100 al agua en el punto de ebullición (ambos tomados a nivel del mar). En el caso de la escala Fahrenheit, a esos dos puntos les asignamos los números 32 y 212. En el caso de la escala Kelvin, esos números son 273,15 y 373,15, respectivamente. (Sobre la definición de la escala Kelvin, ↗TEMPERATURA.)

Cualquier transformación lineal positiva de una escala de intervalos es otra escala de intervalos (otro homomorfismo del mismo sistema de diferencias cualitativas en el mismo sistema numérico). Las escalas de temperatura (como la escala Celsius, la escala Fahrenheit y la escala Kelvin o absoluta) son escalas de intervalos, obtenibles unas a partir de otras mediante transformaciones lineales positivas. Así, para pasar de la escala Celsius a la escala Fahrenheit hemos de multiplicar el valor Celsius por 9/5 y añadir 32 al resultado. Es decir,

$$T_F(x) = 9/5\ T_C(x) + 32$$

A la inversa, para pasar de la escala Fahrenheit a la escala Celsius, multiplicamos el valor Fahrenheit por 5/9 y añadimos –160/9 al resultado.

$$T_C(x) = 5/9\ T_F(x) - 160/9$$

escala ordinal (A. *Ordinalskala*, F. *échelle ordinale*, I. *ordinal scale*). Cuando introducimos un CONCEPTO COMPARATIVO para una característica C que los individuos de un dominio A poseen en mayor o menor grado, definimos una relación de coincidencia y otra de precedencia respecto a esa característica. La relación de coincidencia $\sim_C$ es una relación de EQUIVALENCIA. La relación de precedencia $<_C$ es una relación de orden débil, es decir, una relación asimétrica, transitiva y $\sim_C$-conectada. Se supone que las relaciones $\sim_C$ y $<_C$ son cualitativas y determinables de un modo empírico y operativo (aceptando a veces ciertas idealizaciones). Si el ámbito A está bien definido, y las relaciones $\sim_C$ y $<_C$ cumplen las condiciones indicadas, decimos que $\langle A, \sim_C, <_C \rangle$ constituye un sistema comparativo. En general, $\langle A, \sim, < \rangle$ es un *sistema comparativo* si y solo si $\sim$ y $<$ son relaciones binarias en A tales que para cualesquiera x, y, $z \in A$: (1) $x \sim x$; (2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; (3) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$; (4) $x < y \Rightarrow \neg y < x$; (5) $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$; (6) $x < y \vee y < x \vee x \sim y$.

Una *escala ordinal* sobre el sistema comparativo $\langle A, \sim, < \rangle$ es un homomorfismo de $\langle A, \sim, < \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, =, < \rangle$, es decir, una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $x, y \in A$, (1) $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$; (2) $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Todo concepto comparativo puede ser representado por una escala ordinal, según enuncia su teorema de representación: si $\langle A, \sim, < \rangle$ es un sistema comparativo, entonces hay al menos una escala ordinal sobre $\langle A, \sim, < \rangle$. De todos modos, las escalas ordinales son tan débiles que apenas pueden considerarse conceptos cuantitativos. En efecto, si bien la escala ordinal asigna números a los objetos de un modo compatible con el sistema comparativo de partida, no sirve para medir diferencias ni proporciones. Una escala ordinal se limita a asignar números a los objetos del sistema empírico, de tal mane-

ra que, si un objeto precede a otro, le asigne al primero un número menor que al segundo, y si coinciden, les asigne el mismo número, pero sin pretensión alguna de expresar cuantitativamente las diferencias o las proporciones. Simplemente se indica que un objeto es más *C* que otro, pero sin decirnos cuánto más.

Una función es una *transformación monótona* de otra si ambas crecen juntas. Es decir, la función *h* es una transformación monótona de la función *f* si y sólo si, para cada $x, y \in A$, $h(x) < h(y) \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Cualquier transformación monótona de una escala ordinal es una escala ordinal, como indica su teorema de unicidad: si $\langle A,\sim,\prec\rangle$ es un sistema comparativo, *f* es una escala ordinal sobre $\langle A,\sim,\prec\rangle$ y *h* es una transformación monótona de *f*, entonces *h* es también una escala ordinal sobre $\langle A,\sim,\prec\rangle$.

La escala de Mohs para la dureza de los minerales es un ejemplo de escala ordinal, que representa el concepto comparativo de dureza basado en el test del rayado. También la escala de Mercalli para terremotos es del mismo tipo. Pareto mostró cómo la teoría microeconómica podía prescindir de la magnitud de utilidad concebida como escala de intervalos y basarse en una mera escala ordinal de utilidad.

escala proporcional (A. *Verhältnisskala*, F. *échelle proportionnelle*, I. *ratio scale*). Las escalas proporcionales son los conceptos métricos por antonomasia: no solo nos dicen que un objeto es mayor que otro respecto a cierta característica, sino que indican exactamente en qué proporción es mayor. De hecho, la mayor parte de las nociones básicas de la física clásica, como las de masa, longitud o tiempo, son escalas proporcionales. La estructura de un sistema comparativo es demasiado débil para determinar una escala proporcional; para ello se requiere añadir una nueva operación empírica $\perp$ de combinación o concatenación de objetos. Dados dos objetos *x*, *y* del dominio, siempre ha de ser posible combinarlos de tal modo que su combinación, $x \perp y$, sea considerada como un nuevo objeto. Además queremos que esa operación de combinación corresponda de alguna manera a la adición de números. La operación de verter el contenido de dos botellas iguales en un tercer recipiente es aditiva respecto a volumen o masa, pero no lo es respecto a temperatura. El volumen y la masa del líquido contenido en el recipiente final son el doble que el volumen o la masa del líquido en una de las botellas, pero la temperatura resultante no es el doble de la temperatura previa, sino la misma temperatura. Solo las operaciones del primer tipo conducen a sistemas extensivos, que, a su vez, nos permiten luego definir sobre ellos magnitudes aditivas, es decir, escalas proporcionales.

Un sistema extensivo es la expansión de un sistema comparativo $\langle A,\sim,\prec\rangle$ mediante la introducción de una operación binaria $\perp$ de combinación, que

debe ser asociativa, conmutativa respecto a $\sim$, monótona respecto a $<$, positiva y arquimediana. Esta última condición exige que, por mucho que y sea inferior a x, siempre haya un número natural n tal que la concatenación de y consigo mismo n veces sea superior a x (↗POSTULADO DE ARQUÍMEDES). La manera más sencilla de entender esta condición es exigir que haya en A copias exactas de los objetos de A, de tal manera que la concatenación de x consigo mismo sea la concatenación de x con una copia exacta de x. La concatenación de x consigo mismo n veces puede ser definida recursivamente así: (i) $1x = x$; (ii) $(n+1)x = nx \perp x$. En general, $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$ es un *sistema extensivo* si y solo si $\langle A,\sim,<\rangle$ es un sistema comparativo y $\perp : A \times A \rightarrow A$ es una operación binaria en A tal que, para cualesquiera $x, y, z \in A$: (1) $x \perp (y \perp z) \sim (x \perp y) \perp z$; (2) $x \perp y \sim y \perp x$; (3) $x < y \Leftrightarrow x \perp z < y \perp z \Leftrightarrow z \perp x < z \perp y$; (4) $x < x \perp y$; (5) $\exists n \in \mathbb{N}(x < ny)$.

Las escalas proporcionales son las más informativas. Asignan números a los objetos de un sistema extensivo de tal modo que la función resultante no solo conserva el orden del sistema empírico, sino también traduce adecuadamente la operación empírica de combinación de objetos como una adición de números. Toda escala proporcional es una ESCALA ORDINAL y una ESCALA DE INTERVALOS, pero no a la inversa.

Una *escala proporcional* sobre un sistema extensivo $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$ es un homomorfismo de $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$ en $\langle \mathbb{R},=,<,+\rangle$, es decir, una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $x, y \in A$, (1) $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$; (2) $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; (3) $f(x \perp y) = f(x) + f(y)$. El teorema de representación afirma que si $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$ es un sistema extensivo, entonces hay al menos una escala proporcional sobre $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$.

Una transformación similar de una función es otra función que resulta de multiplicar cada valor de la primera por un número positivo. Es decir, h es una transformación similar de f si y solo si hay un $k \in \mathbb{R}^+$ tal que, para cada $x \in A$, $h(x) = k{\cdot}f(x)$. Toda transformación similar es una transformación lineal positiva y monótona creciente, pero no a la inversa. Toda transformación similar de una escala proporcional es también una escala proporcional, como indica el teorema de unicidad: si $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$ es un sistema extensivo, f es una escala proporcional sobre $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$ y h es una transformación similar de f, entonces h es también una escala proporcional sobre $\langle A,\sim,<,\perp\rangle$. Por tanto, un sistema extensivo no determina unívocamente una escala proporcional más que hasta transformaciones similares. Si queremos construir una escala concreta, procedemos del siguiente modo. Elegimos un objeto cualquiera (o clase de equivalencia de objetos) del dominio y le asignamos convencionalmente un número cualquiera (normalmente, el 1). Ese objeto (o clase de objetos equivalentes) es la unidad estándar o patrón de la escala. Una vez efectuada esa elección por nuestra parte, las propiedades del sistema extensivo deter-

minan unívocamente los valores de la escala proporcional para el resto de los objetos, de tal modo que se preserva el orden y la operación resulta aditiva. Las diversas escalas sobre el mismo sistema extensivo se basan en la elección de objetos no equivalentes como patrón o en la asignación de números distintos al mismo patrón. En cualquier caso, cada una de esas escalas es una transformación similar de cualquiera de las otras.

escalar (A. *Skalar*, F. *scalaire*, I. *scalar*). Sea $\mathcal{V}$ un ESPACIO VECTORIAL sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. En este contexto, cualquier $r \in \mathbb{K}$ es un *escalar*, porque la multiplicación de cada vector por r constituye un cambio de escala. Un *campo escalar* sobre $\mathcal{V}$ es una función $f: \mathcal{V} \to \mathbb{K}$. En el caso muy común en que $\mathcal{V}$ y $\mathbb{K}$ son espacios topológicos, suele suponerse tácitamente que f es una FUNCIÓN CONTINUA e incluso una FUNCIÓN LISA.

escepticismo (A. *Skeptizismus*, F. *scepticisme*, I. *scepticism*). Del griego σκέπτομαι, 'mirar atentamente, examinar'. Ante todo, se da este nombre a las filosofías del periodo helenístico que, contrariando el dogmatismo común a estoicos y epicúreos, cuestionaban la capacidad humana de alcanzar la certeza en ningún asunto. Sus adversarios alegan, todavía hoy, que el escéptico se contradice al reclamar que *sabe* (¿con certeza?) que nada se *sabe* (con certeza). Sin embargo, como señala Sexto Empírico, el escéptico no dogmatiza con sus asertos; solo anuncia con ellos lo que se le muestra y lo afecta, al margen de toda opinión. Y al decir que el escéptico no dogmatiza, no hay que entender por *dogma* el asentimiento a cualquier cosa —por ejemplo, el escéptico no negaría que tiene frío cuando lo siente—, sino específicamente el asentimiento a alguno de los objetos no manifiestos investigados por las ciencias.

En el siglo XVI el escepticismo revive con Montaigne, Charron, Sánchez. A partir del siglo XVII, el escepticismo moderno se centra en el cuestionamiento de la posibilidad de conocer los objetos del llamado MUNDO EXTERIOR. Lo artificial de esta postura ha contribuido a marginar el escepticismo en la cultura moderna, sobre todo en las universidades, dedicadas a formar profesionales henchidos de certezas.

espacio (A. *Raum*, F. *espace*, I. *space*). Para Newton (1687), el mundo físico consta de cuerpos inmersos en un espacio tridimensional infinito (HOMEOMORFO a $\mathbb{R}^3$), provisto de la métrica euclídea (↗MÉTRICA ESTÁNDAR DE $\mathbb{R}^n$). La tarea de la física consiste, según él, en explicar todos los fenómenos naturales como efecto de las fuerzas que preservan o alteran el movimiento de los cuerpos en ese espacio. Este concepto de espacio, que ya Giordano Bruno hizo suyo sin reservas, había sido anticipado por Hasdai Crescas, y podría

decirse que está implícito en la obra de Euclides; pero es ajeno a casi todas las culturas y la lengua griega del propio Euclides no tenía una palabra para nombrarlo. Ello no obstante, el filósofo Kant (1781) convenció al siglo XIX de que el espacio euclídeo de Newton es un ingrediente insoslayable de la experiencia humana, y aún después del ocaso de la física clásica a principios del siglo XX ha seguido prevaleciendo la opinión de que, si no el espacio de Newton, otro continuo similar es, o bien un factor indispensable en la organización científica de los fenómenos, o bien incluso un aspecto de la realidad en sí. Como quiera que uno piense al respecto, conviene tener bien claro que la evidente articulación de nuestras vidas en una red de *lugares*, ordenados en *direcciones* y separados por *distancias*, no conlleva la inmersión de esta red en un espacio euclídeo ni en ninguna otra estructura matemática por el estilo.

En matemáticas, se designan con la palabra *espacio*, seguida de un epíteto, diferentes estructuras que se han ido concibiendo como generalizaciones o análogos del espacio tridimensional euclídeo. Algunas se definen en los artículos siguientes.

espacio de Banach (A. *Banachscher Raum*, F. *espace de Banach*, I. *Banach space*). Los espacios de Banach son espacios vectoriales a los que se puede extender de un modo natural el cálculo diferencial originalmente inventado para las funciones con argumentos y valores en $\mathbb{R}$ (↗DERIVADA).

Un ESPACIO VECTORIAL NORMALIZADO $\mathcal{V}$ es un *espacio de Banach* si toda SECUENCIA DE CAUCHY $(\mathbf{v}_i)_{i \in \omega}$ $(\mathbf{v}_i \in \mathcal{V})$ converge a un vector en $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach se entiende que $\mathcal{V}$ es un ESPACIO TOPOLÓGICO cuya BASE es la colección de todos los conjuntos $\{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ y $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < r\}$ para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y cada $r \in \mathbb{R}$. (Esta colección se deja ver como una FAMILIA parametrizada por el PRODUCTO CARTESIANO $\mathcal{V} \times \mathbb{R}$.)

Un espacio de Banach se dice *real* si el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$, *complejo* si el cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$.

espacio de configuración (A. *Konfigurationsraum*, F. *espace de configuration*, I. *configuration space*). La configuración instántanea de un sistema mecánico clásico de partículas con n grados de libertad (↗MECÁNICA CLÁSICA) se especifica indicando las n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ en ese instante y puede, por lo tanto, representarse mediante un punto p en una VARIEDAD DIFERENCIABLE de n dimensiones. Esta variedad es el *espacio de configuración* $\mathfrak{Q}$ del sistema. Su topología depende de las propiedades de éste, en particular de las ligaduras a que está sujeto. En la variedad $\mathfrak{Q}$ hay una y solo una CURVA parametrizada por el tiempo t que pasa por p y satisface las ECUACIONES DE EULER Y LAGRANGE del sistema. El camino de esa curva represen-

ta la sucesión de todas las configuraciones del sistema, esto es, su evolución antes y después del instante representado por p.

espacio de Hausdorff (A. *Hausdorffscher Raum*, F. *espace de Hausdorff*, I. *Hausdorff space*). El ESPACIO TOPOLÓGICO $\mathcal{S}$ es un *espacio de Hausdorff* si y solo si, para cualesquiera dos puntos diferentes $x, y \in \mathcal{S}$ hay un entorno $U(x)$ de x y un entorno $U(y)$ de y tales que $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

espacio de Hilbert (A. *Hilbertscher Raum*, F. *espace de Hilbert*, I. *Hilbert space*). Un *espacio de Hilbert* es un ESPACIO VECTORIAL provisto de un PRODUCTO INTERNO y que tiene la estructura de un ESPACIO DE BANACH. Como esta condición la cumple todo espacio vectorial real o complejo de dimensión finita, provisto de un producto interno, el interés del concepto radica en los espacios de dimensión infinita. Sea, pues, $\mathcal{H}$ un espacio de esta última clase, vale decir, $\mathcal{H}$ no contiene ningún conjunto finito de vectores que sea capaz de generar todo $\mathcal{H}$. Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots = (\mathbf{v}_i)_{i\in\omega}$ una SECUENCIA de vectores, ninguno de los cuales es una combinación lineal de los vectores precedentes. Sea $a_1, a_2, \ldots = (a_i)_{i\in\omega}$ una secuencia de escalares. Si la secuencia $a_1\mathbf{v}_1, a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2, \ldots, = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{v}_k\right)_{n\in\omega}$ es una SECUENCIA DE CAUCHY, ella necesariamente CONVERGE a un vector $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$. La SERIE $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$ es vista por eso como una combinación lineal —en un sentido ampliado— de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ Se ha demostrado que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es separable —esto es, incluye un subconjunto denumerable DENSO en $\mathcal{H}$— si y solo si $\mathcal{H}$ contiene una familia ORTONORMAL completa de vectores $\{\mathbf{v}_i | i \in \omega\}$ tal que, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{v} = \sum_{k\in\omega} a_k\mathbf{v}_k$, con $a_i = \langle\mathbf{v}_i|\mathbf{v}\rangle$ para cada $i \in \omega$. Se dice que una familia $\{\mathbf{v}_i | i \in \omega\}$ con estas propiedades es una BASE del espacio vectorial $\mathcal{H}$.

espacio de las fases (A. *Phasenraum*, F. *espace des phases*, I. *phase space*). Sean $q_1, \ldots, q_n$ las coordenadas generalizadas de posición de un sistema mecánico clásico en un instante dado y $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ las respectivas componentes de velocidad en ese instante. Si L es el LAGRANGIANO del sistema, se definen coordenadas generalizadas de momento $p_1, \ldots, p_n$ por las ecuaciones:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

El estado mecánico del sistema en dicho instante queda entonces completamente especificado por las $2n$ coordenadas de posición y momento $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ y puede representarse adecuadamente mediante un punto en una

variedad diferenciable de $2n$ dimensiones: el *espacio de las fases* del sistema. El uso de métodos de geometría diferencial en la mecánica clásica ha enseñado a concebir el espacio de las fases de un sistema mecánico como el FIBRADO COTANGENTE $T\mathcal{Q}^*$ de su ESPACIO DE CONFIGURACIÓN $\mathcal{Q}$.

espacio dual (A. *dualer Vektorraum*, F. *dual d'un espace vectoriel*, I. *dual vector space*). Sea $\mathcal{V}$ un ESPACIO VECTORIAL sobre un CUERPO $\mathbb{K}$. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathbb{K})$ el conjunto de todas las FUNCIONES LINEALES $\varphi: \mathcal{V} \to \mathbb{K}$. Si φ y ψ pertenecen a $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathbb{K})$, la suma $\varphi + \psi$ se define por la condición: $(\varphi + \psi)(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v})$ para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Es claro que $\varphi + \psi$ pertenece a $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathbb{K})$, pues, si $a, b \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, $(\varphi + \psi)(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = \varphi(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) + \psi(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) = a\varphi(\mathbf{v}) + b\varphi(\mathbf{w}) + a\psi(\mathbf{v}) + b\psi(\mathbf{w}) = a(\varphi(\mathbf{v})+\psi(\mathbf{v})) + b(\varphi(\mathbf{w})+\psi(\mathbf{w})) = a(\varphi + \psi)(\mathbf{v}) + (\varphi + \psi)(\mathbf{w})$. El producto $a\varphi$ de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathbb{K})$ por $a \in \mathbb{K}$ se define por la condición: $(a\varphi)(\mathbf{v}) = a\varphi(\mathbf{v})$ para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Es fácil ver que $a\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathbb{K})$, y que, con estas operaciones de adición y multiplicación por un escalar, $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se llama el *espacio dual* de $\mathcal{V}$ y se designa con $\mathcal{V}^*$.

$\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^*$ son espacios vectoriales isomorfos. Si $\mathcal{V}$ es n-dimensional y $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una BASE de $\mathcal{V}$, la *base dual* $\{\mathbf{v}_1^*,\ldots, \mathbf{v}_n^*\}$ de $\mathcal{V}^*$ se define así: $\mathbf{v}_k^*$ es la función lineal que a cada $\mathbf{v}_j$ asigna el valor δ^k_j, esto es, 1 si $k = j$ y 0 si $k \neq j$ $(1 \leq j,k \leq n)$. La correspondencia $\mathbf{v}_k \mapsto \mathbf{v}_k^*$ determina un ISOMORFISMO $\mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, el cual depende de la selección arbitraria de una base. En cambio, entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^{**}$ —el espacio dual de $\mathcal{V}^*$— hay un isomorfismo que no depende de una base particular. Este isomorfismo canónico asigna a cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ la función lineal $\mathbf{v}^{**}: \mathcal{V}^* \to \mathbb{K}$ definida por la condición $\mathbf{v}^{**}(f) = f(\mathbf{v})$ para cada $f \in \mathcal{V}^*$. En la literatura matemática —también en este diccionario— $\mathbf{v}$ se identifica con $\mathbf{v}^{**}$, y no se distingue entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^{**}$.

Si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial provisto de un PRODUCTO INTERNO que a cada par de vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ asigna un número real $\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$, hay también un isomorfismo canónico entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^*$. En efecto, si $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, la aplicación de $\mathcal{V}$ en $\mathbb{K}$ por $\mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle$ es una función lineal $\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$. Por otra parte, se puede demostrar que para cada $\varphi \in \mathcal{V}^*$, hay un único $\mathbf{v}^\varphi \in \mathcal{V}$ tal que, para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\varphi(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{v}^\varphi|\mathbf{u}\rangle$; de modo que $\varphi = (\mathbf{v}^\varphi)^*$. La biyección $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^*$ y su inversa son isomorfismos de espacios vectoriales, determinados por la estructura misma de $\mathcal{V}$ como espacio vectorial con producto interno.

espacio métrico (A. *metrischer Raum*, F. *espace métrique*, I. *metric space*). Si S es un conjunto cualquiera y $\delta: S \times S \to \mathbb{R}$ es una MÉTRICA (en sentido corriente), $\langle S,\delta\rangle$ es un *espacio métrico*. Si p y q pertenecen a S, el número real $\delta(p,q)$ es *la distancia* entre p y q.

espacio tangente (A. *Tangentialraum*, F. *espace tangent*, I. *tangent space*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE n-dimensional real. Cada $p \in \mathcal{M}$ está asociado a un ESPACIO VECTORIAL n-dimensional real $T_p\mathcal{M}$, llamado el *espacio tangente* a la variedad $\mathcal{M}$ en el punto p. (Si $\mathcal{M}$ es una variedad compleja, $T_p\mathcal{M}$ es un espacio vectorial complejo.) El concepto de espacio tangente a una variedad diferenciable en un punto de la misma se inspira en los ejemplos intuitivos de la recta tangente a una curva en un punto de ésta y del plano tangente, en un punto, a una superficie lisa inserta en el espacio ordinario; como en el caso de otras generalizaciones matemáticas de ideas intuitivas, una definición precisa de espacio tangente puede darse de diversas maneras. La que elegimos aquí puede parecer tortuosa, pero bien mirada es bastante intuitiva.

Sea $\mathcal{F}(p)$ el conjunto de todas las funciones lisas con valores en $\mathbb{R}$ cada una de las cuales está definida en algún entorno de $p \in \mathcal{M}$. Cualquier función $g \in \mathcal{F}(p)$ puede multiplicarse por un número real α conforme a la regla siguiente: para cada punto q en el dominio de g, $\alpha g(q) = \alpha(g(q))$. Si g y h pertenecen a $\mathcal{F}(p)$, la suma $g+h$ se define en la intersección de sus dominios por esta condición: para cada punto q en dicha intersección, $(g+h)(q) = g(q) + h(q)$. Obviamente, αg y $g+h$ son funciones lisas definidas en un entorno de p y por ende pertenecen a $\mathcal{F}(p)$. $\mathcal{F}(p)$, provisto de estas operaciones, es pues un espacio vectorial real, asociado por lo tanto a un ESPACIO DUAL $\mathcal{F}^*(p)$ que comprende todas las funciones lineales $f: \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$. Definiremos el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ como un cierto subespacio de $\mathcal{F}^*(p)$. Sea $\gamma: \mathbf{I} \to \mathcal{M}$ una CURVA en $\mathcal{M}$ que pasa por p. Entonces, hay un $\alpha \in \mathbf{I}$ tal que $p = \gamma(\alpha)$. La *tangente en p* a la curva es la función lineal $\dot{\gamma}_p: \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\dot{\gamma}_p f = \left.\frac{\mathrm{d}f \circ \gamma}{\mathrm{d}r}\right|_{r=\alpha} \tag{1}$$

para cada $f \in \mathcal{F}(p)$ (↗DERIVADA). Obviamente, $\dot{\gamma}_p \in \mathcal{F}^*(p)$. Es posible probar que las tangentes en p a todas las curvas en $\mathcal{M}$ que pasan por p generan conjuntamente un subespacio n-dimensional de $\mathcal{F}^*(p)$. Este subespacio es, por definición, el *espacio tangente* a $\mathcal{M}$ en p, que denotamos por $T_p\mathcal{M}$.

El espacio dual de $T_p\mathcal{M}$ se llama *espacio cotangente* en p y se designa con $T_p\mathcal{M}^*$. Los vectores de $T_p\mathcal{M}^*$ son funciones lineales con dominio $T_p\mathcal{M}$ y codominio $\mathbb{R}$. Suele llamárselos *covectores*, o *vectores covariantes*, o *formas diferenciales de primer grado*.

Considérese una carta x definida en un entorno U_x de $p \in \mathcal{M}$. La tangente en p a la k-ésima CURVA PARAMÉTRICA de la carta x que pasa por p se designa con el símbolo $\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$ $(1 \leq k \leq n)$. Los n vectores $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$ son

linealmente independientes y por lo tanto forman una BASE del espacio tangente $T_p\mathcal{M}$. Las curvas paramétricas de x que pasan por p determinan asimismo una base del espacio cotangente $T_p\mathcal{M}^*$, del siguiente modo. Sea $dx^k_p \in T_p\mathcal{M}^*$ el covector definido por la condición:

$$dx^k_p(v) = vx^k \tag{2}$$

para cada $v \in T_p\mathcal{M}$. Los covectores $dx^1_p, \ldots, dx^k_p$ forman precisamente la base dual de $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \right\}$, por cuanto

$$dx^k\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\bigg|_p\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x^h}\bigg|_p = \delta^k_h = \begin{cases} 1 & \text{si } k = h \\ 0 & \text{si } k \neq h \end{cases} \tag{3}$$

Como se explica bajo ESPACIO DUAL, el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ se identifica con el dual $T_p\mathcal{M}^{**}$ del espacio cotangente $T_p\mathcal{M}^*$. Desde este punto de vista, la base dual de $\{dx^1_p, \ldots, dx^k_p\}$ es justamente $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \right\}$.

espacio topológico (A. *topologischer Raum*, F. *espace topologique* I. *topological space*). Conjunto provisto de una TOPOLOGÍA. Este concepto ha hecho posible caracterizar con precisión y generalidad las nociones intuitivas de *continuidad* y *transformación continua*, *entorno* o *vecindad*, *frontera* e *interior*, *número de dimensiones*, entre otras.

espacio vectorial (A. *Vektorraum*, F. *espace vectoriel*, I. *vector space*). Considérese un GRUPO ABELIANO $\mathcal{V} = \langle V,+,0\rangle$ y un CUERPO $\mathbb{K} = \langle K,0,1,\oplus,\otimes\rangle$. $\mathcal{V}$ es un *espacio vectorial* sobre $\mathbb{K}$ si se ha definido una función $\varphi: K \times V \to V$, que se combina con la operación + en $\mathcal{V}$ y con la multiplicación $\otimes$ en $\mathbb{K}$ según las reglas que se detallan a continuación. En tal caso, los elementos de V se llaman *vectores*; los elementos de K, *escalares*; la operación +, *adición vectorial*, y la función φ, *multiplicación por escalares*. $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial *real* si el cuerpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial *complejo*, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sean, pues, a y b cualesquiera escalares; v y w, cualesquiera vectores. Escribimos av por $\varphi(a,$v$)$. Estas son las reglas anunciadas:

V1 $a(\mathrm{v} + \mathrm{w}) = a\mathrm{v} + a\mathrm{w}$.

V2 $(a \oplus b)\mathrm{v} = a\mathrm{v} + b\mathrm{v}$.

V3 $a(b\mathbf{v}) = (a \otimes b)\mathbf{v}$.
V4 $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (donde 1 denota el elemento neutro de la multiplicación en $\mathbb{K}$).

Sea $W \subseteq V$ un conjunto no vacío, cerrado bajo adición vectorial y multiplicación por escalares (esto significa que, si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ y $a \in K$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ y $a\mathbf{v}$ pertenecen a W). Denotando con $+\restriction W$ la RESTRICCIÓN a W de la adición vectorial en $\mathcal{V}$, tenemos que $\mathcal{W} = \langle W, +\restriction W, \mathbf{0}\rangle$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$; se dice que $\mathcal{W}$ es un *subespacio* de $\mathcal{V}$.

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de n vectores de $\mathcal{V}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una lista de escalares, el vector $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ es una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Obviamente, el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de un conjunto no vacío de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$, el subespacio *generado* por ese conjunto. Se dice que un conjunto de vectores es *linealmente independiente* si ninguna combinación lineal de vectores pertenecientes a ese conjunto es igual a $\mathbf{0}$ a menos que todos los escalares que entran como factores en esa combinación sean iguales a 0. En tal caso, obviamente, ninguno de los vectores de ese conjunto es igual a una combinación lineal de los demás.

Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto finito linealmente independiente de vectores de $\mathcal{V}$. B es una *base* de $\mathcal{V}$ si todo vector $\mathbf{v} \in V$ es igual a una combinación lineal de vectores de B: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i$. En tal caso, los escalares a_i son los *componentes* de $\mathbf{v}$ *relativos a la base* B. Obsérvese que, si $\mathcal{V}$ tiene una base formada por n vectores, ningún conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathcal{V}$ puede contener más de n vectores. Por lo tanto, toda base de $\mathcal{V}$ contiene exactamente n vectores. En tal caso, se dice que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial de n dimensiones. Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son dos espacios vectoriales de n dimensiones sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, siempre hay una función biyectiva $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ que preserva la adición vectorial y la multiplicación por escalares; vale decir, una biyección f tal que, para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y todo $a, b \in K$, $f(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w})$. En otras palabras, todos los espacios vectoriales del mismo número de dimensiones y sobre el mismo cuerpo son isomorfos. Si ninguna colección finita de vectores de $\mathcal{V}$ es una base de $\mathcal{V}$, se dice que $\mathcal{V}$ tiene infinitas dimensiones. Bajo ESPACIO DE HILBERT se explica cómo el concepto de base se ha extendido también a este caso.

espacio vectorial normalizado (A. *normierter Vektorraum*, F. *espace vectoriel normalisé*, I. *normalized vector space*). ↗NORMA.

espaciotiempo (A. *Raum-Zeit*, F. *space-temps*, I. *spacetime*, *space-time*). Minkowski (1907, 1909) demostró que muchos aspectos desconcertantes de la teoría especial de la RELATIVIDAD dejan de serlo si el acontecer natural se

concibe, no ya como la evolución en el continuo unidimensional del tiempo de cuerpos situados en el continuo tridimensional del espacio, sino como formando él mismo un continuo de cuatro dimensiones, que Minkowski llamó *el mundo* y que hoy llamamos *espaciotiempo*. Estrictamente hablando, el *espaciotiempo* es una VARIEDAD DIFERENCIABLE 4-dimensional, cada uno de cuyos puntos se identifica con uno de los EVENTOS que componen el acontecer. El espaciotiempo de Minkowski, adecuado a la teoría especial de la relatividad, es HOMEOMORFO a $\mathbb{R}^4$. Si x, y, z son coordenadas cartesianas adaptadas a un MARCO DE REFERENCIA inercial $\mathfrak{R}$ y t es una coordenada temporal definida en $\mathfrak{R}$ conforme al método de Einstein (↗SIMULTANEIDAD), entonces el sistema de coordenadas (t,x,y,z) constituye una CARTA global del espaciotiempo de Minkowski que caracteriza plenamente su estructura diferenciable. El espaciotiempo de Minkowski está dotado de la MÉTRICA DE MINKOWSKI η, que refleja el movimiento inercial de las partículas libres y la propagación de la luz. Sean E_1 y E_2 dos eventos a los que la carta susodicha asigna respectivamente las coordenadas (t_1,x_1,y_1,z_1) y (t_2,x_2,y_2,z_2). Entonces, la cantidad

$$\sigma(E_1,E_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

—donde c es la VELOCIDAD DE LA LUZ en el vacío— permanece invariante si la carta (t,x,y,z) es sustituida por otra construida del mismo modo y adaptada a un marco de referencia inercial posiblemente diverso del anterior. (Dicha sustitución se efectúa mediante una TRANSFORMACIÓN DE POINCARÉ.) Esta cantidad, llamada *intervalo espaciotemporal* entre los eventos E_1 y E_2, asume en la geometría de Minkowski una posición análoga a la del cuadrado de la hipotenusa en la geometría euclídea del plano. Si las unidades de tiempo y longitud se ajustan de modo que $c = 1$, $\sigma(E_1,E_2)$ es igual a la diferencia entre los cuadrados de dos cantidades familiares en la representación tradicional del acontecer en espacio y tiempo, a saber, (i) la distancia entre el lugar de E_1 y el lugar de E_2 en el espacio del marco $\mathfrak{R}$ y (ii) el intervalo de tiempo trascurrido entre E_1 y E_2 según relojes sincronizados por el método de Einstein fijos en ese marco. A diferencia del intervalo espaciotemporal, estas dos cantidades son relativas a $\mathfrak{R}$ y no permanecen invariantes cuando la carta (t,x,y,z) es sustituida por otra del mismo tipo adaptada a un marco de referencia inercial que se mueva con respecto a $\mathfrak{R}$.

especie [biológica] (A. *Art*, F. *espèce*, I. *species*). Una *especie biológica* o bioespecie es una comunidad reproductiva de organismos sexuales, cuyos miembros (de distinto sexo) pueden cruzarse entre sí y tener descendencia fértil, pero que está reproductivamente aislada del resto de las comunidades reproductivas. Los genes solo se intercambian, se difunden y circulan dentro

del *acervo génico* de una especie. Cada especie es estanca respecto a los genes de las demás. Los lobos y los perros son la misma especie, pues se reproducen entre sí y tienen cachorros fértiles. Los perros y los gatos son especies distintas, pues están reproductivamente aisladas. Las especies son comunidades realmente existentes en la naturaleza con independencia de nuestras convenciones. Por eso una CLASIFICACIÓN de los organismos sexuales en especies resulta especialmente natural. De todos modos, la PARTICIÓN de los organismos en especies solo está bien definida sincrónicamente, en un momento dado de la evolución biológica, por ejemplo ahora. A lo largo del tiempo las especies se suceden con fronteras difusas y hace falta un cierto grado de convencionalidad para marcarlas nítidamente. Por otro lado, solo los organismos sexuales forman especies biológicas. También se habla de especies de bacterias, por ejemplo, pero en un sentido analógico y distinto del aquí tratado.

Desde Aristóteles hasta von Linné, las especies se concebían tipológicamente. Cada especie sería un *tipo* de organismos con su propia esencia, expresada en la definición de la especie, que a su vez proporcionaría un criterio de pertenencia, articulando las condiciones necesarias y suficientes para ser miembro de dicha especie. Desde Darwin la especie se concibe poblacionalmente, como un conjunto de *poblaciones* que van evolucionando en el tiempo y que no necesitan compartir esencia alguna, aunque sí participar del mismo acervo genético, es decir, no estar aisladas reproductivamente. La noción actual de especie biológica fue precisada por Ernst Mayr. Una especie perdura en el tiempo hasta que desaparece o bien por extinción (todos sus miembros se mueren) o bien por bifurcación en dos especies diferentes. La bifurcación tiene lugar por un proceso de *especiación* o surgimiento de especies nuevas. Mayr y otros han elaborado la teoría de la *especiación alopátrida* (es decir, por aislamiento geográfico): dos poblaciones de la misma especie quedan aisladas geográficamente (por ejemplo, por algún cambio geológico, o por su dispersión por el viento a islas distintas), con lo que las nuevas mutaciones que se producen en el acervo genético de una población ya no se difunden en el acervo genético de la otra población. Estas mutaciones se van acumulando a lo largo del tiempo, hasta que las dos poblaciones divergen genéticamente tanto que, incluso si se vuelven a juntar, ya no pueden cruzarse fértilmente. Se han convertido en dos especies distintas. Aunque con menos frecuencia, a veces el proceso de especiación se produce por *poliploidía* (multiplicación del número de cromosomas) u otras razones.

Aunque tradicionalmente era habitual considerar a las especies como clases o conjuntos de organismos, en 1974 Ghiselin propuso considerarlas como individuos. Hull ha defendido elocuentemente esta propuesta, argumentando que las clases son entidades abstractas, intemporales e inmutables, mientras

que las especies son entidades históricas concretas que surgen en un momento dado por un episodio de especiación, cambian continuamente mientras perduran y acaban por extinción o bifurcación en otro momento. La idea de que las especies son individuos, aunque dispersos, ha sido adoptada por Mayr y otros muchos biólogos.

esquema axiomático (A. *Axiomenschema*, F. *schéma d'axiome*, I. *axiom scheme*). El conjunto de axiomas de una teoría axiomática puede ser infinito; lo único que exigimos es que sea decidible. Muchas teorías formales de primer orden compensan su incapacidad para cuantificar sobre subconjuntos cualesquiera de su universo mediante el uso de esquemas axiomáticos que dan lugar a tantos axiomas distintos como fórmulas hay en el lenguaje formal, aunque tal infinidad de axiomas es siempre decidible. Por ejemplo, en la aritmética de segundo orden podemos formalizar el principio de inducción aritmética mediante el único axioma

$$\forall Z(Z0 \wedge \forall x(Zx \Rightarrow Z(x+1)) \Rightarrow \forall xZx)$$

En la aritmética de primer orden nos vemos obligados a introducir el esquema axiomático

$$(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)) \Rightarrow \forall x\varphi(x))$$

para cada fórmula $\varphi(x)$. La fuerza expresiva del único axioma de segundo orden, capaz de caracterizar la estructura de los números naturales hasta isomorfía, es superior a la de los infinitos axiomas de primer orden, incapaces de hacerlo. Ello se debe a que el axioma de segundo orden se refiere a una cantidad innumerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$, mientras que solo hay una cantidad infinita numerable de fórmulas, por lo que el esquema solo se refiere a ese número menor de subconjuntos. A cambio de una menor riqueza expresiva, la lógica de primer orden nos ofrece los recursos algorítmicos para explotarla, mientras que la mayor riqueza de la lógica de segundo orden es como un tesoro imposible de recuperar.

esse est percipi. Frase latina que significa 'ser es ser percibido' y que epitomiza la tesis de Berkeley, según la cual todo lo que existe por sí mismo es una mente o espíritu, y los objetos corporales son solo ideas de las mentes. La frase se utiliza también para aludir al fenomenismo de Mach y sus seguidores, que solo reconoce la existencia de contenidos de conciencia, pero juzga supersticioso el supuesto de que tiene que haber un substrato espiritual o "sujeto" que los contenga y sostenga.

estadística de partículas (A. *Teilschenstatistik*, F. *statistique des particles*, I. *particle statistics*). En las aplicaciones del cálculo de probabilidades es esencial el modo como se cuentan las distintas alternativas cuya probabilidad se trata de establecer. Entendemos, por ejemplo, que, jugando con dos dados, hay solo una manera de "hacer el doce" (haciendo seis con un dado y seis con el otro), pero hay dos de "hacer el once" (haciendo seis con un dado y cinco con el otro, o haciendo cinco con el primero y seis con el segundo). Si las tres jugadas descritas son equiprobables, resulta que el once es dos veces más probable que el doce. La MECÁNICA ESTADÍSTICA de Maxwell y Boltzmann cuenta los estados posibles de las moléculas que forman un gas del mismo modo como, en el ejemplo citado, contamos las jugadas posibles con un conjunto de dados; por lo cual este modo de contar se conoce como *estadística de Maxwell-Boltzmann*. Consiste simplemente en determinar el número de posibilidades accesible a cada elemento del conjunto y multiplicarlas entre ellas. (Si el conjunto tiene n elementos y p_k es el número de posibilidades abiertas al k-ésimo, el total de las posibilidades es $\prod_{k=1}^{n} p_k$.) A la luz de la concepción ordinaria de los objetos singulares y su combinación en multitudes, parece a primera vista imposible contar sus posibilidades de otro modo que este. Sin embargo, Bose (1924) mostró que la ley de Planck de la RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO podía deducirse mediante un razonamiento estadístico aplicado a la radiación, si esta era concebida como un gas de fotones, siempre que los estados posible del gas se contaran de otro modo, a saber, considerando los distintos fotones como indiscernibles. Esto implica que dos fotones que admiten tres estados, a, b y c, pueden hallarse conjuntamente en seis estados diferentes, a saber, aa, bb, cc, ab, bc y ca; mientras que dos partículas de Maxwell y Boltzmann que admitiesen esos tres estados podrían hallarse conjuntamente en nueve, a saber, aa, bb, cc, ab, ba, bc, cb, ca y ac. Por la contribución de Einstein a difundir y perfeccionar el trabajo de Bose, este modo de contar se conoce como *estadística de Bose-Einstein*. La experiencia ha confirmado que es el modo apropiado de razonar estadísticamente sobre el tipo de partículas elementales que, por eso mismo, se llaman BOSONES. Poco más tarde, Fermi y Dirac hicieron ver que los estados accesibles a un conjunto de partículas que obedecen al PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI tienen que contarse de otro modo, que se conoce como *estadística de Fermi-Dirac*. Las partículas a que esta estadística se aplica se llaman FERMIONES. Dos fermiones que admiten tres estados, a, b y c, pueden hallarse conjuntamente en solo tres estados diferentes, a saber, ab, bc y ca, pues los estados aa, bb, cc están excluidos por el principio de Pauli y, por la indiscernibilidad de las partículas, $ab = ca$, $bc = cb$ y $ca = ac$, tal como en el caso de los bosones. Aunque algunos filósofos como Falkenburg (1995) han encarado el asunto, no hay aún una conciencia generalizada del cambio pro-

fundo en el concepto de objeto individual que entrañan estos nuevos modos de contar. El siguiente ejemplo de la vida diaria ilustra lo que está en juego: si guardo dinero en una caja de zapatos, puedo preguntarme si la próxima moneda que saque de ella será la misma que me regaló mi madrina cuando cumplí cuatro años; pero si lo guardo en un banco, no tiene ningún sentido preguntarse si mi próximo cheque se pagará con el importe de mi sueldo, o de un regalo de mi madrina, o de los intereses que me abona el banco, etc.

estado (A. *Zustand*, F. *état*, I. *state*). El desarrollo temporal de un sistema estudiado por la física clásica se describe como una sucesión continua de *estados* del mismo. En el caso de un sistema mecánico —género de sistema al que la física clásica quería reducir todos los otros—, cada estado está completamente caracterizado por un *n*-TUPLO de números reales, donde *n* es el número de grados de libertad del sistema. Dichos números reales expresan los valores que poseen en un instante dado las cantidades físicas características del sistema o determinantes de su evolución (las coordenadas generalizadas de posición y momento). El estado se puede entonces representar adecuadamente como un punto en una VARIEDAD TOPOLÓGICA *n*-dimensional, el *espacio de las fases* del sistema. La evolución pretérita y futura del sistema debe entonces representarse por una CURVA que pasa por el punto que representa su estado actual. En la mecánica clásica dicha curva es una solución —la única que pasa por ese punto— del sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el sistema físico en cuestión.

Cuando la MECÁNICA CUÁNTICA fue propuesta como sustituto de la MECÁNICA CLÁSICA se sobreentendió que retendría, *mutatis mutandis*, este modo de representar el desarrollo temporal de los sistemas. De hecho, la formulación original de Schrödinger (1926) —a diferencia de la de Heisenberg (1925)— hace hincapié en la continuidad entre las dos teorías. Con todo, cuando ambas formulaciones se refundieron y decantaron por obra de Dirac, Jordan y von Neumann, se vio que las diferencias con la mecánica clásica eran profundas. El *estado* actual de un sistema cuántico se representa también mediante un punto en un espacio, y su evolución pretérita y futura mediante una curva que pasa por ese punto y es una solución de la ecuación de Schrödinger. Pero el espacio en cuestión es un ESPACIO DE HILBERT, esto es, un espacio vectorial complejo, usualmente de infinitas dimensiones, cuyos elementos son funciones. Además, la información codificada mediante esta representación no es una lista de valores de cantidades observables, sino más bien una clave para calcular la probabilidad de obtener cada uno de los distintos valores posibles de cada cantidad observable en el sistema, en el caso de que se proceda a medirla. (Es una característica de los sistemas cuánticos que la de-

terminación exacta del valor de una cierta cantidad observable en ellos puede conllevar la total indeterminación de otras; ↗PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG.)

En vista de esto, algunos filósofos de la física, deseosos de recuperar algo que se parezca al concepto clásico de estado, con sus tradicionales connotaciones ontológicas (y ávidos también algunos de ellos de resolver el problema cuántico de la MEDICIÓN sin menoscabo del realismo metafísico), han propuesto atribuir dos tipos de estado a los sistemas cuánticos. Distinguen entre el *estado dinámico*, que es aquel a que se refiere el párrafo anterior, y el *estado de valores* (I. *value state*), caracterizable mediante (i) la enumeración de aquellas cantidades observables en el sistema que poseen valores definidos en un momento dado de la evolución del mismo y (ii) la indicación de esos valores. Ciertos autores utilizan este distingo para romper "el vínculo entre estados propios y valores propios" (I. *eigenstate-eigenvalue link*), esto es, el principio según el cual una cantidad observable en un sistema físico posee con probabilidad 1 un valor determinado q si y solo este es el valor propio correspondiente a cierto estado propio ψ del operador lineal representativo de esa cantidad, y ψ es en ese momento el estado (dinámico) del sistema. Pero la inmensa mayoría de los físicos y químicos que actualmente utilizan la mecánica cuántica en su trabajo diario dan por descontado este principio y no reconocen —y quizás ni siquiera conocen— el distingo introducido por esos filósofos.

D. Z. Albert (2000) ha propuesto otro distingo —de alcance general— entre el estado dinámico de un sistema físico (que él llama *condición dinámica*) y su estado propiamente tal. Este último solo comprende aquellas características del sistema que son "genuinamente instantáneas", de tal modo que el estado del sistema en cada instante tenga "el tipo apropiado de *independencia* lógica, conceptual o metafísica" con respecto a sus estados en otros instantes. Por eso, según Albert, el estado de un sistema mecánico clásico depende exclusivamente de las posiciones de sus partículas y no de sus momentos. Sin entrar a discutir el posible interés metafísico del distingo de Albert, es oportuno recordar que, desde el punto de vista de su mutua dependencia *física*, no hay ninguna diferencia entre las coordenadas de posición y de momento de un sistema clásico (↗ECUACIONES DE HAMILTON).

estereorradián (A. *Steradiant*, F. *stéradian*, I. *steradian*). Unidad internacional de medida angular sólida. 1 *estereorradián* (1 sr) es igual al ángulo sólido que tiene su vértice en el centro de una esfera e intersecta sobre la superficie de ésta un área igual a la de un cuadrado cuyos lados tienen la misma longitud que el radio de esa esfera.

estructura (A. *Struktur*, F. *structure*, I. *structure*). La palabra 'estructura' procede etimológicamente del verbo latino *struere* (construir) y todavía se sigue aplicando al armazón de los edificios y construcciones. En matemáticas, lógica y filosofía de la ciencia se emplea en dos sentidos distintos, como estructura abstracta y como estructura concreta, aunque usualmente se omite el adjetivo y se deja que el contexto determine en cuál de los dos sentidos se está usando. La estructura abstracta es la forma o configuración común a varios objetos o sistemas particulares que la comparten. Esos sistemas particulares mismos son las estructuras concretas. Una teoría describe una estructura abstracta, cuyas realizaciones son sistemas o estructuras concretas. Así, en álgebra, por ejemplo, se habla tanto de la estructura (abstracta) de grupo (en general), descrita por la teoría de grupos y común a todos los grupos, como de la estructura (concreta) en que consiste el grupo particular $\langle Z,+\rangle$, es decir, el sistema formado precisamente por el conjunto de los números enteros y la operación de adición entre números enteros. En semántica lógica o teoría de modelos la palabra 'estructura' suele significar estructura concreta o sistema particular formado por un conjunto determinado y ciertas relaciones, funciones e individuos sobre ese conjunto; por eso se habla de las interpretaciones de lenguajes formales de primer orden sobre estructuras (concretas) o de las realizaciones o modelos de una teoría como estructuras (concretas). En este sentido concreto, las palabras 'estructura' y 'sistema' son con frecuencia intercambiables, también en este diccionario.

Bajo la perspectiva conjuntista adoptada por el grupo Bourbaki, la matemática se concibe como el estudio de distintos tipos de estructuras. Una *estructura* es una lista $\langle B,O_1,\ldots,O_n\rangle$ $(n \geq 1)$ de objetos que satisfacen determinadas condiciones. En todos los casos, el objeto B —la *base* de la estructura— es un CONJUNTO cualquiera y cada uno de los objetos O_k $(1 \leq k \leq n)$ es un elemento escogido en un conjunto B_k idéntico a B, u obtenido al aplicar a una o varias copias del conjunto B, cierto número de veces y en cierto orden, la operación $\times$ de formar PRODUCTO CARTESIANO y la operación $\wp$ de formar CONJUNTO POTENCIA. Una estructura especificada de esta manera abstracta admite muchas realizaciones o *modelos*. La clase de todas estas realizaciones es el *tipo* de estructura determinado por la especificación. Es común —también en este diccionario— usar una misma letra para designar una estructura y su base, cuando usar letras distintas sería una pedantería superflua.

Por ejemplo, definimos GRUPO como un triplo $\langle G,f,e\rangle$ que cumple las condiciones G1-G3 —donde G es un conjunto cualquiera, $e \in G$ y f es una función de $G \times G$ en G. Como se explica en el artículo FUNCIÓN, la función f puede identificarse con el triplo $\langle G \times G, G, \{\langle x,f(x)\rangle : x \in G \times G\}\rangle$. Por ende, f es un elemento del conjunto $\wp(G \times G) \times \wp G \times \wp(G \times G \times G)$. He aquí pues un caso claro de aplicación de las operaciones $\times$ y $\wp$ a varias copias del conjunto base, cierto número de veces y en cierto orden.

estructuralismo (A. *Strukturalismus*, F. *structuralisme*, I. *structuralism*). Nombre adoptado por varias corrientes de pensamiento del siglo XX que, en diferentes disciplinas, prestan atención ante todo a las *estructuras* (sistemas relacionales) que ven como constitutivas del objeto de la disciplina respectiva. Así hay un estructuralismo en lingüística (Saussure), antropología (Lévi-Strauss), crítica literaria (Barthes), psiquiatría (Lacan), etc. Solo el *estructuralismo matemático* y el llamado *estructuralismo epistemológico* caen en el campo de interés de este diccionario.

Estructuralismo matemático. Ante todo, se llama así la escuela de Bourbaki, que intenta organizar toda la matemática como el estudio de "especies" o tipos de ESTRUCTURA, en el sentido conjuntista definido por ellos. Pero también se llama *estructuralista* a cualquiera que vea las matemáticas como un estudio de sistemas relacionales abstractos, como quiera que se los conciba. Por ejemplo, los partidarios de la teoría de las CATEGORÍAS y filósofos como Stuart Shapiro (1997) y Michael Resnik (1997).

Estructuralismo epistemológico. Escuela filosófica basada en la obra de Sneed (1971) y que Stegmüller (1973, 1986) y Moulines (1982, 1991) han promovido en Alemania. Según Sneed, toda teoría física *T* consta de un núcleo (I. *core*) consistente en una especie de *estructura* (en el sentido de Bourbaki), un conjunto de *aplicaciones*, formado por situaciones, aspectos o fragmentos del mundo real que la teoría concibe como MODELOS de esa estructura, y *ligaduras* que vinculan las distintas aplicaciones de una teoría entre ellas, asignando, por ejemplo, los mismos valores a la masa de un determinado cuerpo en los distintos modelos de *T* en que ese cuerpo está representado. La aseveración de que tales o cuales objetos discernidos en la experiencia son aplicaciones de *T* es el *aserto empírico* (I. *empirical claim*) de *T*; el cual, evidentemente, puede someterse a revisión sin afectar al núcleo de *T*.

En la caracterización del núcleo de toda teoría física *T* se emplean TÉRMINOS *T*-TEÓRICOS, cuya utilización presupone que existe un modelo de *T*. Para eludir el círculo aparentemente vicioso que esto implica, Sneed exigía que el aserto empírico de *T* se enunciase en términos no *T*-teóricos.

La escuela estructuralista ha buscado extender a todas las disciplinas científicas —incluida la misma historia de la ciencia— los conceptos que Sneed desarrolló para hablar de las teorías físicas.

éter (A. *Äther*, F. *éther*, I. *ether*, *æther*). Nombre asignado sucesivamente a diversas criaturas de la fantasía científica.

1. La palabra griega *aither* (αἰθήρ), con que Homero designaba el cielo, fue adoptada por Aristóteles para nombrar el singular elemento de que están

formadas, según él, las esferas celestes. Mientras los otros cuatro elementos —*tierra*, *agua*, *aire* y *fuego*—, componentes del mundo sublunar, se mueven naturalmente en línea recta (hacia el centro del mundo, los dos primeros; en la dirección opuesta, los otros dos) y se transforman los unos en los otros, el éter es incorruptible y no admite otro cambio que el movimiento circular.

2. Junto con rechazar la física aristotélica, Descartes retiene la palabra *éter* (en latín, *aether*) para designar una clase de materia sutil que, según él, existe en todas partes más o menos mezclada con la materia gruesa que vemos y tocamos. Para Descartes, el distinto comportamiento del éter y la materia ordinaria bajo centrifugación explica que los cuerpos formados de esta última graviten hacia el centro de los torbellinos que, según él, rodean a los astros. Huygens (1690), adepto en alguna medida a la física cartesiana, llama "materia etérea" al medio que vibra con las ondas que según él constituyen la luz.

3. Cuando la teoría ondulatoria de la luz —derrotada en el siglo XVIII por la teoría corpuscular atribuida a Newton— cobró nueva vida después de 1800 gracias a Young y Fresnel, *éter* fue la palabra unánimemente adoptada para designar a la sustancia que, según esta teoría, sostiene la propagación de la luz. Esta sustancia, que impregna los cuerpos transparentes (como la atmósfera terrestre) y llena los espacios interestelares, tiene que ser enormemente rígida, para trasmitir ondas transversales a enormes distancias sin que se debiliten o deformen; pero también enormemente sutil, para que los cuerpos ordinarios la atraviesen impertérritos, sin afectarla ni verse afectados. La elaboración de una teoría viable del éter ocupó asiduamente a varios matemáticos distinguidos.

4. Cuando Maxwell (1861/1862) concluyó que la luz consiste en ondas electromagnéticas con cierto espectro de frecuencias, *éter* pasa a ser el nombre del medio omnipresente que, conforme a las ideas de Faraday y Maxwell, es la sede del CAMPO ELECTROMAGNÉTICO. Con el triunfo de estas ideas, después que Hertz logra producir ondas de radio en su laboratorio (en 1888; cf. Hertz 1893), cobra cierto vuelo la llamada concepción electromagnética del mundo, cuyos partidarios conciben el éter como la realidad fundamental y la materia ordinaria como un epifenómeno. Pero la física del siglo XX tomará el camino abierto por Einstein, cuya "electrodinámica de los cuerpos en movimiento" (1905b) revela "superflua la introducción de un 'éter lumínico'".

eucario (A. *Eukaryot*, F. *eucaryote*, I. *eukaryote*). Los seres vivos se dividen fundamentalmente en PROCARIOS y *eucarios*. Hasta hace unos 2×10^9 años, todos los organismos de nuestro planeta eran procarios, pero hacia esa época surgieron las primera CÉLULAS eucariotas por fagocitosis o simbiosis de pro-

carios preexistentes. Un *eucario* es un organismo compuesto de una o varias células eucariotas, es decir, células provistas de un núcleo con cromosomas. La palabra procede del término griego *káryon* (κάρυον), nuez, elegido por Haeckel para designar el núcleo de la célula eucariota. Los protistos, hongos, animales y plantas son eucarios. Los eucarios (en latín científico, *Eukarya*) también son llamados eucariontes o eucariotas.

evento (A. *Ereignis*, F. *évenement*, I. *event*). Sinónimo de 'suceso' u 'ocurrencia', utilizado en física sobre todo para designar a los sucesos ideales, inextensos y sin duración, que las teorías de la RELATIVIDAD adoptan como ingredientes elementales en su descripción de los fenómenos. El ESPACIOTIEMPO de las teorías de la relatividad se concibe como sistema estructurado de localizaciones posibles para tales *eventos puntuales*; metonímicamente se suele llamar *eventos* también a dichas localizaciones, esto es, a los puntos del espaciotiempo.

En el CÁLCULO DE PROBABILIDADES, el término *evento* se utiliza en una acepción técnica especial, para designar los elementos de la σ-ÁLGEBRA en que se define la medida de probabilidad característica de un espacio aleatorio. Por definición, tales elementos son *conjuntos* formados con los "puntos" de dicho espacio, llamados *eventos elementales*. En las aplicaciones, estos últimos no son sucesos particulares, sino clases de sucesos (por ejemplo, en el juego de ruleta, *que salga el rojo*). Tal es el uso normal; conviene advertir, sin embargo, que de Finetti designa con el término *evento* a sucesos particulares, no a clases de sucesos.

evolución (A. *Evolution*, F. *évolution*, I. *evolution*). En un sentido amplio, se dice que evoluciona cualquier cosa que cambia con el tiempo. De hecho, y fuera del mundo abstracto de la matemática, todo cambia y evoluciona en este sentido. Aunque las especies biológicas también participan de este devenir generalizado, ellas evolucionan además en otro sentido más restringido, por evolución darwinista, así llamada en honor de Darwin, que elaboró la idea en su famosa obra *Sobre el origen de las especies* (1859).

La evolución biológica es un hecho. Cualquier excavación nos revela fósiles distintos en los diversos estratos. Ya no hay trilobites ni dinosaurios. Es obvio que las especies evolucionan y dan lugar unas a otras o se extinguen. La ramificación del árbol de la vida se refleja en la anatomía, la fisiología y el GENOMA de los organismos actuales. La lectura del genoma humano y de otras especies es también una empresa arqueológica: nuestros cromosomas almacenan fósiles genéticos de nuestras especies ancestrales, recuerdos congelados de cuando éramos peces, medusas o bacterias.

Una propiedad fundamental de la vida es la de preservar los trucos improbables, si resultan eficaces para sobrevivir y reproducirse. La teoría dar-

winista de la evolución es la mejor explicación científica de la adaptación de los seres vivos. Las fuerzas creativas del azar fraguan una inmensa variedad de fórmulas o propuestas, que son luego seleccionadas por el filtro implacable de la selección natural. La teoría darwinista de la evolución por selección natural se basa en la existencia de (1) una fuente de variabilidad, (2) la reproducción con herencia de la variación y (3) un mecanismo de filtro o selección. Ahora sabemos que la fuente de la variabilidad está constituida por fuerzas o factores aleatorios, como las mutaciones del DNA, la poliploidía, la simbiosis, la deriva genética y la recombinación sexual. Y el mecanismo de la herencia ya ha sido descifrado por la genética. Darwin mismo concibió el esquema global de la teoría de la evolución, aunque no supo articular sus dos primeros puntos, dada la falta de información disponible en su época. Sin embargo, desarrolló muy bien el tercer punto, la teoría de la selección natural. Si las diversas variedades de rasgos hereditarios hacen contribuciones diferenciales a la superviviencia y a la reproducción de sus portadores, y si los organismos producen más descendientes de los que pueden sobrevivir, entonces la frecuencia de los rasgos más adaptativos se incrementa de generación en generación.

Fuera del restringido ámbito de la psicología, el Universo más bien parece ayuno de cualquier intencionalidad. La teoría de la evolución por selección natural da cuenta de la adaptación de los organismos al medio y de la funcionalidad de sus órganos sin recurrir a ideas como la intencionalidad o el diseño. De todos modos, tampoco hay que exagerar el papel de la selección natural. No toda la evolución biológica es adaptativa. También hay una evolución neutral, como ocurre con el polimorfismo de muchas PROTEÍNAS, dominado por las fuerzas del azar. Tampoco podemos suponer de entrada que los rasgos de un organismo son todos adaptativos o funcionales. Que lo sean es una mera hipótesis que habrá que confirmar en cada caso. Además, no todo lo funcional es óptimo. La adaptación biológica es el resultado chapucero de muchos accidentes acumulados, cada uno de los cuales aprovecha las estructuras heredadas de los anteriores. La adaptación biológica no optimiza, simplemente selecciona entre la variedad disponible. Con frecuencia las soluciones óptimas no han sido generadas por las fuerzas del azar y no están disponibles.

La teoría darwinista de la evolución por selección natural no explica ni predice el curso concreto de la evolución biológica. Simplemente muestra que es consistente con las leyes de la física. Nada sucede en el Universo que esté prohibido por la física, pero la física (como las leyes del tránsito rodado) permite muchas rutas alternativas. La evolución biológica concreta es un fenómeno histórico, contingente y, como tal, inexplicable en sentido fuerte e imprevisible, aunque comprensible en sus líneas generales. La biología es una

ciencia histórica, muy distinta de la física fundamental. De hecho, fuera de la física fundamental, todo (astronomía, geología, biología, sociología, lingüística) es historia, accidente congelado.

Hasta ahora, nadie ha sido capaz de formular una axiomatización satisfactoria de la teoría darwinista de la evolución por selección natural. Mary Williams, Sober y Hull, entre otros, han hecho aportaciones a esa tarea, pero una axiomatización satisfactoria de la teoría todavía no existe. Sin embargo, ello no ha sido óbice para que los principios abstractos de la evolución darwinista hayan sido aplicados con más o menos fortuna también a otros campos que Darwin nunca había considerado, desde el sistema inmunitario hasta la teoría de la empresa. Eigen ha aplicado exitosamente las nociones de la teoría darwinista de la evolución por selección natural a la evolución prebiótica (anterior a la vida, por definición) de las macromoléculas orgánicas. Lo mismo puede decirse de los procesos de selección clonal en el sistema inmunitario. Dawkins ha aplicado la teoría a la evolución cultural de los memes (o rasgos culturales elementales), y Hull la ha aplicado a las teorías científicas mismas. Los teóricos de la vida artificial la han aplicado a ciertos algoritmos, programas y patrones de computación.

expansión del Universo (A. *Expansion des Universums*, F. *expansion de l'univers*, I. *expansion of the universe*). Desde 1930, aproximadamente, pensamos que el Universo no es estático, sino dinámico, y en especial que está en expansión. En el contexto del modelo cosmológico estándar, la expansión del Universo significa que la distancia entre dos galaxias cualesquiera (no ligadas gravitacionalmente en un sistema rotacional) es cada vez mayor (se incrementa con el tiempo cósmico en proporción al factor de escala a), no porque ellas se muevan de su sitio, sino porque el espacio mismo que las sustenta se está expandiendo. Como consecuencia de esta expansión, el Universo es cada vez menos denso y más frío. La densidad disminuye como el aumento del volumen, a^3, donde a es el factor de escala. Por el contrario, si extrapolamos esta evolución hacia atrás, llegamos a estadios cada vez más densos y más calientes, que tienen como límite la singularidad del *Big Bang*.

Durante el siglo XIX se fue poniendo a punto la técnica de la espectroscopia (el análisis del espectro de la luz), aplicada pronto a la astronomía solar y estelar. A principios del siglo XX se empezaron a analizar los espectros de las galaxias (es decir, de la luz que de ellas nos llega). Slipher (1915) publicó el resultado de sus cuidadosos análisis espectrales de catorce galaxias, la mayoría de los cuales presentaban un claro corrimiento hacia al rojo, interpretado como un EFECTO DOPPLER debido a la velocidad de recesión. Aunque esta huida generalizada de las galaxias parecía deberse a un efecto sistemático, éste era difícil de calibrar, dado el desconocimiento de las distancias. Los espec-

tros permiten inferir velocidades, pero no distancias. La situación cambió cuando en 1925 Hubble descubrió variables cefeidas en algunas "nébulas espirales". La correlación entre periodo y luminosidad intrínseca permitía calcular a partir del periodo observado la luminosidad intrínseca y, comparando ésta con la aparente, obtener la distancia. En 1928 ya se había medido la velocidad de recesión de 46 galaxias, pero solo se había determinado la distancia a 18 de ellas, con ayuda de las cefeidas. Trazando el gráfico correspondiente, Hubble (1929) se dio cuenta de la correlación lineal entre la velocidad y la distancia, que constituye la llamada ley de Hubble: $v = H_0d$, donde H_0 es la CONSTANTE DE HUBBLE. En 1931 Hubble y Humason presentaron nuevos resultados, que confirmaban la hipótesis inicial. La única duda provenía de las distancias discrepantes que obtenía van Maanen en base a los movimientos propios de las "nébulas espirales", que resultaban mucho menores que las obtenidas por el método de las cefeidas. Cuando, en 1935, Hubble logró probar que tales discrepancias se debían a errores sistemáticos por parte de van Maanen, todos los astrónomos y cosmólogos aceptaron la expansión del Universo, confirmada desde entonces por cientos de miles de mediciones espectrales de galaxias.

La expansión del Universo no había sido anticipada por ningún teórico. Einstein podría haberla predicho, pero no lo hizo. Cuando se dio cuenta de que sus ecuaciones de la relatividad general introducidas en 1915 implicaban un Universo en expansión o contracción, las cambió mediante la introducción de un término cosmológico (la CONSTANTE COSMOLÓGICA Λ multiplicada por la métrica) para evitarlo. Poco después Friedmann y Lemaître presentaron modelos relativistas del Universo en expansión. Tras el anuncio de los hallazgos de Hubble, Einstein retiró el término cosmológico y aceptó la expansión del Universo. Y todos los modelos cosmológicos propuestos desde entonces dan por sentada dicha expansión.

La expansión del Universo es distinta de la expansión usual. Cuando una bomba o un cohete de fuegos artificiales estalla, sus fragmentos se mueven en el espacio, alejándose de un punto central. En el caso del Universo, las galaxias no se mueven, sino que se dejan llevar por la expansión del espacio, y no hay un punto central o, si se prefiere, cada punto es central. Si todo se expandiese con la expansión uniforme del Universo, no tendría sentido hablar de expansión. Si la vara de medir se expandiera al mismo tiempo que la separación, la distancia (medida por la vara) no se incrementaría. Pero la distancia se incrementa, pues el espacio se expande y la vara no. Los objetos ligados por fuerzas distintas de la gravedad, tales como los átomos, los animales y las barras rígidas (ligados por la fuerza electromagnética), no se expanden. De hecho, lo único que se expande en la expansión cósmica es el espacio. Como el espacio se expansiona, pero el metro no, cada vez hay más metros entre dos puntos suficientemente alejados del espacio. Las estrellas de

una galaxia no participan de la expansión cósmica, pues están ligadas gravitacionalmente entre sí en un sistema rotatorio en torno a su común centro de gravedad. Nuestra galaxia, la Vía Láctea, está ligada con Andrómeda, con la que forma un sistema rotacional. Andrómeda no solo no se aleja de nuestra galaxia, sino que se precipita hacia ella a una velocidad de unos 270 km por segundo, como se comprueba por el corrimiento hacia el azul (¡no hacia el rojo!) de su espectro, como ya había señalado Slipher en 1913. La ley de Hubble no se aplica a los movimientos relativos de la Vía Láctea y Andrómeda, ni a los de los cúmulos o supercúmulos de galaxias; solo se aplica a las galaxias desligadas y alejadas, que se dejan llevar por la expansión uniforme del espacio.

El PARÁMETRO DE DECELERACIÓN q cuantifica el ritmo al que la expansión del Universo está siendo frenada por la materia que contiene.

Hasta 1998 se aceptaba sin mayores dudas que la expansión del Universo está siendo frenada por la gravedad. Las mediciones de distancias a supernovas del tipo *Ia* realizadas desde entonces parecen apuntar hacia una aceleración de la expansión del Universo, quizás inducida por la constante cosmológica o por alguna otra forma de "energía oscura", como podría ser la energía del vacío.

En los modelos estándar con constante cosmológica $\Lambda = 0$, la continua expansión del Universo va siendo frenada por la atracción gravitatoria de la materia que contiene. Aunque las galaxias desligadas siguen separándose con el tiempo, el ritmo de su separación disminuye. Si el modelo que mejor corresponde al Universo real es un modelo con $\Lambda > 0$, entonces la expansión cósmica impulsada por la gran explosión inicial se habría visto frenada por la gravedad durante una primera etapa de la evolución cósmica, para acelerarse luego en la época actual, en la que el efecto de la gravedad se vería crecientemente superado por el de Λ. El efecto de la gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, por lo que se va reduciendo con el paulatino aumento de las distancias entre galaxias, mientras que el efecto del término cosmológico es directamente proporcional a la distancia, por lo que aumenta con la expansión cósmica. Por ello, a muy gran escala, una Λ positiva produciría una repulsión cósmica creciente que induciría una aceleración de la expansión del Universo.

experiencia (A. *Erfahrung*, F. *expérience*, I. *experience*). Tradicionalmente, la palabra designa el conocimiento adquirido en el curso de la vida. En un intento por definirla con cierta precisión, Kant dice que la *experiencia* es conocimiento mediante percepciones enlazadas. Por otra parte, justamente desde tiempos de Kant, la palabra empezó a usarse en filosofía en un sentido mucho más amplio, para designar las distintas formas básicas de la concien-

cia humana cuya diversidad y autonomía habían ganado reconocimiento gracias a Kant y sus contemporáneos y sucesores: la *experiencia estética*, la *experiencia religiosa*, la *experiencia moral*, etc. En este diccionario la palabra se usa de preferencia en la acepción más estrecha indicada primero, abarcando la llamada *experiencia diaria* y también, por cierto, la *experiencia científica*, constituida no solo por el enlace de percepciones sino también por el diseño y ejecución de EXPERIMENTOS y la recolección y elaboración de sus resultados.

experimento (A. *Experiment*, F. *expériment*, I. *experiment*). Producción deliberada de un proceso natural para estudiar su desarrollo y sus efectos. Típicamente, un experimento científico sigue un plan, y supone condiciones variables controladas por el experimentador, quien puede, interviniendo en ellas, provocar variaciones constatables en el proceso producido. Para que los resultados de un experimento sean aceptables como datos científicos, este tiene que dejarse repetir por distintos experimentadores en diversos lugares y tiempos. Para ello, es menester que las condiciones de su ejecución estén descritas de modo que cualquiera pueda reproducirlas. Es necesario además que condiciones iguales generen resultados iguales. Como esto rara vez ocurre en la repetición de un fenómeno aleatorio, cada experimento concerniente a tales fenómenos tiene que comprender un número suficientemente grande de casos como para que la distribución de los resultados no difiera significativamente entre las repeticiones del mismo.

Se ha solido contrastar experimentación y observación, como dos vías de investigación muy diferentes. Pero, al crecer el artificio de las observaciones, la diferencia entre ambas vías se ha atenuado. Así, aunque el astrónomo no podría controlar la evolución de las supernovas que observa, ni mucho menos producirlas, el complejo proceso de recoger, registrar, medir y comparar la radiación que nos llega de ellas —en que consiste la observación de las supernovas— tiene los caracteres de un experimento.

La experimentación es seguramente tan antigua como el hombre y es inconcebible que la metalurgia y la agricultura pudiesen surgir sin ella. Sorprende por eso su ausencia o marginalidad en la ciencia helénica. Se ha querido explicarla por la distancia social entre la clase de los artesanos y la clase ociosa de que provenían los científicos. Además de este factor, ha debido pesar el sentimiento, común hasta hoy entre la gente ineducada, de que un proceso artificialmente producido o modificado no puede considerarse natural. Aristóteles le dio forma canónica a este sentimiento en su distingo entre dos tipos de cambio (κίνησις): el cambio natural que responde a un principio inmanente a la cosa misma que cambia y el cambio forzado o provocado desde fuera, en último término, por un cambio natural en otra cosa. Desde este

punto de vista, es claro que un experimento, por definición, no puede enseñarnos nada sobre la naturaleza de las cosas, sino solo obstruir y torcer su marcha propia, violentándola en nuestro provecho.

La ciencia moderna, orientada desde un principio a hacer del hombre el "señor y dueño de la naturaleza" (Descartes, 1637), opta resueltamente por el método experimental; y la física, la química y la biología le deben, sin duda, la amplitud y profundidad del saber que han acumulado en los últimos tres o cuatro siglos. El conocimiento experimental es más robusto que las teorías ideadas para organizarlo y perdura, en forma reconocible, a través de las vicisitudes de estas. Todos los experimentos que llevaron a J. J. Thomson a concluir que los rayos catódicos constan de partículas de idéntica masa y carga eléctrica pueden repetirse hoy con los mismos resultados que en 1897, en tanto que los conceptos de *partícula* y *masa* han cambiado drásticamente durante el siglo XX. Por otra parte, al menos en la física, el diseño de los experimentos y la interpretación de sus resultados depende estrechamente de las teorías en vigor. Que el conocimiento experimental sobreviva y trascienda las teorías requeridas para constituirlo merece más atención de la que en general le han prestado los filósofos. Últimamente, la corriente del NUEVO EXPERIMENTALISMO ha procurado remediar esta omisión.

Desde ya, hay que tener presente que un experimento dirigido a poner a prueba una teoría dada envuelve también una teoría —generalmente distinta— de su propio transcurso y teorías —generalmente más de una— de los instrumentos que ocupa; por ende, la interdependencia entre experimento y teoría no necesariamente implica circularidad. Además, como señaló Hacking (1983), la variación de los resultados experimentales en respuesta a las intervenciones del experimentador certifica a éste la realidad —pragmática, no metafísica— de los mismos; más aún si distintos experimentos, cuyo diseño e instrumentación se conciben según teorías diferentes, arrojan resultados concordantes. Entre otras estrategias que sirven para validar la objetividad del conocimiento experimental, Franklin (1998) cita las siguientes: (i) el dispositivo experimental puede controlarse y calibrarse utilizándolo para reproducir resultados ya conocidos; (ii) la repetición de los resultados en sucesivos experimentos de un mismo tipo reduce el riesgo de que se deban a circunstancias fortuitas; (iii) los mismos resultados obtenidos pueden usarse para justificarlos; por ejemplo, si, como sugirieron los adversarios de Galileo, los satélites de Júpiter no fuesen más que ilusiones ópticas generadas por el telescopio, sería inverosímil la regularidad de sus movimientos, la periodicidad de sus eclipses y que sus posiciones sucesivas satisfagan la tercera LEY DE KEPLER; (iv) los resultados de un experimento son explicados satisfactoriamente por una teoría corroborada independientemente por otros; (v) el experimento utiliza dispositivos e instrumentos que se conciben como modelos de

una o más teorías bien corroboradas. Franklin menciona como una estrategia más el uso de argumentos estadísticos, aunque obviamente está implícito en cada una de las anteriores, a las que abraza y rebasa. Mayo (1996) justamente concibe la inferencia estadística, especialmente la que establece las probabilidades de error y lleva a reducirlas, como el sostén y el motor del crecimiento del saber experimental.

experimento crucial (A. *Experimentum Crucis*, F. *expérience cruciale*, I. *crucial experiment*). Experimento capaz de decidir finalmente entre dos hipótesis rivales, estableciendo una y refutando la otra. Newton llamó *experimentum crucis* —'experimento de la cruz'— a la descomposición espectral de un rayo de Sol mediante un prisma de cristal, que le confirmó que la luz blanca es en efecto una mezcla de luces de todos colores. (Antes, Francis Bacon había hablado de *instantiae crucis*, aludiendo expresamente a las cruces que señalan las encrucijadas de los caminos.) La sola idea de que tal experimento sea posible ha sido muy cuestionada, porque, como señaló Duhem (1906), "un experimento de física nunca puede condenar una hipótesis aislada, sino solamente todo un sistema teórico"; y ante un resultado experimental incompatible con un sistema complejo toca al científico decidir qué componentes de este desecha y cuáles retiene. Además, no faltan ejemplos históricos de hipótesis que se consideraban refutadas por un experimento crucial y que más tarde han resucitado. Sin duda, hay situaciones históricas en que solo se contemplan ciertas hipótesis bien definidas, que pueden someterse a un experimento que resulta crucial en ese contexto. Pero ocurre también que las implicaciones de un experimento de este tipo, aunque suficientes para decidir entre esas teorías, pueden luego entenderse de un modo completamente diverso a la luz de otra. Por ejemplo, el resultado del experimento de Fizeau (1851), diseñado para decidir entre distintas hipótesis sobre la forma —total, parcial o nula— como el ÉTER es arrastrado por los líquidos, conservó su validez y su importancia, pero cambió completamente de significado con la teoría especial de la RELATIVIDAD.

experimento de Michelson y Morley (A. *Michelsonscher Versuch*, F. *expériment de Michelson et Morley*, I. *Michelson-Morley experiment*). Experimento realizado por A. A. Michelson y E. W. Morley (1887) para medir la velocidad de la Tierra en el ÉTER, cuyo resultado negativo suele presentarse como un factor decisivo en la génesis de la teoría especial de la RELATIVIDAD. Michelson y Morley utilizaron una versión mejorada del interferómetro que Michelson (1881) había diseñado con este fin, un aparato compuesto de dos brazos ortogonales, uno de los cuales se orienta en la dirección del movimiento de la Tierra. Una señal luminosa se divide en dos partes que recorren

de ida y vuelta ambos brazos y luego se reúnen en un punto donde forman franjas de interferencia observables con un microscopio. Como las franjas de interferencia permanecen prácticamente inalteradas cuando se intercambia la orientación de los brazos respecto al movimiento de la Tierra, hay que concluir o bien que la luz viaja a lo largo de ambos brazos con la misma velocidad (la velocidad de la Tierra en el éter no se suma a la velocidad constante de la luz en este medio), o bien, como Fitzgerald y Lorentz propusieron independientemente, que el brazo que se mueve longitudinalmente a través del éter sufre por eso una contracción que compensa exactamente el cambio de velocidad (↗HIPÓTESIS AD HOC).

experimento del cubo de agua de Newton (A. *Newtons Eimer-Experiment*, F. *expériment du seau d'eau de Newton*, I. *Newton's bucket experiment*). Experimento propuesto por Newton (1687) para demostrar el movimiento absoluto de un cuerpo en el ESPACIO. Un cubo lleno de agua pende a cada lado de una cuerda. Ambas cuerdas cuelgan de un mismo punto del techo. Haciendo girar el cubo en torno a su eje vertical enrollamos las cuerdas una con otra hasta que estén bastante tensas. Al soltar el cubo, éste empieza a rotar en sentido contrario. Al comienzo, el agua se queda atrás, y por lo tanto se mueve, relativamente a las paredes del cubo, en el mismo sentido en que enrollamos las cuerdas. Al cabo de un momento, la rotación del cubo se trasmite al agua, que pasa a estar en reposo *relativo al cubo*, mientras se mueve con éste *en el espacio*. Ahora bien, en la etapa inicial, la superficie del agua permanece inalterada, plana, horizontal, tal como estaba antes de que empezara el experimento; pero cuando el agua ya está rotando con el cubo, la superficie sube en los bordes y se torna cóncava. Según Newton, este efecto físico es una consecuencia del movimiento absoluto del agua y lo hace patente. Mach (1883) criticó esta interpretación del experimento, señalando que el cubo y pronto también el agua giran relativamente al sistema de las estrellas fijas, y que el efecto observado puede deberse a la masiva presencia de éstas. Pues, dice Mach, no sabemos cómo se comportaría la superficie del agua si el cubo tuviese paredes de una legua de espesor.

experimento mental (A. *Gedankenexperiment*, F. *expérience fictive*, I. *thought experiment*). Llámase así a un experimento cuya realización es imposible o indeseable, en principio o por limitaciones técnicas, y que se concibe y describe para ilustrar ciertas consecuencias, aparentemente obvias, de una concepción o planteamiento científico. He aquí algunos ejemplos:

(E1) Dos bolas de bronce, infinitamente alejadas de cualquier otro cuerpo, están unidas por una cuerda tensa de algodón; si las hebras de

la cuerda se rompen una a una, espontáneamente, el sistema descrito está rotando en el espacio absoluto (Newton, 1687).

(E2) El DEMONIO DE MAXWELL.

(E3) La PARADOJA DE LOS MELLIZOS.

(E4) Un hombre cae de lo alto de un edificio; durante la caída arroja monedas y llaves que flotan, ingrávidas, a su alrededor (ideado por Einstein en 1907 para ilustrar la equivalencia entre un MARCO DE REFERENCIA inercial y un marco de referencia que cae libremente en un campo gravitacional uniforme).

(E5) El GATO DE SCHRÖDINGER.

(E6) La PARADOJA DE EINSTEIN, PODOLSKY Y ROSEN.

De estos ejemplos, (E1) y (E2) son imposibles en principio; (E4) y (E5) son éticamente indeseables; (E3) y (E6) son prácticamente irrealizables, al menos por ahora. Por otra parte, situaciones del todo análogas a (E4) se producen a diario en los trasbordadores y estaciones espaciales, y experimentos esencialmente equivalentes a los de (E3) y (E6) se llevaron a cabo antes que trascurriera medio siglo desde la invención de estas paradojas, dando justamente los resultados que sus inventores habían declarado absurdos. Con todo, hay que tener en claro que los experimentos mentales como tales, esto es, mientras no se realicen, no tienen la capacidad de refutar o corroborar hipótesis, aunque son, sí, muy útiles como herramientas heurísticas, didácticas y retóricas del pensamiento científico. Considérese el caso siguiente, propuesto por Galileo: si, como pretendían los aristotélicos, la velocidad con que caen los cuerpos fuera proporcional a su peso, un corcho pegado a una piedra frenaría su caída; sin embargo, como el corcho sumado a la piedra pesa más que la piedra sola, el objeto que forman juntos caería más rápidamente que cualquiera de los dos; ¡contradicción! Ingenioso y persuasivo el razonamiento, pero no prueba nada mientras no se ponga en práctica, pues cabe siempre la posibilidad de que el comportamiento de los cuerpos cambie al acoplarlos.

experimentos de Eötvös (A. *Eötvös Versuche*, F. *expériments d'Eötvös*, I. *Eötvös' experiments*). Experimentos mediante los cuales estableció Eötvös —con cuestionable precisión en 1888, pero en 1909 con un error de solo 5 partes en 10^9 (Eötvös, Pekar y Fekete, 1922)— que la MASA inercial de un cuerpo, esto es, su resistencia a los cambios de velocidad, es proporcional a su susceptibilidad a la acción de la fuerza gravitacional. El ingenioso diseño utiliza una balanza de torsión. Si las masas iguales de materiales diferentes no pesasen lo mismo en un laboratorio terrestre, la balanza registraría un torque. Einstein citó los experimentos de Eötvös como prueba de su PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA, aunque solo confirman la versión *débil* del mismo. En 1971 Braginsky y

Panov confirmaron el principio débil de equivalencia con un error del orden de $1{:}10^{12}$, utilizando una balanza de torsión que comparaba la respuesta de masas iguales de materiales distintos a la atracción gravitacional del Sol.

explicación (A. *Erklärung*, F. *explication*, I. *explanation*). Normalmente se llama *explicación* a cualquier enunciado o serie de enunciados destinados a hacer comprensible algo (también se llama *explicación* el acto de enunciarlos). Aquello que se busca hacer comprensible mediante una explicación puede ser una acción, una actitud, un suceso, un proceso, una palabra, un texto, una ley civil o natural, una teoría, un teorema, una demostración, una valoración, etc. A menudo se busca explicar lo sorprendente, y la sorpresa se disipa mostrando que lo aparentemente excepcional es fruto de una regularidad inaparente. Pero en otros casos —por su misma índole, más raros— la explicación consiste justamente en poner de manifiesto la originalidad de una situación excepcional.

Dar explicaciones es uno de los usos más frecuentes del lenguaje. Dada la gran variedad de sus temas, de los intereses a que sirve, de los supuestos a que recurre, no es sorprendente que existan muchos tipos de explicación, entre algunos de los cuales hay a lo sumo un remoto parecido de familia. Con todo, en el segundo cuarto del siglo XX —periodo generalmente opuesto a la diversidad— cobró fuerza la idea de que la *explicación científica* es toda de un mismo tipo. Tanto para el POSITIVISMO LÓGICO como para su contemporáneo y adversario Popper, la explicación así entendida es el fin principal —según Popper, el único— de todas las ciencias empíricas.

Según estos filósofos, la explicación científica consiste en inferir una descripción de aquello que se trata de explicar —el *explicandum*— de premisas verdaderas —el *explicans*— que incluyan el enunciado de una o más LEYES NATURALES. En particular, según el esquema propuesto por Hempel y Oppenheim (1948) para la *explicación nomológico-deductiva* de hechos, el *explicans* comprende dos clases de premisas: (*a*) leyes naturales; (*b*) descripciones de las circunstancias ("condiciones antecedentes") en que ocurre el hecho a explicar. De esas premisas se infiere deductivamente el *explicandum*, que consiste en una descripción de este hecho. Para ello, obviamente, el *explicandum* tiene que formularse en términos homogéneos con los empleados en el *explicans*. Lograr tal formulación, esto es, lograr concebir hechos particulares y leyes generales de modo que aquéllos se deduzcan de éstas (en ciertas circunstancias) es sin duda el aspecto más difícil, más creativo y más decisivo de la explicación nomológico-deductiva, aunque los autores mencionados no le prestan atención. Esta dificultad se extiende también a la explicación deductiva de leyes, en que el *explicandum* es una ley natural y el *explicans* está formado por los principios de una teoría de más vasto alcance. (Por ejemplo,

las leyes de Kirchhoff de los circuitos eléctricos, así como las leyes de reflexión, refracción y difracción de la luz se deducen de las ecuaciones de Maxwell, en que descansa la electrodinámica clásica.)

Desde el punto de vista lógico-formal, la explicación nomológico-deductiva de hechos no se distingue de la PREDICCIÓN científica. Mientras que la explicación así entendida deduce de leyes y condiciones antecedentes un hecho conocido, la predicción consiste en deducir de ellas un hecho futuro desconocido. (También pueden deducirse hechos desconocidos del pasado, en cuyo caso algunos autores hablan de *retrodicción*.) Sobre esta base, el positivismo lógico defendió ardorosamente la *simetría de explicación y predicción*, sin reparar en que el margen de error inherente a los datos científicos la hacía ilusoria. Gracias a la atención prestada desde hace varias décadas a los sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales con soluciones inestables (↗CAOS), se ha puesto en evidencia la imposibilidad de predecir la evolución futura de ciertos sistemas físicos —como la atmósfera— aunque se disponga de una explicación nomológico-deductiva enteramente satisfactoria de su comportamiento.

Confrontado con la existencia de explicaciones aceptadas en las ciencias, cuyo *explicans* incluye leyes estadísticas, Hempel (1965) propuso un esquema de *explicación estadística* en que el *explicandum* se infiere del *explicans* no con certeza, sino con una determinada probabilidad. Conforme a este esquema, un hecho particular *h* que ocurre bajo las condiciones *C* queda explicado por una ley estadística *L* si *L* asigna una probabilidad elevada a la ocurrencia de hechos como *h* bajo condiciones como *C*. Pero ¿qué es una probabilidad elevada? ¿cualquier probabilidad mayor que 0.5? Más razonable parece sostener que una ley probabilista concierne a todos los hechos a los que asigna probabilidades, altas, medianas o pequeñas; y que lo que ella explica es justamente la frecuencia relativa con que tales hechos ocurren cuando son numerosos. Una explicación así es banal si la ley probabilista simplemente se induce de la constatación de esas frecuencias; pero no lo es si la distribución de probabilidades que ella asigna al tipo de hechos en cuestión se explica a su vez deduciéndola de una teoría de mayor alcance. (Por ejemplo, la distribución de los átomos de plata en dos grupos distintos en el experimento de Stern y Gerlach (1924) se deduce de la mecánica cuántica relativista.)

Si no es posible certificar una ley natural como tal y si aun las descripciones de hechos son al menos tan cuestionables como la CARGA TEÓRICA que portan, no se puede pretender que la investigación científica produzca de una vez explicaciones hechas y derechas —nomológico-deductivas o estadísticas— basadas en premisas verdaderas. Por eso, la reflexión filosófica sobre los esquemas descritos se concentró en los requisitos que debe cumplir una *propuesta admisible* de explicación científica, exigiendo que las premisas ge-

nerales contenidas en el *explicans* sean enunciados *nomomorfos* (esto es, enunciados *con forma de leyes*). Pero la caracterización formal precisa de un enunciado nomomorfo no es algo tan sencillo como pudiera creerse, y la vasta literatura sobre el tema no es concluyente (↗LEY NATURAL).

extensión [de un concepto] (A. *Umfang*, F. *extension*, I. *extension*). Clase de todas las cosas que caen bajo un concepto. La extensión de un concepto se opone a su intensión, caracterización, definición o contenido significativo. Así, si todos los animales provistos de corazón poseen también riñones, y a la inversa, podemos decir que ambos conceptos (el de estar provisto de corazón y el de estar provisto de riñones) tienen la misma extensión, aunque posean intensión distinta. Si identificamos los conceptos que tienen la misma extensión, obtenemos conceptos extensionales o conjuntos.

extensión de una teoría (A. *Erweiterung einer Theorie*, F. *extension d'une théorie*, I. *extension of a theory*). Una teoría Σ es una *extensión* de otra teoría Θ si y solo si cada sentencia de Θ es también una sentencia de Σ, es decir, si $\Theta \subseteq \Sigma$. Si Σ es una extensión de Θ, entonces Θ es una subteoría de Σ. Σ es una extensión finita de Θ si y solo si hay un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Sigma$ tal que, para cada $\alpha \in \Sigma$, $\Theta \cup \Delta \vdash \alpha$. Σ es una *extensión definicional* de Θ si y solo si hay un subconjunto $\Delta \subseteq \Sigma$ tal que (1) para cada $\delta \in \Delta$, δ es una definición de un parámetro ausente del lenguaje de Θ y (2) para cada $\alpha \in \Sigma$, $\Theta \cup \Delta \vdash \alpha$. Una extensión definicional de una teoría no incrementa el contenido semántico ni el poder expresivo de la teoría, pero puede permitir una formulación más breve y diáfana de las ideas expresadas. Respecto a las sentencias expresables en el lenguaje $\mathcal{L}(\Theta)$ de la teoría Θ, nada varía con la extensión definicional. Para cualquier $\alpha \in \mathcal{L}(\Theta)$: $\alpha \in \Sigma$ si y solo si $\alpha \in \Theta$. Por ejemplo, si a la teoría de GRUPOS añadimos como nuevo axioma la conmutatividad de la operación binaria, obtenemos una extensión sustancial, la teoría de grupos abelianos, que nos permite afirmar más cosas que antes. Sin embargo, si a la teoría de grupos formulada sin más símbolos primitivos que el operador binario $*$ y el nombre del elemento unidad e, añadimos la definición del símbolo derivado $^{-1}$ para el inverso —es decir, $\forall x \forall y (x^{-1} = y \Leftrightarrow x*y = e)$—, obtenemos una mera extensión definicional, una extensión insustancial, que nos permite decir más brevemente las mismas cosas que ya decíamos en la teoría original, pero no nos permite añadir nada nuevo.

extensionalidad (A. *Extensionalität*, F. *extensionalité*, I. *extensionality*). Un contexto en el que los conceptos con intensiones distintas pero igual EXTENSIÓN se identifican se llama un contexto extensional. En general, la lógica y la matemática clásica representan contextos extensionales. La teoría de con-

juntos eleva la extensionalidad a la categoría de axioma. En efecto, el AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD determina que dos conjuntos con los mismos elementos son el mismo conjunto, por muy distintas que sean las maneras como estén definidos. Sin embargo, hay otros contextos, como los filosóficos, psicológicos, lingüísticos o jurídicos, que no son extensionales y en los que las intensiones y los significados siguen marcando diferencias esenciales, incluso en los casos de identidad extensional. También suele decirse que los CONECTORES de la lógica clásica son extensionales en el sentido de que son verifuncionales (expresan FUNCIONES VERITATIVAS), mientras que los conectores de la LÓGICA MODAL o la LÓGICA INTUICIONISTA, por ejemplo, no son extensionales, pues no expresan funciones veritativas.

F

factor de escala [cósmica] (A. *Skalenfaktor*, F. *facteur d'échelle*, I. *cosmic scale factor*). Debido a la gran simetría espacial de los modelos cosmológicos estándar del *BIG BANG*, la métrica (de tipo FRW) depende solo de una variable dinámica, el factor de escala cósmica o parámetro de expansión a. Como el Universo está en expansión uniforme, con el paso del tiempo todas las distancias propias se incrementan por el mismo factor, el factor de escala a, que es una función del tiempo, $a = a(t)$, y tiene dimensión de longitud. Su valor actual es $a_0 = a(t_0)$. Este factor de escala indica cómo cambian con el tiempo las distancias entre dos puntos en reposo respecto a la expansión del Universo o entre dos galaxias no ligadas gravitacionalmente y que se dejan llevar por la expansión. En cierto modo a representa la historia cósmica, pues el Universo se expande o se contrae isotrópicamente según que a se incremente o decrezca con el tiempo. Por eso las ecuaciones de Friedmann, que describen la dinámica cósmica en el modelo estándar, son ecuaciones diferenciales de a. Y el PARÁMETRO DE HUBBLE H, que representa la velocidad de la expansión, se define en función del factor de escala:

$$H = H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

falibilismo (A. *Fallibilismus*, F. *fallibilisme*, I. *fallibilism*). Peirce designaba con este término la postura filosófica adoptada por él, según con la cual "lo que mejor conocemos, humanamente hablando, lo conocemos solo de un modo incierto e inexacto". El término fue popularizado por Popper, quien gustaba subrayar que en todas las ciencias no hay un solo aserto infalible, puesto que todos ellos —incluso los ENUNCIADOS PROTOCOLARES básicos— son revisables y desechables. Se lee por ahí que uno no puede errar en cuanto al contenido actual de sus vivencias; pero a menos que uno las describa en un lenguaje privado perfectamente adecuado a ellas, y que sería incomprensible para los demás, todo lo que diga al respecto puede ser puesto en cuestión.

falsación (A. *Falsifikation*, F. *falsification*, I. *falsification*). Siguiendo a Popper, decimos que un aserto ha sido *falsado* (en inglés, *falsified*) cuando se ha comprobado que es falso. Para falsar una proposición universal de la forma $\forall x(Px \Rightarrow Qx)$ basta constatar una proposición particular de la forma $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$ que la contradiga (un caso particular que nos brinde un "contraejemplo"). Según Popper la falsabilidad es el carácter distintivo de los asertos científicos, que permite *demarcar* la ciencia, esto es, trazar el límite que la separa de la metafísica y la seudociencia. Mientras el marxismo o el psicoanálisis afanosamente protegen sus principales asertos contra el riesgo de refutación y recurren sin pudor a la *petitio principii* para descalificar a sus críticos, la ciencia genuina diseña ella misma las difíciles pruebas experimentales a que han de someterse sus hipótesis.

familia (A. *Familie*, F. *famille*, I. *family*). En matemáticas, una *familia* es una colección de objetos, no necesariamente distintos, marcados con índices que son todos diferentes entre sí. Una familia puede concebirse como el GRAFO de una función $f : \mathcal{I} \rightarrow M$, que aplica el conjunto de índices $\mathcal{I}$ en un conjunto cualquiera M que reúne todos los objetos de la colección. El objeto $f(i) \in M$ correspondiente a cierto $i \in \mathcal{I}$, se designa con una letra acompañada del subíndice i, digamos, x_i. La familia se designa entonces con $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. Decimos que $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una familia *parametrizada* por el conjunto $\mathcal{I}$.

Sea $\mathcal{J}$ una parte no vacía de $\mathcal{I}$. Entonces, la familia $\{x_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ es una *subfamilia* de la familia $\{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$.

Si $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una familia de conjuntos, la (*gran*) *unión* $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ es el conjunto $\{x : x \in X_i$ para algún $i \in \mathcal{I}\}$ y la (*gran*) *intersección* $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i$ es el conjunto $\{x : x \in X_i$ para todo $i \in \mathcal{I}\}$.

fenómeno (A. *Erscheinung*, *Phänomen*, F. *phénomène*, I. *phenomenon*). Del griego φαινόμενον, 'lo que aparece', 'lo que se muestra'. Distinguimos dos acepciones principales:

a. La literatura filosófica moderna llama *fenómenos* a todo cuanto se presenta a la conciencia individual, tal como se le presenta; en particular, las apariencias sensibles de las cosas materiales, pero también las manifestaciones de la propia vida mental del individuo en cuestión ("fenómenos psíquicos"). Para Kant, "el objeto indeterminado de una intuición sensible se llama *Erscheinung*" y "las *Erscheinungen* en cuanto son pensadas como objetos conforme a la unidad de las CATEGORÍAS se llaman *Phaenomena*". Kant distingue ambas cosas de la mera apariencia (*Apparenz* o *Schein*: el cielo azul, el arco iris), por una parte, y por otra parte, de la COSA EN SÍ. *Fenomenismo* o *feno-*

menalismo es la doctrina filosófica según la cual todo lo que existe son *fenómenos* en esta acepción.

b. En la literatura científica, un *fenómeno* es un hecho notable, que admite una descripción genérica y se repite regularmente en determinadas circunstancias. Inicialmente asombroso, el *fenómeno* demanda una explicación científica; luego, cuando ya la tiene, permite corroborar las leyes y teorías invocadas para explicarlo. Ocurre también que una teoría desarrollada para explicar ciertos fenómenos implica la existencia de otro, previamente desconocido, cuyo descubrimiento procura entonces un respaldo espectacular a la teoría. *Fenómenos* en esta acepción son los eclipses de Sol y de Luna, la desviación de la aguja magnética por una corriente eléctrica paralela a la dirección norte-sur, la refracción, birrefracción y difracción de la luz, las diversas manifestaciones de la radiactividad, las estelas que dejan las partículas cargadas en las cámaras de burbujas y las emulsiones fotográficas, etc. En física, los fenómenos más inesperados suelen llamarse *efectos*, con el apellido de sus respectivos descubridores: EFECTO COMPTON, EFECTO DOPPLER, EFECTO ZEEMAN, etc.

fenomenología (A. *Phänomenologie*, F. *phénoménologie*, I. *phenomenology*). En el uso científico, se llama así a la descripción y clasificación de datos que precedería en cada especialidad a la construcción de teorías para explicarlos. Teorías como la TERMODINÁMICA, que reposan sobre grandes generalizaciones acerca de los fenómenos observados, pero sin pretender derivarlos de una microestructura subyacente, suelen llamarse *teorías fenomenológicas* (Bunge, 1964).

El uso filosófico del término se remonta a Lambert (1764), quien lo acuñó (en alemán) para nombrar "la teoría de la apariencia (A. *Schein*) y su influencia sobre lo correcto e incorrecto del conocimiento humano", que forma la cuarta parte de su teoría general de la ciencia. En carta a Lambert de 2.9.1770, Kant contempla una "ciencia meramente negativa", previa a la metafísica, que llama *fenomenología general*, cuya tarea es determinar los límites y la validez de los principios de la sensibilidad —espacio y tiempo— para que "no confundan los juicios sobre objetos de la razón pura, como ha ocurrido casi siempre hasta ahora". Más tarde, Hegel (1807) tituló *La fenomenología del espíritu* a su historia ideal de la "experiencia de la conciencia".

En la literatura del siglo XX, el término se emplea habitualmente para designar la filosofía de Husserl y sus seguidores. Husserl (1901) lo adopta en lugar de la frase 'psicología descriptiva' con que solía referirse a sus investigaciones. Pero luego adquiere un significado más específico y original, como estudio de la conciencia en cuanto ella es la fuente de todo el sentido y el

valor de "toda mi vida mundana". Este estudio requiere una *reducción fenomenológica* que ponga el mundo "entre paréntesis", suspendiendo esa certeza de la existencia del mundo que es propia de la vida "natural", prefilosófica. "Si me sitúo por encima de toda esta vida y me abstengo de toda creencia existencial que tome al mundo lisa y llanamente como existente, si dirijo mi mirada exclusivamente a esta vida misma como conciencia *del* mundo, me gano como yo puro con la pura corriente de mis cogitaciones" (1929, p. 8). El análisis de las funciones constituyentes de esta subjetividad lo llama Husserl *fenomenología trascendental.*

Husserl esperaba que, mediante el empleo de su *método fenomenológico,* la filosofía se convertiría en una "ciencia rigurosa", capaz de ir acumulando conocimientos con la cooperación de generaciones sucesivas de investigadores. Pero sobre el carácter y propósito de ese método no se pusieron de acuerdo ni el maestro con los discípulos, ni estos entre sí, ni el propio maestro consigo mismo a lo largo de toda su vida.

fermión (A. *Fermion,* F. *fermion,* I. *fermion*). Partícula con spin semientero (½, 3/2...). Todas las partículas son fermiones o bosones. Los fermiones obedecen el principio de exclusión de Pauli; los bosones, no. Fermi y Dirac calcularon las consecuencias de ese principio para la "conducta colectiva" de los fermiones, conocida como estadística de Fermi-Dirac. Por eso, en honor de Fermi, se llaman *fermiones.* Todas las cosas a nuestro alrededor están hechas de protones, neutrones, electrones y neutrinos, que son fermiones. A veces se dice que los fermiones son los ladrillos de que están hechas las cosas, mientras que los bosones son como el cemento que las mantiene unidas.

fibrado (A. *Faserbündel,* F. *fibré,* I. *fiber bundle*). Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{M}$ VARIEDADES DIFERENCIABLES del mismo tipo (ambas reales, o ambas complejas). Sea $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ una función lisa cuyo recorrido $\pi(\mathcal{F}) = \mathcal{M}$. La estructura $\langle\mathcal{F},\mathcal{M},\pi\rangle$ es entonces un fibrado sobre $\mathcal{M}$. $\mathcal{F}$ es el *espacio total* o *espacio fibrado,* $\mathcal{M}$ es el *espacio cociente* o *base* del fibrado y la función π es la *proyección* de aquel espacio sobre este. Si $p \in \mathcal{M}$, el conjunto $\{x \in \mathcal{F} : \pi(x) = p\}$ es la *fibra* sobre p.

Una *sección* del fibrado $\langle\mathcal{F},\mathcal{M},\pi\rangle$ es una función lisa $f : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$, tal que la función compuesta $\pi \circ f$ es la IDENTIDAD en $\mathcal{M}$. Esto significa que a cada $p \in \mathcal{M}$, f le asigna un elemento de la fibra de π sobre p.

fibrado principal (A. *Hauptfaserbündel,* F. *fibré principale,* I. *principal fiber bundle*). Sea $\langle\mathcal{F},\mathcal{M},\pi\rangle$ un FIBRADO. Sea G un GRUPO DE LIE que actúa libremente sobre $\mathcal{F}$ mediante la ACCIÓN $\mathcal{F} \times G \to \mathcal{F}$; $\langle u,g\rangle \mapsto ug$, de tal modo que cada fibra del fibrado es una órbita de dicha acción. Dícese que

$\langle \mathcal{F},\mathcal{M},\pi,G\rangle$ es un *fibrado principal sobre $\mathcal{M}$ con grupo de estructura G*, si se cumple la condición siguiente: cada $p \in \mathcal{M}$ tiene un entorno U tal que

(i) hay una función $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ que satisface la ecuación $\varphi(ug) = \varphi(u) * g$ para todo $u \in \pi^{-1}(U)$ y todo $g \in G$ (donde $*$ simboliza la operación de grupo), y
(ii) la función $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$; $u \mapsto \langle \pi(u),\varphi(u)\rangle$ es un DIFEOMORFISMO.

Esta última condición supone a su vez que, para cada $q \in U$, la restricción de φ a la fibra sobre q aplique difeomórficamente $\pi^{-1}(\{q\})$ sobre G. Por lo tanto, G es difeomorfo con cada una de las órbitas de su acción sobre $\mathcal{F}$.

fibrado tangente (A. *Tangentenbündel*, F. *fibré tangent*, I. *tangent bundle*). Si $\mathcal{M}$ es una VARIEDAD DIFERENCIABLE n-dimensional real (o compleja), los vectores que forman los diversos ESPACIOS TANGENTES $T_p\mathcal{M}$ ($p \in \mathcal{M}$) pueden reunirse en un conjunto $T\mathcal{M}$ con la estructura de una variedad diferenciable $2n$-dimensional real (o, respectivamente, compleja), como se explica en el próximo párrafo. Entonces, la función $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, que asigna a cada $v \in T\mathcal{M}$ el punto $p \in \mathcal{M}$ donde v es tangente a $\mathcal{M}$, es una función lisa, y la estructura $\langle T\mathcal{M},\mathcal{M},\pi\rangle$ es un FIBRADO sobre $\mathcal{M}$, que se llama el *fibrado tangente* de $\mathcal{M}$.

El conjunto $T\mathcal{M} = \{v : v \in T_p\mathcal{M}$ para algún $p \in \mathcal{M}\}$ adquiere la estructura de variedad diferenciable mediante la construcción de un ATLAS. Procedemos así. Para cada $p \in \mathcal{M}$ se elige una CARTA x de $\mathcal{M}$ que esté definida en p. Como se explica bajo ESPACIO TANGENTE, la carta x determina una base del espacio vectorial $T_p\mathcal{M}$, formada por los vectores $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$; cada $v \in T_p\mathcal{M}$ es pues igual a una combinación lineal $v_1\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + \ldots + v_n\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ de estos n vectores. Si dejamos que v recorra cada espacio tangente $T_q\mathcal{M}$, mientras q recorre el dominio de la carta x, la función $v \mapsto \langle x^1(q), \ldots, x^n(q), v^1, \ldots, v^n\rangle$ es obviamente una carta con $2n$ coordenadas del conjunto $T\mathcal{M}$. La colección de todas las cartas definibles de este modo es un atlas de $T\mathcal{M}$. El atlas máximo generado por este atlas confiere a $T\mathcal{M}$ la estructura de una variedad $2n$-dimensional de la misma clase (real o compleja) que $\mathcal{M}$.

Mediante un procedimiento del todo análogo se construye el *fibrado cotangente* $\langle T\mathcal{M}^*,\mathcal{M},\pi\rangle$, donde la variedad $T\mathcal{M}^*$ reúne todos los covectores de $\mathcal{M}$ y la fibra sobre cada $p \in \mathcal{M}$ es el espacio cotangente $T_p\mathcal{M}^*$; asimismo se construyen fibrados de tensores de cualquier tipo determinado, cuyas fibras están formadas precisamente por todos los tensores de ese tipo en cada punto de $\mathcal{M}$.

filosofía de la matemática (A. *Philosophie der Mathematik*, F. *Philosophie des mathématiques*, I. *Philosophy of mathematics*). Dar cuenta de la excepcional y paradójica situación de la matemática en el conjunto del saber siempre ha constituido un reto para la filosofía. Aunque universalmente admirada por su incomparable solidez, objetividad y seguridad, nadie sabe explicar muy bien de dónde procede esa seguridad ni a qué objetos alude esa objetividad. ¿Dónde están los objetos de la matemática? ¿En un mundo aparte de formas puras, como quería Platón, o en las cosas naturales mismas, como pensaba Aristóteles, o en la intuición pura del sujeto trascendental, según Kant, o en el pensamiento introspectivo del matemático individual, como pretendía Brouwer, o en las manchas de tinta sobre las páginas de los libros de matemáticas, según sugería Hilbert? La matemática parece mucho más segura que las ciencias empíricas. Los resultados de la física siempre son provisionales y cambiantes, mientras que las verdades matemáticas, una vez probadas, quedan demostradas para siempre. Nuestra confianza en la ciencia empírica proviene, al menos en parte, de su contrastación con la experiencia, con la observación y el experimento. ¿De dónde procede la confianza que nos inspira la matemática? Según Stuart Mill, también de la experiencia, aunque esto es difícilmente sostenible fuera de ciertas parcelas muy limitadas y elementales de la matemática. Kant explicaba la validez universal de la matemática situándola en la forma a priori de nuestra sensibilidad, que imponemos a todas las cosas cuando las conocemos. Como el portador de gafas rojas lo ve todo rojo, nosotros, portadores de "gafas" euclídeas, lo vemos todo euclídeo. Pero si esto fuera así, ¿cómo hemos podido desarrollar luego las geometrías no euclídeas?

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX la matemática experimentó una expansión extraordinaria y sufrió una crisis de crecimiento, provocada tanto por el descubrimiento de las paradojas conjuntistas como por las críticas acerbas de algunos matemáticos contra los nuevos desarrollos en teoría de conjuntos, análisis y álgebra abstracta, basados, en su opinión, en un uso demasiado alegre y peligroso de las nociones infinitarias. En este ambiente surgieron tres corrientes famosas e influyentes de filosofía de la matemática, el logicismo, el intuicionismo y el formalismo, acompañadas de sus correspondientes programas de fundamentación.

El LOGICISMO de Frege y Russell explicaba la seguridad de la matemática reduciéndola a la lógica. La matemática no es más que lógica en disfraz, y la lógica es lo más seguro que hay. El programa logicista consitía en definir todas las nociones matemáticas a partir de nociones lógicas y en probar todos los axiomas de la aritmética y del análisis a partir de principios meramente lógicos. Pronto resultó evidente que la empresa requería hinchar el concepto de lógica hasta abarcar la teoría de conjuntos, con lo que el programa

fracasaba o se trivializaba. El INTUICIONISMO de Brouwer era la postura más radical de todas. Proponía renunciar por completo a la matemática clásica y a la vanidad de sus alegres y elegantes teorías para retirarse al desierto de la pureza metodológica, basada en la construcción concreta de los objetos finita en la mente del matemático individual. Esto implicaba una considerable amputación de la matemática clásica y una compleja reconstrucción de lo que se salvase de la quema. La mayoría de los matemáticos no estaban por la labor. Haciendo de portavoz de esta mayoría, el matemático más famoso de la época, Hilbert, impulsor del FORMALISMO, propuso salvar la totalidad de la matemática clásica y preservar su elegancia y libertad a base de representar las teorías matemáticas como juegos formales cuya consistencia podría ser probada por métodos finitarios, aceptables para todos, incluso para los exigentes intuicionistas. De todos modos, el descubrimiento de los teoremas de incompletud de Gödel en 1931 mostró la inviabilidad de los programas logicista y formalista y abrió una nueva etapa en la filosofía de la matemática.

El paulatino abandono de las tres grandes escuelas mencionadas ha conducido a una situación caracterizada por el papel preponderante de la teoría de conjuntos, la mayor sofisticación técnica y metamatemática, la gran variedad de las posturas filosóficas y el perfil relativamente bajo de todas ellas.

En cualquier caso, la matemática clásica y abstracta ha seguido desarrollándose sin ningún tipo de cortapisas y encontrando nuevas aplicaciones en todos los campos de la ciencia y de la actividad humana. En vista de ello, muchos matemáticos no se plantean problema filosófico alguno y otros aceptan un "PLATONISMO" más o menos ingenuo, según el cual todas las teorías matemáticas registran verdades acerca de sus objetos matemáticos, tan reales como las piedras y las sillas, y que de algún modo están ahí, aunque no sepamos dónde situar ese "ahí"; quizás en un mundo platónico. El mejor candidato a mundo platónico es el UNIVERSO CONJUNTISTA. Gödel, el más prominente platonista del siglo XX, no dudaba de la existencia objetiva e independiente del universo conjuntista, cuya exploración constituye la tarea de la matemática. Algunos filósofos, como Maddy, y muchos matemáticos simpatizan con esta postura.

Muchos filósofos de la matemática se muestran escépticos frente a la propuesta "platonista" de tomarse la teoría de conjuntos al pie de la letra y de considerar que los objetos matemáticos ya están ahí, terminados, en el universo conjuntista. Algunos de estos escépticos, como Chihara, Field y Hellman, creen, sin embargo, en algún tipo de lógica modal y tratan de reformular tanta matemática como sea posible en términos modales, que toman como primitivos. Por ejemplo, Chihara introduce un cuantificador modal primitivo C, tal que $Cx\varphi(x)$ se lee "es posible construir un x tal que $\varphi(x)$". Otros filósofos, como Resnik y Shapiro, han rechazado que la matemática hable de al-

gún tipo determinado de objetos, ya sean conjuntistas, modales o construidos en la intuición o el pensamiento. Su postura, que ellos llaman ESTRUCTURALISMO, mantiene que los términos matemáticos solo se refieren a posiciones dentro de estructuras, posiciones caracterizadas por sus relaciones con otras posiciones de la misma estructura. Estas diversas posturas no son excluyentes. Así, Hellman combina el modalismo con el estructuralismo. Y Field combina el modalismo con el nominalismo, que él define como el rechazo de las entidades abstractas. Su obra principal se titula significativamente *Science Without Numbers: A Defense of Nominalism*. Field acepta hablar de la consistencia de las teorías matemáticas, pero no acepta la definición de consistencia como satisfacibilidad. En vez de ello, toma como primitivas las nociones modales, y caracteriza la consistencia de una teoría finitamente axiomatizable como la posibilidad de la conjunción de sus axiomas.

Otro tema de reflexión filosófica es la sorprendente eficacia de la modelización matemática del mundo físico. Wigner decía que "el milagro de la adecuación del lenguaje de la matemática a la formulación de las leyes de la física es un don maravilloso que no entendemos ni merecemos". Dejando de lado la cuestión de si lo merecemos, es cierto que no acabamos de entenderlo. Quizás una especie de evolución "darwinista" ha seleccionado, de entre la infinidad de estructuras matemáticas, aquellas pocas que encajan más o menos bien con ciertos rasgos del mundo físico. O quizá la explicación sea otra. En cualquier caso, una filosofía satisfactoria de la matemática debe dar cuenta también de la aplicabilidad de la matemática pura al mundo impuro de la realidad empírica.

filosofía natural (A. *Naturphilosophie*, F. *philosophie naturelle*, I. *natural philosophy*). *Philosophia naturalis* es el nombre latino preciso para la φυσικὴ φιλοσοφία de Aristóteles. Designa la reflexión filosófica sobre la naturaleza en la escolástica medieval y renacentista, y la física moderna cuando esta inicia su carrera. Figura en el título de la obra maestra de Newton (1687) y todavía, en inglés, en el del gran tratado de mecánica de Thomson y Tait (1879/1883). Desde 1800 la frase se aplica más bien a las grandes visiones del conjunto de la naturaleza construidas por filósofos especulativos —Schelling, Hegel, Bergson, Whitehead— a la luz de la más reciente ciencia natural, bien o mal comprendida. La rapidez con que el progreso de la física experimental torna obsoletas estas especulaciones ha contribuido a desprestigiar la expresión *filosofía natural* entre los científicos. Con todo, si pensamos que 'filosofía' connota propiamente indagación y no sistema, parece razonable darle ese nombre a aquella vertiente de la ciencia actual que busca una genuina comprensión, coherente y global, del devenir cósmico y no se resigna a ser solamente una panoplia desmenuzada e instrumentalizada de especiali-

dades. Es oportuno recordar que casi todos los físicos más celebrados del siglo XX, desde Einstein y Bohr hasta Feynman y Weinberg, han entendido su vocación como *filosofía natural* en este sentido.

filtro (A. *Filter,* F. *filtre,* I. *filter*). Sea $\mathfrak{R} = \langle R, \sqcap, \sqcup \rangle$ un RETÍCULO. Un *filtro* en $\mathfrak{R}$ es un subconjunto $F \subseteq R$ que cumple las condiciones siguientes:

F1 $x \sqcap y \in F$, para todo $x, y \in F$.
F2 $x \sqcup z \in F$, para todo $x \in F$ y todo $z \in R$.

Un IDEAL en el retículo $\mathfrak{R}$ se caracteriza por cumplir condiciones iguales a F1 y F2 con los signos $\sqcap$ y $\sqcup$ intercambiados.

finito (A. *endlich,* F. *fini,* I. *finite*). Los conjuntos de cosas y sucesos con que nos vemos confrontados en la vida cotidiana y en la realidad empírica son siempre conjuntos finitos. Un conjunto *A* es *finito* si y solo si satisface alguna (y, por tanto, todas) de las siguientes condiciones equivalentes: (1) *A* no es infinito; (2) *A* es biyectable con un ordinal $\alpha \in \omega$; (3) la cardinalidad de *A* es un número natural, $|A| \in \omega$; (4) $|A| < \aleph_0$; (5) hay una relación *R* tal que tanto *R* como su inversa R^{-1} bien-ordenan *A*; (6) *A* no es biyectable con ninguno de sus subconjuntos propios (es decir, distintos de *A*). La condición (6) es la definición de finitud de Dedekind. La prueba de su equivalencia con las demás requiere el axioma de elección. En la matemática y la ciencia teórica manejamos tanto conjuntos finitos como infinitos. Mediante un número finito de aplicaciones de operaciones conjuntistas como la unión, la intersección, el producto cartesiano y el conjunto potencia a conjuntos finitos obtenemos siempre de nuevo conjuntos finitos. El infinito es inalcanzable desde lo finito.

fisicalismo (A. *Physikalismus,* F. *physicalisme,* I. *physicalism*). En el contexto del POSITIVISMO LÓGICO se llama así a la tesis de que todo el conocimiento científico tiene que poder expresarse en un lenguaje único, aplicable a todo y controlable por todos, el llamado "lenguaje físico" (A. *physikalische Sprache*). Fue adoptada por Carnap y otros miembros de esa escuela filosófica hacia 1930, cuando, a instancias de Neurath y Popper, desistieron de su programa de traducir todas las aseveraciones científicas a un lenguaje descriptivo de vivencias personales. El lenguaje físico contiene, además de términos lógico-matemáticos, solo términos necesarios y suficientes para describir los procesos de la naturaleza inorgánica. El lenguaje físico comparte con el lenguaje precientífico un sublenguaje que Carnap llama *lenguaje físico de cosas* o *lenguaje de cosas,* al que pertenecen predicados como 'frío' y 'caliente' (mas no 'temperatura', pues "su determinación requiere el empleo

de un instrumento técnico"), 'pesado', 'liviano', 'rojo', 'azul', 'grande', 'pequeño', 'grueso', 'delgado', etc. Si P es uno de estos *predicados observables de cosas*, entonces, según Carnap, cualquier persona puede, en condiciones apropiadas, llegar a decidir tras unas pocas observaciones si un objeto u al cual P sería en principio aplicable satisface este predicado o no (esto es, si Pu o $\neg Pu$). La idea inicial era que todos los demás predicados del lenguaje físico son reducibles a predicados observables: aquellos que significan *disposiciones* —como 'soluble', 'transparente', 'elástico', 'frágil'— por cuanto las condiciones experimentales y las reacciones que los caracterizan pueden describirse mediante predicados observables de cosas; y todos los demás —como 'agua', 'azúcar', 'fuego', 'lluvia'— porque sería posible introducirlos, mediante la aplicación reiterada de operaciones lógicas, tomando como base los predicados observables y disposicionales. Aunque Carnap luego moderó considerablemente esta pretensión, siguió pensando que todo el contenido informativo de las aseveraciones científicas tendría que poderse expresar mediante predicados observables. En la literatura reciente suele llamarse *fisicalismo* a la tesis de que todos los términos empleados para describir la realidad tienen que poderse definir a partir de términos admitidos o admisibles en las teorías físicas.

Hay también quien llama *fisicalismo* a la tesis de que todas las teorías científicas tienen que poderse derivar de teorías físicas, eventualmente de una sola. Aunque evidentemente para que esta derivación pueda efectuarse habría que primero reducirlas todas a un lenguaje común, éste no necesita cumplir los requisitos de reducibilidad y traducibilidad siquiera parcial a predicados observables mencionados en el párrafo anterior. Por otra parte, ninguna de las dos formas de fisicalismo lingüístico descritas en el párrafo anterior implica que todas las teorías científicas sean derivables de una teoría física única. La fácil confusión entre estas tres acepciones tan diferentes de la palabra 'fisicalismo' tiene su precio. Por ejemplo, Field (1972) critica a Tarski por incumplimiento del programa fisicalista en la segunda acepción, pero lo que Tarski (1933) se propuso fue cumplirlo en la primera.

foliación (A. *Blätterung*, F. *foliation*, I. *foliation*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE de n dimensiones. Una *foliación* de $\mathcal{M}$ con codimensión q ($0 \le q \le n$) es una FAMILIA $\{H_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de partes de $\mathcal{M}$, llamadas *hojas* de la foliación, las que cumplen las condiciones siguientes:

(i) cada punto de $\mathcal{M}$ está situado en una y solo una hoja de la foliación;
(ii) cada hoja de la foliación consta de uno o más componentes conectados por caminos (vale decir, están constituidas de tal modo que, si dos puntos P, $Q \in \mathcal{M}$ pertenecen a un mismo componente de una

hoja de la foliación, P y Q están unidos por el camino de una CURVA en $\mathcal{M}$);

(iii) cada punto $P \in \mathcal{M}$ está en el dominio U_x de una CARTA x con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ tales que, para cada índice $i \in \mathcal{I}$, $x^n = x^{n-1} = \ldots = x^{n-q+1}$ = const. sobre cada componente conectado por caminos de $U_x \cap H_i$.

En virtud de la condición (iii), cada hoja de la foliación es una subvariedad $(n-q)$-dimensional, posiblemente no conectada, de $\mathcal{M}$.

forcing (A. *Forcing*, F. *forcing*, I. *forcing*). Método para probar la consistencia relativa o compatibilidad de hipótesis conjuntistas con los axiomas habituales de la teoría de conjuntos (por ejemplo, de ZFC) basado en la construcción de una nueva realización o modelo de los axiomas a la que se "fuerza" a satisfacer también la hipótesis conjuntista en cuestión. Fue introducido por Paul Cohen en 1963 para probar la independencia del AXIOMA DE ELECCIÓN (AC) y la HIPÓTESIS DEL CONTINUO (CH) respecto de los axiomas de ZF. Previamente Gödel había probado la consistencia relativa de AC y CH respecto de los axiomas habituales mediante la construcción de un modelo interno de los axiomas que satisfacía AC y CH. Para demostrar la independencia quedaba por probar la consistencia relativa de sus respectivas negaciones, ¬AC y ¬CH. Cohen lo probó construyendo por *forcing* un modelo externo de ZF en el que no valía AC ni CH. Desde entonces el *forcing* se ha convertido en la herramienta predilecta de la teoría avanzada de conjuntos, usada para explorar las hipótesis sobre cardinales grandes o sobre combinatoria infinitaria y para probar relaciones de dependencia e independencia entre diversos axiomas y principios. También ha encontrado aplicaciones en topología y otras ramas de la matemática.

Muchas investigaciones que usan el *forcing* dan por supuesta la teoría de conjuntos ZFC. Esta teoría tiene como único parámetro primitivo el signo $\in$ de pertenencia. Un modelo o realización $\langle M, \in \rangle$ de ZFC consta de una clase no vacía M, el universo o dominio de la realización, y una relación binaria en M, la relación de pertenencia en M, a la que vamos a llamar también $\in$. Partimos de una realización transitiva y numerable $\langle M, \in \rangle$ de ZFC. Que la realización es transitiva significa que vale: $\forall xy(x \in y \land y \in M \Rightarrow x \in M)$. Que la realización es numerable significa que M es numerable. Por el TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM, si ZFC es consistente, entonces tiene realizaciones numerables. Cuando pensamos intuitivamente en la teoría de conjuntos, no pensamos en una realización numerable, sino en una innumerable, con conjuntos de cualquier cardinalidad. Pero lo que tomamos como punto de partida del *forcing* es una realización numerable, ya que solo así podremos hacer ciertas

pruebas cruciales por inducción. Partiendo de $\langle M,\in\rangle$, añadimos nuevos subconjuntos a M para obtener otra realización más grande de ZFC, que posea además las características que buscamos.

Sea $\langle P, \leq\rangle$ un orden parcial en $\langle M,\in\rangle$. Consideremos los elementos de P como condiciones y la relación $\leq$ como indicando el mayor refinamiento o información de una condición. Queremos añadir un subconjunto genérico G de P (tal que $G \notin M$) a M para formar una nueva realización o modelo, la extensión genérica $\langle M[G],\in\rangle$, que extienda la realización dada $\langle M,\in\rangle$ hasta abarcar a G y sea todavía un modelo de ZFC. $M \subseteq M[G]$. $G \in M[G]$. La información así obtenida consistirá en que para ciertas condiciones $p \in P$, $p \in G$. Tales condiciones $p \in G$ son las condiciones de *forcing*. G ha de ser consistente en el sentido de que cualesquiera dos condiciones p, $q \in G$ han de ser compatibles, donde p, $q \in P$ son compatibles si y solo si poseen una extensión común $r \in P$, es decir, $r \leq p$ y $r \leq q$. $\langle M,\in\rangle$ permite deducir de $p \in G$ que cada miembro de G debe ser compatible con p. Entonces decimos que la condición p *fuerza* esa información (es decir, *fuerza* la correspondiente fórmula del lenguaje de *forcing*). De ahí viene la palabra '*forcing*', forzamiento. Esta y otras informaciones serán obtenidas en un lenguaje formal apropiado de *forcing*. La relación de *forcing* entre una condición p y una fórmula φ, simbolizada $p \Vdash \varphi$, es definible en $\langle M,\in\rangle$. Esta definibilidad es la que nos permite probar que la extensión genérica $\langle M[G],\in\rangle$ es una realización de ZFC y que satisface también otras hipótesis suplementarias que estemos considerando. Variando el orden parcial $\langle P,\leq\rangle$, podemos construir distintas extensiones genéricas y obtener diferentes resultados de consistencia relativa.

Estas indicaciones esbozan, con algunas simplificaciones, el procedimiento de la primera versión del *forcing*, debida a Cohen. Posteriormente Scott y Solovay han desarrollado otra versión más elegante, pero menos intuitiva, del *forcing*, basada en las funciones características parciales y los modelos booleanos, que toman sus valores veritativos en cualquier álgebra de Boole y no solo en la mínima álgebra de Boole $\{0,1\}$, como es habitual.

forma cuadrática (A. *quadratische Form*, F. *forme quadratique*, I. *quadratic form*). Sea $\mathcal{V}$ un ESPACIO VECTORIAL n-dimensional real o complejo. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de escalares de $\mathcal{V}$. Una *forma cuadrática* en $\mathcal{V}$ es una función $Q : \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ que cumple las dos condiciones siguientes:

Q1 $Q(\mathrm{v}) = Q(-\mathrm{v})$, para cualquier $\mathrm{v} \in \mathcal{V}$.
Q2 Hay una FUNCIÓN BILINEAL $f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$, tal que, para todo v, $\mathrm{w} \in \mathcal{V}$,

$$2f(\mathrm{v},\mathrm{w}) = Q(\mathrm{v} + \mathrm{w}) - Q(\mathrm{v}) - Q(\mathrm{w})$$

forma normal conjuntiva (A. *Konjunktive Normalform*, F. *forme normale conjonctive*, I. *conjunctive normal form*). Una *disyunción elemental* es una disyunción ($\psi_1 \vee \psi_2 \vee ... \vee \psi_n$), tal que cada ψ_i ($1 \leq i \leq n$) es una letra proposicional o la negación de una letra proposicional. Téngase en cuenta que esta definición incluye (para $n = 1$) el caso de que la disyunción elemental no sea una disyunción genuina, sino una letra proposicional aislada o la negación de una letra proposicional aislada. Una *forma normal conjuntiva* es una conjunción de disyunciones elementales, es decir, ($\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_m$), donde para cada i ($1 \leq i \leq m$), φ_i es una disyunción elemental. Téngase en cuenta que esta definición incluye (para $m = 1$) el caso de que la conjunción no sea una conjunción genuina, sino una disyunción elemental aislada o la negación de una disyunción elemental aislada.

La forma normal conjuntiva permite comprobar de un vistazo si la fórmula es válida o no, si es una tautología o no. Una conjunción es válida si y solo si todos sus miembros son válidos. Y una disyunción elemental es válida si y solo si contiene entre sus miembros una misma letra proposicional una vez negada y otra sin negar, pues en ese caso, y cualquiera que sea el valor veritativo que asignemos a esa letra, siempre tendremos que asignar la verdad a ella o a su negación, con lo que la disyunción elemental siempre será verdadera. Por tanto, una forma normal conjuntiva es válida si y solo si en cada una de sus disyunciones elementales aparece alguna letra proposicional una vez negada y otra sin negar. Así, por ejemplo, la forma normal conjuntiva ((A ∨ ¬A) ∧ (A ∨ B)) no es una tautología, pues la asignación de 0 a A y a B no la verifica o satisface. Sin embargo, tanto la forma normal conjuntiva (A ∨ ¬A) como ((A ∨ B ∨ ¬B) ∧ (C ∨ ¬B ∨ ¬C)) son tautologías.

Cada función veritativa n-aria es representable mediante una fórmula en forma normal conjuntiva. Por tanto, para cada fórmula φ de la lógica proposicional hay al menos una fórmula φ^c en forma normal conjuntiva que es equivalente a ella, es decir, tal que ambas representan la misma función veritativa o, dicho de otra manera, tal que $\models(\varphi \Leftrightarrow \varphi^c)$. Desde un punto de vista operativo, es posible someter cualquier fórmula de la lógica proposicional a una serie de transformaciones o reescrituras equivalentes sucesivas hasta obtener finalmente una forma normal conjuntiva equivalente a la fórmula inicial. Esto constituye un procedimiento de decisión para la validez de las fórmulas de la lógica proposicional, aunque en la práctica resulte algo farragoso y sea poco empleado.

forma normal disyuntiva (A. *disjunktive Normalform*, F. *forme normale disjonctive*, I. *disjunctive normal form*). Una *conjunción elemental* es una conjunción ($\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n$), tal que cada ψ_i ($1 \leq i \leq n$) es una letra propo-

sicional o la negación de una letra proposicional. Téngase en cuenta que esta definición incluye (para $n = 1$) el caso de que la conjunción elemental no sea una conjunción genuina, sino una letra proposicional aislada o la negación de una letra proposicional aislada. Una *forma normal disyuntiva* es una disyunción de conjunciones elementales, es decir, $(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_m)$, donde para cada i $(1 \leq i \leq m)$, φ_i es una conjunción elemental. Téngase en cuenta que esta definición incluye (para $m = 1$) el caso de que la disyunción no sea una disyunción genuina, sino una conjunción elemental aislada o la negación de una conjunción elemental aislada.

La forma normal disyuntiva permite comprobar de un vistazo si la fórmula es insatisfacible (o contradictoria o una antilogía) o no. Una disyunción es insatisfacible si y solo si todos sus miembros son insatisfacibles. Y una conjunción elemental es insatisfacible si y solo si contiene entre sus miembros una misma letra proposicional una vez negada y otra sin negar, pues en ese caso, y cualquiera que sea el valor veritativo que asignemos a esa letra, siempre tendremos que asignar la falsedad a ella o a su negación, con lo que la conjunción elemental siempre será falsa. Por tanto, una forma normal disyuntiva es insatisfacible si y solo si en cada una de sus conjunciones elementales aparece alguna letra proposicional una vez negada y otra sin negar. Así, por ejemplo, la forma normal disyuntiva $((A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B))$ no es una antilogía, pues la asignación de 1 a A y a B la verifica o satisface. Sin embargo, tanto la forma normal disyuntiva $(A \wedge \neg A)$ como $((A \wedge B \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg B \wedge \neg C))$ son antilogías, ya que ninguna asignación las satisface.

Cada función veritativa n-aria es representable mediante una fórmula en forma normal disyuntiva. Por tanto, para cada fórmula φ de la lógica proposicional hay al menos una fórmula φ^d en forma normal disyuntiva que es equivalente a ella, es decir, tal que ambas representan la misma función veritativa o, dicho de otra manera, tal que $\models(\varphi \Leftrightarrow \varphi^d)$. Desde un punto de vista operativo, es posible someter cualquier fórmula de la lógica proposicional a una serie de transformaciones o reescrituras equivalentes sucesivas hasta obtener finalmente una forma normal disyuntiva equivalente a la fórmula inicial. Esto constituye un procedimiento de decisión para la insatisfacibilidad de las fórmulas de la lógica proposicional, aunque en la práctica resulte algo farragoso y sea poco empleado.

formalismo (A. *Formalismus*, F. *formalisme*, I. *formalism*). Corriente de la filosofía de la matemática impulsada por Hilbert en la tercera década del siglo XX. La inmensa expansión que había experimentado la matemática en las décadas anteriores con la aritmetización del análisis y el desarrollo de la teoría de conjuntos, del álgebra abstracta y de la topología había sido acompañada por una cierta sensación de duda e inseguridad, provocada tanto por el

descubrimiento de las paradojas conjuntistas como por las críticas acerbas de Kronecker, Poincaré y otros matemáticos. Ante esta situación, Brouwer, fundador del INTUICIONISMO, había propuesto abandonar como inaceptable el grueso de la matemática clásica y limitarse a usar una matemática disminuida, aunque reconstruida con criterios finitarios e intuitivos que garantizarían su seguridad. Hilbert compartía la preocupación de Brouwer por el rigor metodológico, pero no estaba dispuesto a renunciar a la riqueza y elegancia de la matemática clásica, incluyendo sus ramas más abstractas. ¿Cómo combinar la preservación de la matemática clásica con la aceptación de los exigentes estándares metodológicos de los intuicionistas? Hilbert pensó que había encontrado la solución: asegurar la consistencia de la matemática clásica mediante la formalización de sus diversas teorías y la prueba metamatemática de que dichas teorías formales son consistentes, usando para ello solo métodos finitarios intuicionistamente aceptables.

Hilbert pensaba que en la matemática se manejan dos tipos de objetos, nociones, proposiciones y pruebas: unas son reales, finitarias y con contenido (*inhaltlich*); otras son ideales, infinitarias y ficticias, sin contenido real. Las combinaciones finitas de objetos reales finitos pueden ser inspeccionadas y verificadas directamente. Por ejemplo, comparando una determinada fila finita de signos con otra, constatamos que es más larga que la otra. Estos asertos son indiscutibles y son aceptados por todos, incluso por los intuicionistas. Por otro lado, los matemáticos, en su búsqueda de leyes generales y teorías elegantes, introducen todo tipo de elementos ideales, como los puntos en el infinito de la geometría proyectiva o el número imaginario *i*, o los conjuntos infinitos actuales del análisis o de la teoría de conjuntos, y hacen asertos sobre ellos. Aunque la introducción de estas fichas "ficticias" amplía y simplifica el juego matemático, haciéndolo más flexible y potente, también lo torna potencialmente peligroso. El peligro estriba en que detrás de alguna de estas ficciones aceche una contradicción, lo que arruinaría el juego entero de la matemática clásica. Si logramos probar que el juego de la matemática clásica es completamente seguro, pues no puede producir contradicción alguna, habremos eliminado la raíz de nuestra preocupación. A partir de ese momento podremos entregarnos con tranquilidad y buena conciencia al juego, a sabiendas de que sus elementos ideales e infinitistas son inofensivos y no encierran peligro alguno. Para no ser circular, esta prueba metamatemática debe llevarse a cabo mediante métodos estrictamente finitarios, que no presupongan en modo alguno la existencia de conjuntos infinitos.

Aunque las teorías de la matemática clásica se refieran con frecuencia a conjuntos infinitos, los términos, fórmulas o enunciados usados para referirnos a esos objetos infinitos son siempre secuencias finitas de signos. También las pruebas o deducciones empleadas en su demostración son objetos finitos.

El contenido semántico de la matemática clásica puede ser infinito, pero los medios de expresión y de prueba son finitarios. Por ejemplo, a veces podemos probar de un modo no constructivo que existe al menos un número que tiene una propiedad determinada, pues de la hipótesis contraria se deriva una contradicción, sin ser capaces de indicar o construir tal número, sin ser capaces de dar un ejemplo concreto de número con tal propiedad. Sin embargo, la prueba indirecta se lleva a cabo en un número finito de pasos y consta de un *número* finito de secuencias finitas de signos, obtenidas mediante un número finito de reglas; todo ello es susceptible de ser inspeccionado paso a paso en un tiempo finito. Si hay un error, es fácil de detectar. Por tanto, según Hilbert y von Neumann, si queremos asegurar la consistencia de la matemática clásica con los métodos finitarios intuicionistamente aceptables, no debemos fijarnos en sus contenidos, sino en sus métodos de prueba. Considerando la matemática clásica como un juego combinatorio jugado con símbolos como fichas, debemos probar por inspección de las reglas del juego y por el cálculo combinatorio de sus resultados posibles que, siguiendo esas reglas, es imposible llegar a contradicciones.

El PROGRAMA DE HILBERT, expuesto a partir de 1922, se plasmaba en dos tareas: (1) Había que formalizar de un modo preciso todas las teorías de la matemática clásica, y (2) había que probar por medios finitarios que las teorías así formalizadas son consistentes. Además, se esperaba que las teorías matemáticas formalizadas serían completas, decidibles y categóricas y que, a la larga, todos los problemas matemáticos serían solucionables. Von Neumann, Bernays, Gentzen y Kreisel, entre otros, participaron activamente en el desarrollo del programa. Sin embargo, los TEOREMAS DE INCOMPLETUD de Gödel de 1931 mostraron que el programa de Hilbert era irrealizable, pues las teorías matemáticas interesantes ni pueden formalizarse de un modo consistente y completo ni su consistencia puede probarse con sus propios métodos ni con métodos menos potentes, como los finitarios. Sin embargo, el esfuerzo de los formalistas no fue baldío. Sus investigaciones renovaron la lógica y la metamatemática e hicieron posible el tipo de resultados precisos, sutiles y potentes que acabaron arruinando su propio programa.

fórmula (A. *Ausdruck*, F. *formule*, I. *formula*). La noción de fórmula desempeña el mismo papel en un lenguaje formal que la noción de oración en un lenguaje natural. Afortunadamente, la gramática de un lenguaje formal es mucho más sencilla que la de un lenguaje natural y se reduce a unas pocas reglas. Una fórmula de un lenguaje formal es una hilera o secuencia finita de signos del alfabeto de ese lenguaje bien formada de acuerdo con las reglas de construcción de las fórmulas. En el caso de la lógica proposicional, esas reglas son: (1) Una letra proposicional cualquiera es una fórmula. (2) Si α es

una fórmula, entonces el resultado de escribir '¬' delante, es decir, ¬α, también es una fórmula. (3) Si α y β son fórmulas, entonces (α ∧ β), (α ∨ β), (α ⇒ β) y (α ⇔ β) son también fórmulas. *Fórmulas* de la lógica proposicional son todas y solas las secuencias de signos formadas por aplicaciones sucesivas de estas tres reglas. Las fórmulas se caracterizan según la última regla usada en su construcción: si fue la regla (1), se trata de una fórmula simple; si fue la (2) o la (3), de una fórmula compuesta, una negación en el caso de la (2) y una conjunción, disyunción, condicional o bicondicional en el caso de la (3).

Una *fórmula* de la lógica de primer orden (con identidad) es una secuencia finita de signos del alfabeto de la lógica de primer orden construida de acuerdo con las siguiente reglas: (1) Si R es un relator (un signo de relación) n-ario y $\tau_1 \ldots \tau_n$ son TÉRMINOS, entonces $R\tau_1 \ldots \tau_n$ es una fórmula. (2) Si τ y σ son términos, entonces τ = σ es una fórmula. (3) Si α es una fórmula, entonces ¬α también es una fórmula. (4) Si α y β son fórmulas, entonces (α ∧ β), (α ∨ β), (α ⇒ β) y (α ⇔ β) son también fórmulas. (5) Si α es una fórmula y x es una variable, entonces $\forall x\alpha$ y $\exists x\alpha$ también son fórmulas. Fórmulas de la lógica de primer orden son todas y solas las secuencias de signos formadas por aplicaciones sucesivas de estas cinco reglas. Las fórmulas se caracterizan según la última regla usada en su construcción: si fue la regla (2), se trata de una ecuación; si fue la regla (1) o (2), la fórmula es simple; si fue la regla (3), (4) o (5), la fórmula es compuesta: una negación, en el caso de la (3); una conjunción, disyunción, condicional o bicondicional, en el caso de la (4); una cuantificación universal o existencial, en el caso de la (5).

fórmula normal prenexa (A. *Pränexe Normalform*, F. *formule normale prénexe*, I. *prenex normal formula*). Si todos los cuantificadores de una fórmula están al principio, decimos que se trata de una fórmula prenexa. Una fórmula α es prenexa si y solo si α tiene la forma $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\beta$, donde $Q_1 \ldots Q_n$ son cuantificadores, $x_1, \ldots, x_n$ son variables y β es una fórmula sin cuantificadores. $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ se llama el prefijo de la fórmula prenexa y β se llama su matriz. En una fórmula prenexa el alcance de los cuantificadores se extiende siempre hasta el final de la fórmula y ningún cuantificador está negado. Si todas las variables del prefijo de una fórmula prenexa son distintas entre sí y están libres en la matriz, decimos que se trata de una *fórmula normal prenexa*. Para cada fórmula φ hay al menos una fórmula normal prenexa α que es lógicamente equivalente a φ y contiene las mismas variables libres que φ. Este resultado se expresa a veces diciendo que toda fórmula puede ser puesta en forma normal prenexa. Aunque la validez lógica de primer orden es indecidible en general, puede ser decidida para ciertas clases de fórmulas, definidas por el prefijo de sus correspondientes formas normales prenexas.

fórmula prima (A. *Primformel*, F. *formule prime*, I. *prime formula*). Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal de primer orden. Las fórmulas primas de $\mathcal{L}$ son las fórmulas conectivamente irreducibles a fórmulas más simples (subfórmulas), es decir, las fórmulas que no son el resultado de negar una subfórmula o de unir dos subfórmulas mediante un conector binario. Las fórmulas simples (ecuaciones y fórmulas predicativas o relacionales) son fórmulas primas, y también lo son las cuantificaciones universal o existencial. Sin embargo, las negaciones, conjunciones, disyunciones, condicionales y bicondicionales no son fórmulas primas. Las fórmulas primas desempeñan el papel de las letras proposicionales en la representación de la lógica proposicional en la lógica de primer orden.

Sea Φ el conjunto de las fórmulas primas de $\mathcal{L}$. Una asignación veritativa w es una función $w: \Phi \to \{0,1\}$ que asigna un valor veritativo (digamos, 0 o 1) a cada fórmula prima de $\mathcal{L}$. Cualquier asignación veritativa a las fórmulas primas de $\mathcal{L}$ determina una interpretación veritativa de todas las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$. En función de las interpretaciones veritativas se definen las nociones de TAUTOLOGÍA y consecuencia tautológica en la lógica de primer orden.

fotón (A. *Photon*, F. *photon*, I. *photon*). Bosón *gauge* que transmite la interacción electromagnética. Los fotones son partículas elementales estables con masa 0, carga eléctrica 0 y spin 1. El fotón es el cuanto (o paquete discreto mínimo de energía) del campo electromagnético (descrito por la electrodinámica cuántica) y de la radiación electromagnética. Las ondas de radio, las microondas, el infrarrojo, la luz visible, el ultravioleta, los rayos X y los rayos gamma son chorros de fotones de frecuencia (y, por tanto, energía) creciente.

frecuencia (A. *Frequenz*, F. *fréquence*, I. *frequency*). La *frecuencia* de un proceso periódico es el número de ciclos que el proceso completa en la unidad de tiempo.

frecuencia angular (A. *Winkelfrequenz*, F. *fréquence angulaire*, I. *angular frequency*). Si ν es la FRECUENCIA de un proceso periódico, su *frecuencia angular* es $2\pi\nu$. Sobre el origen y empleo del término, ↗MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

fuerza (A. *Kraft*, F. *force*, I. *force*). El concepto precientífico de *fuerza* refleja la experiencia del esfuerzo muscular que todos hacemos desde la más temprana infancia para sostenernos en pie, caminar, correr; levantar, sostener y acarrear pesos; martillar, atornillar o aserruchar; y también para repeler a quien pretenda golpearnos o movernos de donde queremos estar. Espontánea-

mente atribuimos fuerza a todo ser animado o inanimado que nos impela o resista y, generalizando, a todas las cosas, aun invisibles, que parezcan impelerse o resistirse entre ellas. En esta versión intuitiva, el concepto de fuerza corresponde muy precisamente a la forma más notoria de CAUSALIDAD.

Desde nuestra perspectiva, formada directa o indirectamente en la mecánica de Newton, las experiencias mencionadas indican claramente que las fuerzas vividas o inferidas se ejercen en un lugar y en una dirección, y que todas las fuerzas aplicadas en un mismo lugar, cualquiera que sea su origen y su índole, se suman y refuerzan si sus direcciones concuerdan, y se restan o cancelan si sus direcciones se oponen. Reconocemos así una cierta uniformidad de todas las fuerzas, que permite medirlas, por ejemplo, por el peso que cada una es capaz de sostener. (La cuantificación del peso mediante la balanza es, por cierto, un logro antiquísimo de la humanidad.) Nos parece además que algunas observaciones fáciles —como ver a dos niños que tiran de un carrito en direcciones diferentes pero no opuestas— bastan para sugerir el procedimiento de suma vectorial mediante el cual Newton calcula la resultante de dos o más fuerzas concurrentes.

No es claro que los científicos de la antigüedad considerasen el asunto bajo esta misma luz. Desde luego, no consta que Arquímedes haya empleado alguna vez un equivalente griego de *fuerza* (βία, ἰσχύς, δύναμις) para designar un *peso* (βάρος). Sus escritos exhiben, sin embargo, una comprensión inmejorable de las relaciones estáticas entre estos. Por otra parte, un famoso pasaje de Aristóteles (*Física*, VII.5) expresa un infortunado intento por relacionar la magnitud de las fuerzas con sus efectos cinéticos: si una fuerza dada F mueve un móvil M una distancia d en el tiempo t, y lo mueve $\frac{1}{2}d$ en $\frac{1}{2}t$, entonces una fuerza $G = \frac{1}{2}F$ mueve $\frac{1}{2}M$ la distancia d en el tiempo t; ello no implica, empero, que G mueva M una fracción de d en el tiempo t o en otro tiempo cualquiera, pues bien puede ser que una fuerza igual a la mitad de F sea absolutamente incapaz de mover el móvil M. Esta última observación refleja fielmente una experiencia familiar, pero opone un obstáculo insalvable al desarrollo de una física como la nuestra.

Los padres de la física moderna asignan todos capital importancia a la *fuerza* como causa eficiente o principio del cambio. Kepler la concibe como una cantidad dirigida —un vector—, pero, al modo de Aristóteles, la entiende como principio de movimiento y reposo. Según Descartes, "la fuerza con que un cuerpo actúa sobre otro cuerpo o resiste su acción consiste solamente en que cada cosa insiste hasta donde puede en permanecer en el mismo estado en que se encuentra" (1644, ii, §43); para medirla Descartes toma el producto de la masa m del cuerpo por su velocidad v sin considerar la dirección de ésta, es decir, iguala la fuerza al valor absoluto de lo que hoy llamamos *momento cinético*. También Galileo suele usar *forza* (*fuerza*) como sinónimo

de *momento* e *ímpeto*. Para Descartes, la suma $\sum_k m_k v_k$ (donde el índice k recorre todos los cuerpos que existen) es invariable y expresa la constancia de la voluntad de Dios. Leibniz demuestra, mediante un brillante EXPERIMENTO MENTAL, que la cantidad conservada en la naturaleza no es la suma de las "fuerzas muertas" $\sum_k m_k v_k$, sino la suma de las "fuerzas vivas" $\sum_k m_k v_k^2$. Todavía en 1847, Helmholtz titula "Sobre la conservación de la fuerza" su escrito sobre el principio de conservación de la energía.

Tales vacilaciones terminológicas ponen de manifiesto la originalidad de Newton. Por una parte, retiene de Kepler la concepción de la fuerza como cantidad dirigida e introduce expresamente la suma vectorial como regla de combinación de las fuerzas. Por otra, entiende que si "todo cuerpo persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta" (primera LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON, previamente proclamada por Descartes), la acción de la fuerza como principio de cambio consistirá precisamente en cambiar ese estado. La medida de la fuerza será entonces no el movimiento mv, ni el momento cinético $m\mathbf{v}$ (cantidad dirigida), sino *la variación de este*, $\Delta(m\mathbf{v})$, como lo expresa la segunda LEY DEL MOVIMIENTO; o, mejor, como lo expresó Euler, *la variación del momento cinético por unidad de tiempo*, esto es (teniendo en cuenta que la fuerza que actúa sobre un cuerpo —por ejemplo, un planeta— suele variar continuamente su dirección y magnitud):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} m\mathbf{v} \qquad (1)$$

Este es el concepto de *fuerza* que preside el desarrollo triunfal de la física durante el siglo XIX, al que se refiere Helmholtz (1847) cuando declara que "la condición para la completa inteligibilidad de la naturaleza" consiste en "referir los fenómenos naturales a fuerzas atractivas y repulsivas, cuya intensidad depende de la distancia". Todavía hoy, muchos manuales de física y casi todos los escritos de divulgación científica usan el término 'fuerza' en este sentido. Por las razones señaladas en los párrafos siguientes se aconseja, empero, advertir claramente cuándo uno entiende referirse a una fuerza *newtoniana*, sujeta a la ecuación (1).

En efecto, el advenimiento de la RELATIVIDAD especial y general a principios del siglo XX no nos permite seguir empleando este concepto clásico de *fuerza* desprevenidamente y sin reservas.

Desde luego, la ecuación (1) no es invariante bajo la TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ y, por lo tanto, según la teoría especial de la relatividad, no puede enunciar una ley de la naturaleza. Conforme a esta teoría, los vectores espaciales $\mathbf{F}$ y $m\mathbf{v}$ no pueden representar realidades físicas, sino solo "sombras"

proyectadas por alguna entidad espaciotemporal en el espacio determinado por un MARCO DE REFERENCIA inercial arbitrariamente escogido. Si la ecuación (1) vale relativamente a un marco de este tipo, generalmente no vale respecto de otro obtenido mediante una transformación de Lorentz θ aplicada al anterior —típicamente el vector θ(F) apuntará en otra dirección que $\theta(d(m\mathbf{v})/dt)$. La MECÁNICA RELATIVISTA combina el momento cinético y la energía de una partícula p en un solo CUADRIVECTOR P, cuyo componente temporaloide P^0 relativo a un dado marco inercial $\mathfrak{R}$ es la energía de p en $\mathfrak{R}$ y cuyos componentes espacialoides P^1, P^2 y P^3 son los componentes del momento cinético de p en $\mathfrak{R}$. Si la fuerza externa que actúa sobre p ha de medirse, como en la física clásica, por la variación que imprime a su estado dinámico, los componentes de la fuerza, relativamente a $\mathfrak{R}$, estarán dados por

$$K^i = \frac{dP^i}{d\tau} \qquad (2)$$

donde τ es el TIEMPO PROPIO medido a lo largo de la cosmolínea de p y $0 \leq i \leq 3$. Los K^i son en efecto los componentes relativos a $\mathfrak{R}$ de un cuadrivector, la *cosmofuerza* K introducida por Minkowski (1908). Sea **u** la velocidad de p en $\mathfrak{R}$, con magnitud $|\mathbf{u}| = u$, y sea $\beta_u = 1/\sqrt{1-(u/c)^2}$. El componente temporaloide K^0 de K es igual a β_u veces la tasa de variación de la energía de p en $\mathfrak{R}$ y la parte espacialoide K de K es igual a β_u veces la tasa de variación del momento cinético de p en $\mathfrak{R}$, esto es, β_u veces la fuerza newtoniana que actúa sobre p en $\mathfrak{R}$. En particular, si $\mathfrak{R}$ es el MARCO DE REFERENCIA INERCIAL INSTANTÁNEO de p, $K^0 = 0$ y la ecuación (1) es satisfecha con K en lugar de F y u en lugar de v.

Pero además la *fuerza*, "cemento del universo" en la física newtoniana, deja de serlo cuando Einstein concibe la caída libre como movimiento inercial cuya trayectoria geodésica está determinada por la geometría del espaciotiempo. Según esta concepción, la cosmofuerza que actúa sobre una partícula libre de influencias no gravitacionales es igual a 0. En la forma final de la teoría de la gravitación de Einstein (la RELATIVIDAD general), solo las partículas sin carga eléctrica y sin spin siguen cosmolíneas estrictamente geodésicas; pero aun así parece problemático contar a la gravedad, como suele hacerse, entre las "cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza". En todo caso, las otras tres (reducidas a dos, desde que Glashow, Salam y Weinberg fundieron la débil y la electromagnética en una sola "fuerza electrodébil") no son fuerzas newtonianas, sino formas de interacción, esto es, de intercambio de cuantos de energía-momento entre fermiones.

fuerza central (A. *zentrale Kraft*, F. *force centrale*, I. *central force*). FUERZA newtoniana dirigida a un punto fijo del espacio (por ejemplo, el centro de gravedad del sistema formado por dos estrellas muy separadas de cualquier otra). Newton (1687) demuestra varios teoremas relativos a las fuerzas centrales, entre otros, que (i) todo cuerpo que se mueve bajo la acción continua de una fuerza central describe, mediante rayos proyectados hasta el centro, áreas proporcionales a los tiempos; (ii) todo cuerpo que se mueve a lo largo de una curva plana, de modo que el rayo que lo une a un punto determinado del espacio describa áreas proporcionales a los tiempos, está bajo la acción continua de una fuerza central dirigida hacia ese punto, y (iii) si un cuerpo describe una elipse impelido por una fuerza central dirigida hacia un foco de la elipse, esta fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el cuerpo y el centro al que ella apunta. La explicación del sistema solar por la ley de GRAVITACIÓN universal combina resultados matemáticos como estos con las LEYES empíricas DE KEPLER. También las leyes de atracción electrostática y magnetostática establecidas en el siglo XVIII apelan a fuerzas centrales. La explicación del movimiento de los cuerpos mediante fuerzas centrales, dependientes de la posición mas no de la velocidad de los mismos, predominó en la física hasta el triunfo de la electrodinámica de Maxwell a fines del siglo XIX y caracteriza la llamada concepción mecánica del mundo.

fuerza de Lorentz (A. *Lorentz-Kraft*, F. *force de Lorentz*, I. *Lorentz force*). En la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA, fuerza ejercida por el campo electromagnético sobre una partícula cargada. Si la partícula tiene carga eléctrica q y se mueve con velocidad **v**, y los vectores **E** y **B** representan, respectivamente, la intensidad del campo eléctrico y del campo magnético en el punto donde se halla la partícula, la *fuerza de Lorentz* **F** ejercida sobre la partícula está dada por:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Recordando la definición del PRODUCTO VECTORIAL $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, advertimos que el componente de la fuerza de Lorentz debido a la presencia de un campo magnético es perpendicular a **v** y a **B** y que su magnitud es máxima si **v** y **B** son mutuamente perpendiculares y nula si **v** y **B** son colineales.

fuerza electromotriz (A. *elektromotorische Kraft*, F. *force électromotrice*, I. *electromotive force*). La *fuerza electromotriz* de una fuente de energía eléctrica (vgr. una batería o generador) es la cantidad de energía suministrada por la fuente a una CARGA ELÉCTRICA positiva de 1 coulomb cuando esta carga

pasa del terminal de potencial menor al terminal de potencial mayor de la fuente. La fuerza electromotriz es, pues, energía por unidad de carga, y se mide, por ende, en voltios (↗POTENCIAL ELECTROSTÁTICO).

función (A. *Funktion*, *Abbildung*, F. *fonction*, *application*, I. *function*, *mapping*). La idea de función es la más característica y quizás también la más importante de la matemática moderna. Leibniz usó el término *función* en una carta a Jean Bernoulli de 1694 (también en un inédito de 1673) para significar cualquier cantidad que varía de punto en punto a lo largo de una curva (por ejemplo, la longitud de la tangente, la normal o la ordenada), en casos en que la curva misma está definida por una ecuación. Bernoulli adoptó el vocablo para designar una cantidad formada de cualquier manera combinando cantidades variables y constantes. Euler escribe en 1755: "Si unas cantidades dependen de otras de tal modo que experimentan variación cuando éstas varían, se dice que aquellas son funciones de estas". Si bien Euler habla —en otro lugar— de "funciones discontinuas" que no están determinadas por una sola ecuación, los matemáticos del siglo XVIII entienden generalmente que la dependencia funcional tiene que representarse mediante expresiones analíticas. Los hallazgos de Fourier sobre la representación de "funciones arbitrarias" mediante series infinitas marcan un hito decisivo en la generalización del concepto matemático de función. Para Fourier, "la función fx representa una secuencia de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Como la abscisa x puede tomar una infinidad de valores, hay un número correspondiente de ordenadas fx. [...] No suponemos que estas ordenadas estén sometidas a una ley común; se suceden de cualquier manera..." (1822, p. 552). En 1837, Dirichlet propuso la definición en que se inspira nuestro concepto actual: y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un y solo un valor de y; no importa que y dependa de x conforme a una o varias leyes, ni que esta dependencia pueda o no expresarse mediante operaciones matemáticas. Dirichlet y sus contemporáneos entendían que los valores en cuestión eran numéricos; pero ya Dedekind (1888) tiene claro el concepto actual de función (él dice *Abbildung*) como correspondencia entre objetos pertenecientes a un conjunto cualquiera.

En la primera mitad del siglo XX, la tradición conjuntista, empeñada en darle a los términos básicos de la matemática definiciones extensionales tan simples como se pueda, adopta la definición siguiente: una *función* es un conjunto f de PARES ORDENADOS tal que, si dos pares pertenecientes a f tienen el mismo primer elemento, también tienen el mismo segundo elemento. (En otras palabras: si $\langle a,b\rangle \in f$, $\langle a,d\rangle \in f$, entonces $b = d$.) Si el par $\langle x,y\rangle$ pertenece a la función f, escribimos $y = f(x)$ y decimos que y es el *valor* de f correspondiente al *argumento* x. El conjunto de todos los argumentos de una

función f es el *dominio* de f. El conjunto de todos sus valores es el *recorrido* de f.

Esta definición prevalece hasta hoy en las obras de lógica y teoría de los conjuntos y se repite a veces en manuales de cálculo y otras disciplinas matemáticas. Sin embargo, en la práctica diaria de estas disciplinas una función f se introduce normalmente indicando no solamente (i) el conjunto de sus argumentos o dominio en que está definida y (ii) los valores que corresponden a cada argumento; sino también (iii) un conjunto, que llamaremos *codominio*, del cual se toman los valores. El codominio incluye el recorrido de la función, pero no siempre coincide con él.

La definición conjuntista satisface las necesidades de la lógica y teoría de conjuntos y del análisis matemático elemental, pero resulta inadecuada cuando se estudian operaciones sobre conjuntos de funciones, como ocurre en la topología algebraica. En este terreno es indispensable incluir el codominio de cada función entre los criterios de que depende su identidad. Desde el punto de vista conjuntista, esto equivale a definir la función $f : A \rightarrow B$, $x \mapsto f(x)$ como el triplo

$$\langle A,B,\{\langle x,y\rangle : x \in A,\ y \in B,\ y = f(x) \text{ para algún } x \in B\}\rangle \qquad (1)$$

Quienes, como Mac Lane (1971) y Godement (1973), han optado por definir el término *función* de este modo llaman *grafo de la función* al tercer elemento del triplo (1), esto es, al conjunto $\{\langle x,y\rangle : x \in A,\ y \in B,\ y = f(x)$ para algún $x \in B\}$; en otras palabras, el grafo de la función es precisamente lo que los conjuntistas llamaron *función*.

La terminología y el simbolismo presentados a continuación son utilizados por los usuarios de ambas definiciones de *función*.

Sean A y B dos CONJUNTOS, posiblemente idénticos. La *función* $f : A \rightarrow B$; $x \mapsto f(x)$ asigna a cada elemento x de A un y solo un elemento $f(x)$ de B. A es el *dominio* y B es el *codominio* de la función. Se dice que f *aplica A en B*. Si f asigna el elemento $b \in B$ al elemento $a \in A$, se dice que $b = f(a)$ es el *valor* de f para el *argumento a*. El conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ es el *recorrido* de f. Si $\{f(x) : x \in A\} = B$, se dice que f aplica A *sobre* B.

Si U es una parte del dominio de f ($U \subseteq A$), entonces el conjunto $\{f(x) : x \in U\}$ se llama la *imagen* de U por f, y se designa con $f[U]$. Obsérvese que, según esto, el recorrido de f es la imagen por f de su dominio A y se designa con $f[A]$. Si W es una parte del codominio de f ($W \subseteq B$), entonces el conjunto $\{x : f(x) \in W\}$ se llama la *preimagen* de W por f, y se designa con $f^{-1}[W]$.

Si U es una parte del dominio de f ($U \subseteq A$), entonces la función $g : U \rightarrow B$, definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in U$, se llama la *restricción* de f a U, y

se designa con $f \upharpoonright U$. Este distingo entre una función y sus restricciones se pasa normalmente por alto, salvo en aquellos casos especiales en que resulta significativo. En particular, la imagen de U por $f \upharpoonright U$ no se designa corrientemente con $f|U[U]$, sino con $f[U]$.

Si $f : A \to B$ asigna cada elemento de su recorrido a un solo elemento del dominio —esto es, si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$—, se dice que f *inyecta* A en B y que f es una *inyección* o una *función inyectiva*. Si $f : A \to B$ es inyectiva, hay una función $g : f(A) \to A$, cuyo dominio es el recorrido de f y cuyo recorrido es el dominio de f, la cual asigna a cada valor de f el correspondiente argumento. Esta función g se llama la función *inversa* de f y se designa con f^{-1}. Si f inyecta A sobre B se dice que f es una *biyección* o una *función biyectiva*. En tal caso, obviamente, la inversa f^{-1} inyecta B sobre A. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos funciones, la FUNCIÓN COMPUESTA $g \circ f$: $A \to C$ asigna a cada elemento $a \in A$ el valor de g en $f(a)$.

En vez de *función* se dice a veces *aplicación*, bajo influencia del francés.

función analítica (A. *analytische Funktion*, F. *fonction analytique*, I. *analytic function*). Una función f definida en una región $\mathfrak{D}$ del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$ se dice *analítica en un punto* $p \in \mathfrak{D}$ si es una FUNCIÓN LISA (de clase $\mathscr{C}^\infty$) en un entorno de p; esto es, si f tiene derivadas de todo orden en cualquier punto de ese entorno. f es *analítica* si es analítica en todos los puntos de su dominio.

Originalmente, la expresión *función analítica* se aplicaba a funciones reales. En esta acepción, poco corriente hoy, una función f con argumentos y valores en $\mathbb{R}$ es analítica en un punto x_0 de su dominio si f puede expandirse como una serie de potencias en un entorno de x_0; esto es, si, para cada punto x de ese entorno $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ (con $c_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$). f es analítica si es analítica en cada punto de su dominio. Esta definición se extendió naturalmente a las funciones complejas. Luego se demostró que una función de esta clase puede expandirse en una serie de potencias en torno a un punto de su dominio si y solo si es analítica en ese punto, en la acepción explicada en el primer párrafo.

función característica (A. *charakteristische Funktion*, F. *fonction caractéristique*, I. *characteristic function*). La *función característica* de un conjunto $K \subseteq U$, respecto a U, es la función $\chi_K : U \to \{0,1\}$ tal que $\chi_K(x) = 1$ si $x \in K$ y $\chi_K(x) = 0$ si $x \notin K$. (Algunos autores intercambian los valores 1 y 0 en su definición de la función característica.) La *función característica* del predicado P en la INTERPRETACIÓN $\mathfrak{I}$ es la función característica de la extensión de P (esto es, del conjunto $\{x : Px\}$), respecto al universo a que se refiere $\mathfrak{I}$.

función compuesta (A. *zusammengesetzte Funktion oder Abbildung*, F. *fonction ou application composée*, I. *composite function or mapping*). Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, FUNCIONES tales que el codominio de f es el dominio de g. La *función compuesta* de f por g asigna a cada $a \in A$ el valor de g en $f(a)$; se la designa con la expresión $g \circ f$. Si el dominio de g y el codominio de f no son idénticos, pero su intersección U no está vacía, la expresión $g \circ f$ designa la función compuesta de la restricción de f a $f^{-1}(U)$ por la restricción de g a U. Una notación más estricta designaría esta función compuesta con la expresión $g{\restriction}U \circ f{\restriction}f^{-1}(U)$. Si $U = \varnothing$, la expresión $g \circ f$ no está definida.

función continua (A. *stetige Funktion oder Abbildung*, F. *fonction ou application continue*, I. *continuous function or mapping*). Sean $\langle S_1,T_1\rangle$ y $\langle S_2,T_2\rangle$ ESPACIOS TOPOLÓGICOS. La FUNCIÓN $f : S_1 \rightarrow S_2$ es continua en el punto $p \in S_1$ si y solo si cada entorno abierto de $f(p)$ es la imagen por f de un entorno abierto de p. f es continua si y solo si es continua en cada punto de S_1. Esta condición equivale a la siguiente: f es continua si y solo si cada abierto de la topología T_2 es la imagen por f de un abierto de la topología T_1.

función diferenciable (A. *differenzierbare Funktion oder Abbildung*, F. *fonction ou application différentiable*, I. *differentiable function or mapping*). ↗DERIVADA.

función lineal (A. *lineare Funktion oder Abbildung*, F. *fonction ou application linéaire*, I. *linear function or mapping*). Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son ESPACIOS VECTORIALES (posiblemente idénticos) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, la función $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ se dice *lineal* si cumple la condición siguiente: para cualesquiera vectores a, b $\in \mathcal{V}$ y cualesquiera escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha\mathrm{a} + \beta\mathrm{b}) = \alpha f(\mathrm{a}) + \beta f(\mathrm{b})$$

(Adviértase que en esta ecuación el símbolo + representa la suma de vectores en $\mathcal{V}$ al lado izquierdo y la suma de vectores en $\mathcal{W}$ al lado derecho.) En particular, si $\mathcal{W} = \mathbb{K}$ —considerado como un espacio vectorial unidimensional sobre sí mismo—, se dice que f es una *función lineal* sobre $\mathcal{V}$.

Sea $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ el conjunto de todas las funciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$. Sea v un vector cualquiera en $\mathcal{V}$. La *suma* de dos funciones $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ es la función $(f+g)$ definida por:

$$(f+g)(\mathrm{v}) = f(\mathrm{v}) + g(\mathrm{v}).$$

El *producto* de $f \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ por el escalar a es la función (af) definida por:

$$(af)(\mathbf{v}) = af(\mathbf{v})$$

Sea $\mathbf{0}$ la función que asigna a todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ el vector cero en $\mathcal{W}$. Es claro que $(f+g)$, (af) y $\mathbf{0}$ son funciones lineales. Por lo tanto, $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

El concepto de función lineal se extiende, tal cual, a los MÓDULOS sobre un anillo.

función lisa (A. *glatte Funktion oder Abbildung*, F. *fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$, I. *smooth function or mapping*). Una FUNCIÓN DIFERENCIABLE f cuyo dominio es un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y cuyo recorrido es un abierto de $\mathbb{R}^m$ (para cualesquiera enteros positivos n y m) se dice *lisa en un punto* $p \in U$ si f está definida en p y, para cada entero positivo r y cada índice k ($1 \leq k \leq n$), la DERIVADA PARCIAL de r-ésimo orden $\partial^r f(x)/\partial x_k^r$ existe y es continua en p. f es *lisa* si y solo si es lisa en todos los puntos de su dominio. Si la condición enunciada vale solo si $r \leq q$ (donde q es un entero positivo), se dice que f es una función de clase $\mathcal{C}^q$. Nótese que, si q' es un entero positivo menor que q, toda función de clase $\mathcal{C}^q$ es una función de clase $\mathcal{C}^{q'}$. Algunos autores llaman *lisas* a las funciones de clase $\mathcal{C}^1$ y *funciones de clase* $\mathcal{C}^\infty$ a las que aquí llamamos lisas. Las FUNCIONES CONTINUAS suelen llamarse *funciones de clase* $\mathcal{C}^0$.

Estos conceptos se extienden a las funciones con argumentos y valores complejos, reemplazando $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$ en la explicación precedente. Una generalización más amplia se explica bajo VARIEDAD DIFERENCIABLE.

función multilineal (A. *multilineare Funktion oder Abbildung*, F. *fonction ou application multinéaire*, I. *multilinear function or mapping*). Si $\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_n$ y $\mathcal{W}$ son ESPACIOS VECTORIALES (posiblemente idénticos) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, la función $f: \mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{W}$ se dice *n-lineal* si cumple la condición siguiente: para cualesquiera vectores $\mathbf{a}_k \in \mathcal{V}_k$, $\mathbf{b}_r \in \mathcal{V}_r$ ($k = 1, 2,\ldots, n$; $1 \leq r \leq n$) y cualesquiera escalares α, $\beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r-1},\alpha\mathbf{a}_r + \beta\mathbf{b}_r,\mathbf{a}_{r+1},\ldots,\mathbf{a}_n) \\ &\quad = \alpha f(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r-1},\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_{r+1},\ldots,\mathbf{a}_n) + \beta f(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r-1},\mathbf{b}_r,\mathbf{a}_{r+1},\ldots,\mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

Esta condición se suele expresar diciendo que f es "lineal en cada argumento" (↗FUNCIÓN LINEAL).

El concepto de función multilineal se extiende, tal cual, a los MÓDULOS sobre un anillo.

función recursiva (A. *rekursive Funktion*, F. *fonction récursive*, I. *recursive function*). La noción exacta de función recursiva precisa la noción intuitiva de función computable. La denominación de 'recursiva' alude al procedimiento de computar el valor de una función para un número recurriendo a sus valores para los números menores que él. La definición exacta de función recursiva requiere diversas definiciones previas.

Las funciones numéricas (es decir, las funciones de números naturales o n-tuplos de números naturales en números naturales, $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, para $n \geq 1$) más elementales son las funciones recursivas primitivas, entre las que se encuentran las funciones aritméticas familiares desde la escuela, como la adición, la multiplicación, la exponenciación o el factorial. Llamamos funciones recursivas primitivas *iniciales* a la función ceroaria constante 0, a la función unaria del siguiente $S(x) = x+1$ y a las funciones n-arias de identificación del i-ésimo miembro de una secuencia de n números $I^n_i(x_1 \ldots x_n) = x_i$.

Sea g una función r-aria ($r \geq 1$) y sean $h_1 \ldots h_r$ funciones n-arias ($n \geq 0$). Decimos que la función n-aria f está *definida por sustitución* con ayuda de $g, h_1, \ldots, h_r$ si y solo si para cualesquiera números naturales $x_1, \ldots, x_n$ ocurre que:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_r(x_1,\ldots,x_n))$$

Sea g una función n-aria ($n \geq 0$) y sea h una función n+2-aria. Decimos que la función n+1-aria f está *definida por inducción* con ayuda de g y h si y solo si para cualesquiera números naturales $y, x_1, \ldots, x_n$ ocurre que:

$$f(x_1,\ldots,x_n,0) = g(x_1,\ldots,x_n)$$

$$f(x_1,\ldots,x_n,S(y)) = h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n))$$

Las *funciones recursivas primitivas* son las funciones numéricas obtenibles a partir de las funciones recursivas primitivas iniciales mediante un número finito de aplicaciones de los procesos de definición por sustitución y de definición por inducción.

Aunque todas las funciones recursivas primitivas son computables, no todas las funciones computables son recursivas primitivas. Por ejemplo, la siguiente función f, definida por Ackermann (1928), es computable en sentido intuitivo (y Turing-computable), pero no recursiva primitiva (recuérdese que S es la función del siguiente):

$$f(0,y) = S(y)$$

$$f(S(x),0) = f(x,1)$$

$$f(S(x),S(y)) = f(x,f(S(x),y))$$

El operador μ (*el mínimo ... tal que*) nos permite referirnos al mínimo número x que satisface la condición Φ, $\mu x\Phi(x)$. Si hay algún número que satisface Φ, y para cada número natural x es decidible si $\Phi(x)$ o no, entonces $\mu x\Phi(x)$ es computable. Decimos que una función n-aria h es definible por minimalización a partir de una función $(n+1)$-aria f en caso normal si y solo si para cada $x_1,..., x_n$ existe al menos un w tal que $f(x_1,...,x_n,w) = 0$, y ocurre que para cada $x_1,..., x_n$:

$$h(x_1,...,x_n) = \mu w[f(x_1,...,x_n,w) = 0]$$

Una *función recursiva* es una función definible a partir de las funciones recursivas primitivas iniciales mediante un número finito de aplicaciones sucesivas de los procesos de definición por sustitución, por inducción y por minimalización en caso normal. La función de Ackermann es recursiva. De hecho toda función computable conocida es recursiva.

Las funciones recursivas primitivas, aunque ya previamente usadas por Dedekind, Peano, Skolem, Hilbert y Ackermann, fueron caracterizadas de un modo exacto por primera vez por Gödel (1931). Las funciones recursivas fueron introducidas por Gödel (1934) —como 'recursivas generales'— y definidas del modo aquí indicado por Kleene en 1936. Desde entonces se ha probado que una función es recursiva si y solo es Turing-computable (computable por una máquina de Turing) si y solo si es λ-definible si y solo es Post-calculable, etc. Todo ello conduce a pensar que la noción de función recursiva capta bien la idea intuitiva de función computable (TESIS DE CHURCH). Lo mismo puede decirse de las otras nociones dependientes de ella, como la de conjunto decidible o la de conjunto recursivamente enumerable.

función veritativa (A. *Wahrheitsfunktion*, F. *fonction de vérité*, I. *truth function*). Los valores veritativos (la verdad y la falsedad) pueden representarse mediante dos signos distintos cualesquiera, por ejemplo V y F, o ⊤ y ⊥, o, como haremos aquí, 1 y 0. Una función veritativa n-aria $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ es una función que asigna valores veritativos (0 o 1) a n-tuplos de valores veritativos. Hay $|\{0,1\}^n| = 2^n$ n-tuplos de valores veritativos. Y, puesto que a cada elemento de $\{0,1\}^n$ se le puede asignar el valor 0 o el valor 1, hay dos maneras distintas de asignar valores veritativos a cada uno de esos 2^n n-tuplos. Por tanto, para cada número natural n hay 2^{2^n} funciones veritativas n-arias. En concreto, hay dos funciones veritativas 0-arias, 0 y 1. Hay cuatro funciones veritativas unarias, entre

las cuales se encuentra la NEGACIÓN, que en lógica se representa mediante el signo ¬. Las otras tres son la función constante 0 (que asigna el 0 tanto al 0 como al 1), la función constante 1 y la función idéntica que asigna el 0 al 0 y el 1 al 1. Hay 16 funciones veritativas binarias, entre las que se encuentran la CONJUNCIÓN, la DISYUNCIÓN, el CONDICIONAL y el BICONDICIONAL, que en lógica se representan mediante los signos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Otra función binaria corresponde al conector binario | (ni, ni) de negación conjunta, introducido por Sheffer en 1913: (0|0) = 1; (0|1) = (1|0) = (1|1) = 0. Otras funciones no se representan mediante conectores específicos, como la que asigna el cero a todas las combinaciones de ceros y unos. El número de funciones veritativas *n*-arias crece exponencialmente con *n*. Hay 256 funciones veritativas 3-arias, 65.536 funciones 4-arias, 4.294.967.296 funciones 5-arias, etc. Esta multitud de funciones *n*-arias no se representan mediante conectores específicos, y tampoco hace falta, pues siempre pueden representarse mediante al menos una fórmula de la lógica proposicional con *n* letras proposicionales distintas. En efecto, puede probarse el siguiente teorema: para cada función veritativa *n*-aria φ hay al menos una fórmula Φ de la LÓGICA PROPOSICIONAL, con *n* letras proposicionales distintas $p_1, \ldots, p_n$, tal que, para cada asignación veritativa *w*, la correspondiente interpretación veritativa de Φ, $\mathfrak{I}_w(\Phi)$, es precisamente igual a $\varphi(W(p_1), \ldots, W(p_n))$.

functor (A. *Funktor*, F. *foncteur*, I. *functor*).

a. Los lenguajes formales de la lógica con identidad incluyen símbolos llamados *functores*, que se utilizan para representar funciones. Típicamente, si f es un functor *n*-ario del lenguaje $\mathcal{L}$, y $a_1, \ldots, a_n$, b son constantes individuales de $\mathcal{L}$, la sentencia $fa_1 \ldots a_n = b$ es verdadera en una interpretación $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{L}$ si y solo si $\mathfrak{I}(b)$ es el valor asignado por la función $\mathfrak{I}(f)$ al *n*-tuplo $\langle \mathfrak{I}(a_1), \ldots, \mathfrak{I}(a_n) \rangle$. En la práctica matemática es usual escribir un functor binario en medio de los dos términos a los que se aplica y no al principio: no solemos escribir $+xy$, sino $(x+y)$. Otras veces los functores se escriben delante o detrás: $\log x$, x^3.

b. En la teoría matemática de CATEGORÍAS, un *functor* de una categoría $\mathscr{A}$ a una categoría $\mathscr{B}$ es una correspondencia que asigna a cada objeto X de $\mathscr{A}$ un objeto ΦX de $\mathscr{B}$ y a cada función $f : X \to Y$ de $\mathscr{A}$ una función $\Phi f : \Phi X \to \Phi Y$ de $\mathscr{B}$, de tal modo que $\Phi 1_X = 1_{\Phi X}$ y que $\Phi(f \circ g) = \Phi f \circ \Phi g$ en todos los casos en que la función compuesta $f \circ g$ esté definida. Para un ejemplo de functor en este sentido, ↗GRUPO FUNDAMENTAL.

G

gas ideal (A. *ideales Gas*, F. *gaz idéal*, I. *ideal gas*). Gas que obedece exactamente la LEY DE BOYLE y cuya energía interna no depende del volumen que ocupa. Estas dos condiciones se cumplen si y solo si las moléculas del gas tienen un volumen insignificante y la atracción entre las moléculas también es desdeñable. Ningún gas existente en la naturaleza llena estos requisitos; pero el gas ideal es un modelo satisfactorio de los gases reales a temperaturas y presiones corrientes. (↗ECUACIÓN DE ESTADO).

gato de Schrödinger (A. *Schrödinger-Katze*, F. *chat de Schrödinger*, I. *Schrödinger's cat*). Víctima de un EXPERIMENTO MENTAL, ideado por Schrödinger (1935) para ilustrar una dificultad de la MECÁNICA CUÁNTICA. El experimento está diseñado de modo que la muerte o supervivencia de un gato encerrado en una caja dependa de que se produzca o no un fenómeno cuántico Φ de ocurrencia incierta, por ejemplo la desintegración, registrada en un contador de Geiger, de un número determinado de átomos de un elemento radiactivo. Según Schrödinger, para la mecánica cuántica, el sistema físico S formado por el gato y este artefacto diabólico tiene que representarse —una vez consumado el proceso y mientras no se abra la caja para ver lo que contiene— mediante una suma vectorial de la forma $\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle$; donde $|\psi_1\rangle$ es un estado de S en que el gato está muerto, $|\psi_2\rangle$ es un estado de S en que el gato está vivo y las probabilidades de que el fenómeno Φ ocurra o no son, respectivamente, iguales a $|\alpha_1|^2$ y $|\alpha_2|^2$ (↗PROBLEMA CUÁNTICO DE LA MEDICIÓN).

gauge (pronunciación: geɪdʒ). Vocablo inglés que significa primariamente un estándar o escala de medida, una medida a que una cosa debe ajustarse (vgr. el calibre de una bala o el espesor de una placa de metal). Su empleo en la física actual no tiene prácticamente nada que ver con esto y puede explicarse como sigue. Weyl (1918) propuso una teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo en que (*a*) la métrica del espaciotiempo depende de un campo tensorial g_{ik} de tipo (0,2) —como en la relatividad general— y tam-

bién de una forma diferencial lineal φ^i y (*b*) impera lo que Weyl (1920) describe como "invariancia *gauge*" (A. *Eichinvarianz*): las leyes de la teoría se conservan inalteradas bajo cualquier transformación del tipo siguiente:

$$g_{ik} \mapsto \tau g_{ik} \qquad \varphi^i \mapsto \varphi^i - \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^i} \tag{1}$$

donde τ es un campo escalar positivo cualquiera sobre el espaciotiempo. La teoría de Weyl no halló aceptación, entre otras razones porque —como notó Einstein— no era compatible con la estabilidad de las LÍNEAS ESPECTRALES. Años más tarde, discutiendo el comportamiento de una partícula cuántica con función de onda ψ y carga $-e$ en un campo electromagnético con potencial electrostático $\varphi = \varphi_0$ y potencial vectorial $A = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$, Fock (1926) señaló que las ecuaciones de campo aplicables en este caso tienen que ser invariantes bajo la sustitución simultánea de

$$\psi \text{ por } e^{i\lambda}\psi \text{ y } \varphi_i \text{ por } \varphi_i \frac{h}{-e}\frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \tag{2}$$

donde λ es una función arbitraria de las coordenadas espaciotemporales y $\psi \mapsto e^{i\lambda}\psi$ es, por cierto, un cambio de fase, no del modo de medir. A propósito de esto, Weyl (1931, p. 100) comenta: "este 'principio de invariancia *gauge*' es bastante similar al postulado anteriormente por el autor [...] para llegar a una teoría unificada de la gravitación y la electricidad". Este pasaje de Weyl inspira el uso actual de la palabra *gauge* en la física. Se aplica el epíteto *gauge* a cualquier grupo de transformaciones cuya acción sobre los objetos geométricos que representan la realidad física en cada punto del espaciotiempo varíe de punto en punto —como en el caso (2)— aunque —a diferencia del caso (1)— no tenga nada que ver con la métrica y las escalas de medida. Asimismo, se llama *simetría gauge* a la invariancia bajo tales transformaciones; *teorías gauge* a las que exhiben simetrías de esta clase; *campo gauge* a uno cuya existencia se requiere para que la teoría *gauge* posea la simetría *gauge*; *bosones gauge* a las partículas de spin integral creadas o aniquiladas por la acción de operadores de creación y aniquilación sobre un campo *gauge* (↗TEORÍAS CUÁNTICAS DE CAMPOS).

gen (A. *Gen*, F. *gène*, I. *gene*). El gen es la unidad de información genética. Hay varias maneras no equivalentes de precisar la noción de gen. Según la definición habitual en biología molecular, un *gen* es el fragmento completo de DNA necesario para producir una PROTEÍNA. Este fragmento de DNA que es el gen contiene tanto zonas codificantes o exones como zonas no codifi-

cantes o intrones y otras reguladoras. El primer paso para producir una proteína a partir de un gen consiste en copiar en una secuencia continua de RNA mensajero las zonas codificantes dispersas del gen. Luego se transporta esa copia de RNA hasta un ribosoma, donde se ensambla la proteína. La secuencia de bases del RNA mensajero determina la secuencia de aminoácidos de la proteína ensamblada, que a su vez induce el pliegue y estructura tridimensional de la proteína, lo que determina su función. A través de la producción de las proteínas adecuadas en las circunstancias oportunas, los genes determinan y controlan lo que somos y hacemos los seres vivos.

genoma (A. *Genom*, F. *génome*, I. *genome*). La totalidad del DNA contenido en los cromosomas de un organismo, incluyendo en especial todos los GENES del organismo. El genoma B, el mismo en todas las células de un organismo multicelular B, dice a cada una de ellas lo que tiene que hacer y cómo hacerlo. Es el director de la orquesta celular. La célula sabe cómo leer los genes, pero nosotros hasta hace muy poco no lo sabíamos, aunque recientemente lo estamos aprendiendo. Cada codón o triplete de NUCLEÓTIDOS codifica un AMINOÁCIDO. El gen entero, una PROTEÍNA. El genoma es la biblioteca de la célula. Cada vez que la célula tiene que hacer algo, consulta la biblioteca y copia (en RNA mensajero) el libro o capítulo que le interesa, poniendo luego en práctica sus instrucciones mediante el ensamblaje de las correspondientes proteínas en los ribosomas. En efecto, las instrucciones genéticas conciernen directamente sólo a la fabricación de proteínas. Pero estas proteínas pueden ser muy distintas (enzimas, hormonas, anticuerpos, etc.) y producir todo tipo de efectos, desde uñas hasta enfados, pasando por enfermedades y curaciones.

En 1953 Watson y Crick empezaron a descifrar las claves del código genético. Desde entonces hemos ido desentrañando su gramática y aprendiendo a leer los genes. En 1988 ya se había avanzado lo suficiente como para que Watson lanzara la idea de secuenciar el genoma humano entero, es decir, deletrear o secuenciar los 3.200 millones de bases del genoma humano y localizar en los cromosomas todos los genes humanos, tarea que se llevó a cabo entre 1990 y 2001. Actualmente la genómica o estudio de los genomas de las diversas especies consituye una de las áreas más activas de la investigación científica. El primer animal al que cupo el honor de tener su genoma secuenciado fue el nematodo *Caenorhabditis elegans*, un minúsculo gusanito transparente. De todos modos, aunque ya hemos secuenciado nuestro genoma y hemos deletreado el libro genético, seguimos sin entender lo que dice. Por ahora, sólo se sabe cuál es la función de unos pocos genes. Averiguar el significado de todos ellos dará trabajo a los científicos durante todo el siglo XXI. Mucho queda aún por hacer: concluir la identificación de los genes, determi-

nar sus funciones, averiguar las condiciones en que se activan o desactivan y estudiar sus efectos conjuntos, incluida la producción poligénica de caracteres y conductas complejas. Sabremos qué genes se activan y desactivan cuando nos enfadamos o aprendemos, cuando nos quedamos calvos o nos salen arrugas, cuando crecen los dedos de los bebés o cicatrizan las heridas.

geodésica (A. *geodätische Linie*, F. *geodésique*, I. *geodesic*). Esta palabra, derivada de raíces griegas que significan 'Tierra' y 'dividir', se usó inicialmente para designar la línea que marca sobre la superficie terrestre un plano que divide la Tierra en dos partes iguales. Bajo el supuesto de que la Tierra es un elipsoide de revolución, una geodésica, así definida, une sus puntos con arcos de longitud mínima. Esto quiere decir que, si p y q son dos puntos de la Tierra unidos por una geodésica γ, el camino que γ recorre entre p y q es más corto que cualquier otra línea vecina trazada sobre la superficie de la Tierra, entre p y q.

El término *geodésica* se aplicó luego a las curvas más cortas sobre cualquier superficie inmersa en el espacio ordinario. Cuando Riemann extendió a variedades n-dimensionales los métodos ideados por Gauss para el estudio de las superficies, pasaron a llamarse *geodésicas* las curvas de longitud extrema (esto es, *mínima* o *máxima*) en una VARIEDAD RIEMANNIANA. En esta acepción tradicional de la palabra, una curva γ en la variedad riemanniana $\langle \mathcal{M},g\rangle$ es una *geodésica* si y solo si $\delta\int_\gamma ds = 0$, donde ds representa el ELEMENTO DE LÍNEA de $\langle \mathcal{M},g\rangle$ y la integral se toma sobre el recorrido de γ (↗CÁLCULO DE VARIACIONES).

Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de $\langle \mathcal{M},g\rangle$, esto es, la única CONEXIÓN LINEAL (sin torsión) sobre $\mathcal{M}$ tal que $\nabla g = 0$. Si γ es una geodésica de $\langle \mathcal{M},g\rangle$ en el sentido tradicional que acabamos de explicar, entonces cualquier campo vectorial $\dot\gamma$, que asigne a cada punto p en el recorrido de γ el vector $\dot\gamma_p$ tangente a γ en ese punto, es paralelo a lo largo de γ. Por otra parte, cualquier curva en $\mathcal{M}$ que cumple esta condición con respecto a ∇ es una geodésica en el sentido tradicional. Según esto, una geodésica de una variedad riemanniana se caracteriza no solo por su propiedad métrica (longitud mínima o máxima), sino porque avanza siempre en una misma dirección, a lo largo de todo su recorrido. Este descubrimiento, debido a Levi-Civita, permite extender el concepto de geodésica a cualquier variedad diferenciable $\mathcal{M}$ provista de una conexión lineal ∇. Una curva γ en $\mathcal{M}$ es una *geodésica* de $\langle \mathcal{M},\nabla\rangle$ si y solo si un campo vectorial $\dot\gamma$ como el arriba descrito satisface la condición $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ sobre el recorrido de γ. Esta es la acepción moderna de *geodésica*, usada en este diccionario cuando no se advierte otra cosa.

geodésicamente incompleto (A. *geodätisch unvollständig*, F. *géodésiquement inachevé*, I. *geodesically incomplete*). Una VARIEDAD DIFERENCIABLE $\mathcal{M}$ es *geo-*

désicamente incompleta si hay al menos una geodésica $\gamma : \mathrm{I} \to \mathcal{M}$ tal que (i) $\mathrm{I} \neq \mathbb{R}$ y (ii) no hay una geodésica $\theta : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ tal que γ sea la restricción de θ a I. La condición (ii) suele expresarse diciendo que γ no es *extendible* a una geodésica θ con dominio $\mathbb{R}$.

En cosmología interesa especialmente el concepto de variedad diferenciable *incompleta con respecto a cierta clase de geodésicas*. Por ejemplo, en los modelos cosmológicos dotados de una MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER típicamente hay geodésicas temporaloides, parametrizadas por el tiempo propio, cuyo dominio es finito y no pueden extenderse a geodésicas del mismo tipo con dominio $\mathbb{R}$. Tales geodésicas son cosmolíneas de partículas materiales cuya duración está acotada por los límites del respectivo dominio (↗EDAD DEL UNIVERSO). Asimismo, la cosmolínea de una partícula de prueba que cae libremente hacia un AGUJERO NEGRO rodeado por un CAMPO DE SCHWARZSCHILD es una geodésica inextendible definida en un intervalo finito igual al tiempo que la partícula tarda en naufragar en la singularidad que hay al centro del agujero negro.

geometría no euclídea (A. *nichteuklidische Geometrie*, F. *géométrie non-euclidienne*, I. *non-Euclidean geometry*). Si 'geometría euclídea' es la teoría geométrica en que valen todos los teoremas contenidos en los *Elementos* de Euclides, es razonable llamar 'geometría no euclídea' a cualquier teoría geométrica en que uno o más de esos teoremas sea falso. En la literatura, sin embargo, esta expresión se usa, por regla general, para referirse a las geometrías no euclídeas "clásicas", basadas en la negación del POSTULADO DE EUCLIDES. En ellas valen todas las proposiciones contenidas en los *Elementos* que no dependen de dicho postulado; en particular, el POSTULADO DE ARQUÍMEDES. Sea *ABCD* un cuadrilátero con ángulos rectos en los vértices *A*, *B* y *C*. Bajo el postulado de Arquímedes, el ángulo en el vértice *D* es recto si y solo si vale el postulado de Euclides. Si se niega el postulado de Euclides, entonces, bajo el de Arquímedes cabe una y solo una de las dos alternativas siguientes: o bien todo cuadrilátero con tres ángulos rectos tiene un cuarto ángulo agudo, o bien todo cuadrilátero con tres ángulos rectos tiene un cuarto ángulo obtuso. La hipótesis del ángulo agudo caracteriza la geometría hiperbólica descubierta independientemente por Gauss, Lobachevsky y Bolyai en el primer tercio del siglo XIX; la hipótesis del ángulo obtuso se cumple en la geometría esférica, familiar a los astrónomos de la antigüedad, y también en la geometría elíptica descubierta por Felix Klein.

geometrodinámica (A. *Geometrodynamik*, F. *géométrodynamique*, I. *geometrodynamics*). Término acuñado por Wheeler para referirse a la unión de geometría y dinámica característica de la teoría general de la RELATIVIDAD. Suc-

le usarse en sentido estricto para referirse al programa científico propuesto por Wheeler hacia 1960 con escaso éxito; pero también se emplea en sentido amplio para describir cualquier *teoría física* en que la distribución de la materia y la radiación determina la geometría del espaciotiempo y esta, a su vez, influye sobre los movimientos de la materia y la radiación.

gluón (A. *Gluon*, F. *gluon*, I. *gluon*). Bosón *gauge* que transmite la interacción nuclear fuerte. Los gluones son partículas elementales estables con masa 0, carga eléctrica 0 y spin 1. El intercambio de gluones mantiene los quarks unidos en los bariones y mesones (como si los gluones fuesen pegamento, en inglés *glue*; de ahí su nombre). Los gluones desempeñan en la interacción nuclear fuerte una función similar a los fotones en la electromagnética. Pero, mientras que los fotones carecen de carga eléctrica, los gluones poseen carga cromática o "color", como los quarks. Precisamente las combinaciones posibles de color y anticolor dan lugar a los ocho tipos distintos de gluones.

gödelización (A. *Gödelisierung*, F. *codage numérique de Gödel*, I. *Gödel numbering*). Como los números son más fáciles de manejar que las fórmulas o las ideas, en ciertas investigaciones conviene traducir nuestras preguntas acerca de las proposiciones (por ejemplo, si son verdaderas o si se siguen unas de otras) a preguntas acerca de los números y sus relaciones, susceptibles de recibir respuesta mediante el cálculo. La primera codificación numérica de textos o hileras (secuencias finitas) de signos fue introducida por Gödel en 1931. Puestos a buscar algún precedente histórico, quizá se pueda encontrar en la idea leibniziana de asignar números primos a los conceptos simples y el producto de los números de sus componentes simples a los conceptos compuestos. Gödel siempre fue un admirador de Leibniz, a quien leyó asiduamente en sus años de estudiante y en varias etapas posteriores de su vida.

En general, un alfabeto es un conjunto finito de signos. Una palabra (o hilera) sobre ese alfabeto es una secuencia finita de signos de ese alfabeto (donde el mismo signo puede aparecer varias veces en la secuencia, en posiciones diferentes). Llamemos W al conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto dado. Una *gödelización* del lenguaje W es cualquier función $g : W \rightarrow \mathbb{N}$ que asigna números (llamados de Gödel) a las hileras de signos de W y cumple las siguientes condiciones:

(1) La función g es inyectiva, es decir, a diferentes hileras se les asignan números de Gödel diferentes: $w_1 \neq w_2 \Rightarrow g(w_1) \neq g(w_2)$.

(2) La función g es computable, es decir, para cualquier hilera dada w es posible computar efectivamente su número de Gödel, $g(w)$.

(3) El recorrido $g[W]$ es decidible, es decir, para cualquier número natural dado n se puede decidir efectivamente si n es un número de Gödel o no.

(4) La función inversa g^{-1} es computable, es decir, para cada número de Gödel dado $n \in g[W]$ es posible computar efectivamente la hilera w cuyo número de Gödel es n (es decir, la hilera w tal que $g(w) = n$). Bajo una gödelización determinada, cada hilera de signos representa un número y cada número de Gödel codifica una hilera.

Gödel introdujo en 1931 una codificación numérica de una versión modificada del lenguaje formal de *Principia Mathematica.* La idea general era la siguiente: sea A el alfabeto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n\}$. En primer lugar introducimos una asignación de los n primeros números impares consecutivos a los signos de A : $a_1 \mapsto 1$, $a_2 \mapsto 3$, $a_3 \mapsto 5$, $a_4 \mapsto 7$, etc., hasta $a_n \mapsto 2n-1$. Llamemos φ a esa aplicación de A en $\mathbb{N}$. Para cada signo a_i : $\varphi(a_i) = 2i-1$. Una vez definida $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$, podemos definir la gödelización $g : W \rightarrow \mathbb{N}$ del siguiente modo. Para cada hilera, es decir, para cada secuencia finita z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_m$ de signos de A : $g(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m) = p_1^{\varphi(z_1)} \cdot p_2^{\varphi(z_2)} \cdot p_3^{\varphi(z_3)} \cdot \ldots \cdot p_m^{\varphi(z_m)}$, donde p_i es el i-ésimo número primo. Obviamente, g satisface las condiciones para una gödelización, incluida la tercera. La descomposición unívoca de cualquier número natural en factores primos nos permite decidir si un número natural dado es un número de Gödel o no. Por ejemplo, $1992 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 83^1$ no es un número de Gödel, porque el tercer factor primo de su descomposición no es el tercer número primo, 5, sino 83. Por el contrario, $2\,700\,000 = 32 \cdot 27 \cdot 3125 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ es un número de Gödel, a saber, $g(a_3, a_2, a_3)$. El alfabeto $\{x, ', \neg, \wedge, \vee, \exists, \forall, =\}$ de la lógica de primer orden con identidad (donde las variables son x', x'', x''',...) puede ser representado mediante los números 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17, respectivamente. Sobre esta base y según las indicaciones anteriores, se puede establecer una gödelización g de todas las hileras finitas de signos. Por ejemplo,

$$g(\neg \exists x' \neg x' = x') = 2^7 \cdot 3^{13} \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11^7 \cdot 13^3 \cdot 17^5 \cdot 19^{17} \cdot 23^3 \cdot 29^5$$

Con ayuda de esta codificación numérica de las hileras de signos lógicos y variables, Gödel pudo transformar las preguntas lógicas (por ejemplo, si una fórmula era deducible de otra fórmula) en preguntas aritméticas (si cierto número estaba en determinada relación aritmética con otro número). Desde entonces, este tipo de codificaciones se ha convertido en estándar en lógica matemática bajo el nombre de gödelización.

grado de creencia (A. *Glaubensgrad,* F. *degré de croyance,* I. *degree of belief*). En el marco de la interpretación personalista de la PROBABILIDAD se sue-

le llamar *grado de creencia* de la persona X en el enunciado p a la probabilidad que X atribuye a p. El grado de creencia de X en p se mide por la fracción de 1 que X está dispuesto a pagar a cambio de la seguridad de recibir 1 si y solo si p es verdadero. Ramsey (1926) demostró que si X es un apostador profesional, dispuesto a recibir todas las apuestas que quieran hacerle en favor o en contra de la verdad de ciertos enunciados, sus grados de creencia en ellos tienen que ajustarse a los principios del CÁLCULO DE PROBABILIDADES, pues de otro modo podría tener que aceptar una combinación de apuestas que con seguridad le ocasionarían una pérdida, pase lo que pase.

grafo (A. *Graph*, F. *graphe*, I. *graph*).
a. El *grafo* de la función $f : A \rightarrow B$ es el conjunto de pares ordenados $\{\langle x,f(x)\rangle : x \in A \text{ y } f(x) \in f(A) \subseteq B\}$. Como se explica en el artículo FUNCIÓN, hay quienes no distinguen entre una función y su grafo.
b. En otra acepción de la palabra, se llama 'grafo' a cualquier estructura del tipo que estudia la *teoría de grafos*. Un *grafo* en este sentido consta de un conjunto finito de *vértices*, que designaremos con letras mayúsculas, y un conjunto finito o infinito de *aristas*, que designaremos con letras minúsculas, sujeto a la única condición siguiente: cada arista r está asociada a dos vértices P y Q, no necesariamente distintos. Diremos que P y Q son los *extremos* de r y que r los *une* o *conecta*. La condición antedicha no excluye (i) que el grafo contenga uno o más vértices *aislados*, que ninguna arista une a otro vértice; (ii) que un mismo vértice sea los dos extremos de una cierta arista; (iii) que dos vértices estén unidos por más de una arista. Un *camino* en un grafo es una lista de n+1 vértices y n aristas $\langle P_1, r_1, P_2, r_2, P_3,\ldots, r_{n-1}, P_n, r_n, P_{n+1}\rangle$, tal que la k-ésima arista une el k-ésimo vértice con el (k+1)-ésimo ($1 \leq k \leq n$). Dícese que un camino *pasa* por cada uno de sus vértices y que los *conecta*. Un grafo se dice *conexo* si todos sus vértices están conectados por caminos. Un grafo inconexo consta de varios *componentes*, cada uno de los cuales es un grafo conexo o un punto aislado. Un *grafo orientado* es un grafo en que cada arista r está asociada a un PAR ORDENADO de vértices $\langle P,Q\rangle$. P es el extremo *inicial* y Q el extremo *final* de r. Como en el caso anterior, puede haber varias aristas asociadas al par $\langle P,Q\rangle$, y también aristas, necesariamente distintas de las anteriores, asociadas al par $\langle Q,P\rangle$. Un camino $\langle P_1, r_1, P_2, r_2, P_3,\ldots, r_{n-1}, P_n, r_n, P_{n+1}\rangle$ en un grafo orientado cumple la siguiente condición adicional: la k-ésima arista tiene al k-ésimo vértice como extremo inicial y al (k+1)-ésimo vértice como extremo final ($1 \leq k \leq n$).

gravitación (A. *Gravitation*, F. *gravitation*, I. *gravitation*). La caída de los cuerpos pesados o *graves* es un fenómeno que todos los seres humanos percibimos, en su regularidad ineluctable, al aprender a andar. Aristóteles la con-

cibe como manifestación de la tendencia de los elementos pesados —tierra y agua— a instalarse en su lugar natural, el centro del Universo. Ni los elementos livianos —aire y fuego— ni el ÉTER, de que están hechos los cielos, comparten esta tendencia. Por lo tanto, para la física aristotélica, solo hay gravitación en la región del mundo situada bajo la Luna, y solo afecta a una parte de los cuerpos que hay allí. Newton nos enseñó a concebir la gravitación como un fenómeno cósmico, debido a la mutua atracción entre todos los cuerpos conforme a la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL. (Exceptuábanse solamente los fluidos imponderables —CALÓRICO, electricidad, ÉTER— postulados por la física del siglo XVIII y descartados uno a uno desde mediados del siglo XIX.) A esta ley se ajustan —con una precisión superada en muy pocas áreas de la física— tanto la caída de los cuerpos sobre la Tierra como el movimiento de planetas y cometas en sus órbitas en torno al Sol. Ella explica también que con esencialmente los mismos medios se pueda enviar un proyectil de Caracas a Bruselas o colocar en órbita un satélite artificial. Caen asimismo bajo el concepto newtoniano de gravitación la circulación de las estrellas dentro de nuestra galaxia y la de las galaxias de nuestro grupo local dentro del mismo.

La atracción gravitacional newtoniana está pensada como ACCIÓN INSTANTÁNEA A DISTANCIA y es, por ende, incompatible con la teoría especial de la RELATIVIDAD. La teoría general de la relatividad elaborada por Einstein principalmente para superar esta dificultad concibe los fenómenos gravitacionales de un modo radicalmente distinto. Según ella, una partícula en CAÍDA LIBRE, sin momento angular ni carga eléctrica, sigue una trayectoria prescrita por la sola geometría del espaciotiempo. Desde este punto de vista, la caída libre es simplemente movimiento inercial a través de un lugar del espaciotiempo donde, debido a la distribución de la materia, la propiedad geométrica llamada CURVATURA no es igual a cero. O, mejor dicho, el movimiento inercial no es sino caída libre en un entorno de curvatura desdeñable. La teoría einsteiniana de la gravitación explica todos los fenómenos que caen bajo la ley de Newton tan bien o mejor que esta (↗PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO). Pero explica además toda una serie de fenómenos descubiertos después de la publicación de la teoría en 1915: la DESVIACIÓN GRAVITACIONAL DE LA LUZ, la DILATACIÓN GRAVITACIONAL DEL TIEMPO, el CORRIMIENTO AL ROJO COSMOLÓGICO, la bajísima temperatura de la RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO, los lentes gravitacionales, la RADIACIÓN GRAVITACIONAL y los AGUJEROS NEGROS. Para ser aceptable, cualquier teoría futura de la gravitación —una que permita superar, como se espera, la incompatibilidad entre la teoría general de la relatividad y las teorías cuánticas— tendría que ser capaz de dar cuenta de todos estos fenómenos.

gravitón (A. *Graviton*, F. *graviton*, I. *graviton*). Hipotético bosón que transmitiría la fuerza gravitatoria. Se trataría de una partícula sin masa y con spin

2, que sería el cuanto del campo gravitacional. Desempeñaría en la teoría cuántica de la gravedad un papel análogo al del fotón en la electrodinámica cuántica. De momento, no se ha detectado.

grupo (A. *Gruppe*. F. *groupe*, I. *group*). Sea G un conjunto no vacío. Consideremos una función $f: G \times G \to G$. Designaremos el valor de f en el argumento $\langle a, b\rangle$ con la expresión $a * b$. Supongamos que se cumplen las tres condiciones siguientes:

G1 Para cualesquiera objetos $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$ (f es *asociativa*).

G2 Existe un elemento $e \in G$ tal que, para todo $a \in G$, $e * a = a * e = a$.

G3 Para cada $a \in G$ existe un elemento *inverso* a^{-1}, tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Entonces, la ESTRUCTURA $\langle G, f, e\rangle$ es un *grupo*. e es el elemento *neutro* del grupo y f es la *operación de grupo*, habitualmente llamada *suma* o *producto*.

Si hay un conjunto $H \subseteq G$ tal que cada elemento de G puede obtenerse aplicando una o más veces la operación de grupo f a elementos de H o a sus elementos inversos, decimos que los elementos de H son los *generadores* del grupo $\langle G, f, e\rangle$, y que éste es generado por H. Por ejemplo, el grupo $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ de los enteros es generado por el conjunto $\{1\} \subseteq \mathbb{Z}$, puesto que la adición + aplicada reiteradamente al 1 y a su inverso −1 genera todos los enteros. Por otra parte, para generar por multiplicación reiterada el grupo $\langle \mathbb{Q} - \{0\}, \times, 1\rangle$ de los racionales distintos de 0 hay que disponer del −1 y todos los números primos, 2, 3, 5,..., y de los inversos respectivos: −1, 1/2, 1/3, 1/5,...

grupo abeliano (A. *Abelscher Gruppe*, F. *groupe abélien*, I. *Abelian group*). Un grupo $\langle G, *, e\rangle$ se dice *abeliano* si la operación de grupo $*$ es *conmutativa*, esto es, si $a * b = b * c$ para todo $a, b \in G$.

grupo de Lie (A. *liesche Gruppe*, F. *groupe de Lie*, I. *Lie group*). Un *grupo de Lie* es un grupo G que posee a la vez la estructura de VARIEDAD DIFERENCIABLE real o compleja, en virtud de la cual son funciones lisas la operación de grupo y la función que asigna a cada $g \in G$ el respectivo inverso g^{-1}.

grupo fundamental (A. *Fundamentalgruppe*, F. *groupe fondamentale*, I. *fundamental group*). Sea S un ESPACIO TOPOLÓGICO. Sea x_0 un punto cualquiera de S. $\langle S, x_0\rangle$ es un *espacio punteado con punto base* x_0. Denotamos con **I** el intervalo cerrado $(0 \leq x \leq 1) \subseteq \mathbb{R}$. Un *lazo en S basado en* x_0 es cualquier fun-

ción continua $C : \mathbf{I} \rightarrow S$ tal que $C(0) = C(1) = x_0$. Sea $\Omega(S,x_0)$ el conjunto de todos los lazos en S basados en x_0. Obviamente, uno de ellos es el lazo constante $C_0 : \mathbf{I} \rightarrow S$; $t \mapsto x_0$ para todo $t \in \mathbf{I}$. Los lazos C_1, $C_2 \in \Omega(S,x_0)$ se dicen *homotópicos* si hay una función continua $f : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \rightarrow S$, tal que, para todo a, $b \in \mathbf{I}$, $f(a,0) = C_1(a)$, $f(a,1) = C_2(a)$, $f(0,b) = C_1(0)$, $f(1,b) = C_2(1)$. La relación de *homotopía* en $\Omega(S,x_0)$ es una relación de EQUIVALENCIA, que determina una partición de $\Omega(S,x_0)$ en *clases de homotopía*. Denotamos con $[C]$ la *clase de homotopía* del lazo $C \in \Omega(S,x_0)$, esto es, el conjunto de todos los lazos en S basados en x_0 que son homotópicos a C. Definimos la operación de *composición de lazos* en $\Omega(S,x_0) \times \Omega(S,x_0)$ como sigue: El compuesto de los lazos C_1 y C_2 es el lazo C_1C_2 definido por $C_1C_2(t) = C_1(2t)$ si $0 \leq x \leq 1/2$ y $C_1C_2(t) = C_2(2t - 1)$ si $1/2 \leq x \leq 1$. Obviamente, $C_1C_2 \in \Omega(S,x_0)$. El *grupo fundamental* o *primer grupo de homotopía* $\pi_1(S,x_0)$ del espacio punteado (S,x_0) es la estructura $\langle G,*,e \rangle$ caracterizada así:

(i) G es el conjunto de las clases de homotopía $[C]$ $(C \in \Omega(S,x_0))$.
(ii) El producto $*$ está dado por $[C_1] * [C_2] = [C_1C_2]$, para todo $[C_1]$, $[C_2] \in G$.
(iii) El elemento neutro e del grupo es $[C_0]$, la clase de homotopía del lazo constante C_0.
(iv) Si $[C] \in G$, el respectivo elemento inverso $[C]^{-1}$ es $[C^{-1}]$, la clase de homotopía del lazo C^{-1}, definido por $C^{-1}(t) = C(1 - t)$ para todo $t \in \mathbf{I}$.

No es difícil comprobar que $\pi_1(S,x_0)$ es efectivamente un GRUPO.

Si (X,x_0) y (Y,y_0) son espacios con puntos base x_0 y y_0, respectivamente, hay funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ que preservan los puntos base, en el sentido de que $f(x_0) = y_0$. Consideremos la clase que forman todos los espacios topológicos punteados conjuntamente con todas las funciones continuas entre ellos que cumplen este requisito. Esta clase es una CATEGORÍA. Definiremos ahora un FUNCTOR de esta categoría a la categoría de grupos. Por motivos que enseguida quedarán en evidencia, se lo llama *functor del grupo fundamental* y se lo denota con π_1. El functor π_1 pone en correspondencia (i) cada objeto (X,x_0) de la categoría de espacios punteados con el grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ y (ii) cada función continua $f : (X,x_0) \rightarrow (Y,y_0)$, tal que $f(x_0) = y_0$, con el homomorfismo de grupos $\pi_1(f) : \pi_1(X,x_0) \rightarrow \pi_1(Y,y_0)$, que asigna —para cada $C \in \Omega(X,x_0)$— la clase de homotopía $[f \circ C]$ a la clase de homotopía $[C]$.

H

h **barrada** (A. *h quer*, F. *h barrée*, I. *h-bar*). Constante de la naturaleza igual a la CONSTANTE DE PLANCK *h* dividida por 2π. La frecuencia con que esta cantidad aparece en las ecuaciones de la física cuántica movió a Dirac a redefinir *h* como $(2\pi)^{-1}$ veces el valor que le dio Planck. Esta iniciativa no prosperó, pero se adoptó en cambio el símbolo $\hbar$ para designar la cantidad $h/2\pi$.

hadrón (A. *Hadron*, F. *hadron*, I. *hadron*). Partícula que siente la interacción nuclear fuerte. Los hadrones son quarks, o son bariones (compuestos de tres quarks), o son mesones (compuestos de un quark y un antiquark).

hamiltoniano (F. *hamiltonien*).

a. *Función* (A. *Hamilton-Funktion*, I. *Hamiltonian function*). Consideremos un sistema mecánico holonómico y conservador con *n* grados de libertad (↗MECÁNICA CLÁSICA); su estado está completamente especificado por *n* coordenadas (generalizadas) de posición $q_1,..., q_n$ y las correspondientes derivadas con respecto al tiempo $\dot{q}_1,..., \dot{q}_n$. Si *L* es el LAGRANGIANO del sistema, los momentos (generalizados) $p_1,..., p_n$, conjugados con las coordenadas $q_1,..., q_n$, se definen por las ecuaciones:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (1 \le k \le n)$$

Para describir el sistema puede emplearse entonces su *hamiltoniano H*, una función real dependiente de $q_1,..., q_n, p_1,..., p_n$ y posiblemente del tiempo *t* —así como el lagrangiano *L* depende de $q_1,..., q_n, \dot{q}_1,..., \dot{q}_n$ y posiblemente de *t*—, la cual se define así:

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L$$

Si las ligaduras del sistema no dependen del tiempo, la energía cinética T es una función cuadrática homogénea f de las velocidades generalizadas $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

Si el sistema, como supusimos, es conservador, el potencial V no depende de las velocidades y, por lo tanto,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

Por consiguiente,

$$H = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k - L = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - (T - V) = 2T - (T - V) = T + V$$

En el caso considerado, el hamiltoniano es, pues, igual a la energía total del sistema. (↗ECUACIONES DE HAMILTON, ESPACIO DE LAS FASES, PRINCIPIO DE HAMILTON.)

b. *Operador* (A. *Hamilton-Operator*, I. *Hamiltonian operator, Hamiltonian*). OPERADOR LINEAL que genera la evolución temporal de un sistema mecánico-cuántico en su ESPACIO DE HILBERT. Concretamente, si $|\alpha\rangle$ es el estado inicial del sistema considerado en el instante t_0 y designamos con $|\alpha,t_0;t\rangle$ el estado a que llega, desde aquel, en el instante t, posterior a t_0, entendemos que $|\alpha,t_0;t\rangle = \mathrm{U}(t,t_0)|\alpha\rangle$, donde $\mathrm{U}(t,t_0)$ es un operador lineal sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ del sistema. Suponemos que $\mathrm{U}(t,t_0)$ es unitario (la evolución temporal preserva la NORMA del vector de estado); suponemos asimismo que $\lim_{t \to t_0} |\alpha,t_0;t\rangle = |\alpha\rangle$ y que, si $t_2 > t_1 > t_0$, $\mathrm{U}(t_2,t_0) = \mathrm{U}(t_2,t_1)\mathrm{U}(t_1,t_0)$. Los operadores $\mathrm{U}(t,t_0)$ ($t \geq t_0$) forman, por lo tanto, un grupo de Lie parametrizado por t. El operador infinitesimal $\mathrm{U}(t + dt,t)$ debe converger a la identidad cuando dt tiende a 0: $\lim_{dt \to 0} \mathrm{U}(t + dt, t) = 1_{\mathcal{H}}$. Todas estas condiciones se cumplen si $\mathrm{U}(t + dt,t) = 1 - i\Omega dt$, donde Ω, el generador del grupo, es un operador hermitiano. El *hamiltoniano* del sistema se define como $\mathrm{H} = \hbar\Omega$ (↗$\hbar$ BARRADA). Es claro entonces que, para cualquier $t > t_0$,

$$\mathrm{U}(t + dt, t_0) = \mathrm{U}(t + dt, t)\mathrm{U}(t, t_0) = \left(1 - \frac{i\mathrm{H}dt}{\hbar}\right)\mathrm{U}(t, t_0)$$

Esto equivale a

$$\frac{U(t+dt,t)-U(t,t_0)}{dt}=-i\left(\frac{H}{\hbar}\right)U(t,t_0)$$

y, por ende, a la ecuación diferencial

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=HU(t,t_0)$$

Esta es la ecuación de Schrödinger para el operador hamiltoniano, la cual gobierna la evolución temporal de un sistema mecánico-cuántico.

El nombre del operador *hamiltoniano* se justifica porque este desempeña en la mecánica cuántica un papel análogo al que corresponde en la mecánica clásica a la función de ese nombre. De hecho, en la sustitución de cantidades clásicas por matrices infinitas con que Heisenberg (1925) dio comienzo al desarrollo de la mecánica cuántica, el hamiltoniano se reemplazaba justamente con la matriz apropiada para representar —en ese contexto— el operador que hoy llamamos así.

hertz. Unidad de frecuencia: 1 Hz = un ciclo por segundo. Dícese que un fenómeno periódico tiene una frecuencia de *n* Hz si completa exactamente *n* ciclos en un segundo.

hipóstasis (A. *Hypostase*, F. *hypostase*, I. *hypostasis*). Vocablo trascrito del griego ὑπόστασις, que etimológicamente significa lo mismo que la palabra latina *substantia*, pero ha corrido una suerte muy diferente. Mientras esta designa en cada contexto lo propia y primordialmente real, o bien, metafóricamente, lo principal o fundamental ('la sustancia de un acuerdo', 'lo más sustancial de una doctrina'), la palabra *hipóstasis* —utilizada en la literatura patrística para referirse a las personas de la Trinidad cristiana— se usa hoy para subrayar el carácter ficticio que el hablante atribuye a un objeto pretendido (por ejemplo, el superyó y demás pobladores del inconsciente humano, según Freud, son meras *hipóstasis*, según los críticos del psicoanálisis). De igual forma, el verbo *hipostasiar* significa 'considerar o representar algo abstracto o irreal como real'; así, un adversario del REALISMO CIENTÍFICO dirá que esta doctrina *hipostasía* las PARTÍCULAS ELEMENTALES y otros constructos de la teoría física.

hipótesis ad hoc (A. *ad-hoc-Hypothese*, F. *hypothèse ad hoc*, I. *ad hoc hypothesis*). Llámase así a una hipótesis científica concebida especialmente para

superar una dificultad surgida en el curso de la investigación (típicamente, para resolver una ANOMALÍA). Las hipótesis ad hoc fueron objeto de la animosidad de Popper, pues son un obstáculo a la FALSACIÓN de las teorías científicas. Pero también Lakatos y sus seguidores las tratan con desdén; pues, según ellos, las hipótesis ad hoc promueven la degeneración de los programas de investigación científica, a menos que den lugar a la predicción, no solo de aquellos hechos ya conocidos que generan las dificultades que ellas vienen a resolver, sino además de otros *hechos nuevos* (en cuyo caso, ya no serían ad hoc).

El caso más vapuleado de una hipótesis física ad hoc es la propuesta independientemente por Fitzgerald y Lorentz para explicar el resultado negativo del EXPERIMENTO DE MICHELSON Y MORLEY. Supusieron que los cuerpos rígidos trasportados a través del ÉTER electromagnético se contraen por efecto de la interacción entre éste y las fuerzas eléctricas responsables de su rigidez; de tal modo que, en el caso del interferómetro de Michelson, el brazo metálico paralelo al movimiento de la Tierra sufre precisamente el acortamiento que hace falta para compensar exactamente la diferencia entre la velocidad con que la luz se propaga a lo largo del mismo y la velocidad con que se propaga a lo largo del otro brazo, perpendicular a él. Cabe pensar, sin embargo, que la contracción de Fitzgerald-Lorentz habría merecido un mayor respeto a los filósofos si el resultado experimental en cuestión no hubiese sido explicado de un modo mucho más creativo y fecundo por Einstein, o si el experimento de Kennedy y Thorndike (1932), que intentaba hacer patente la supuesta contracción mediante un interferómetro con brazos intencionadamente desiguales, hubiera tenido un resultado positivo.

La verdad es que, a pesar de la elocuencia con que Popper y Lakatos combatieron las hipótesis ad hoc, cuesta creer que las hipótesis científicas concebidas deliberadamente para superar problemas científicos pecan contra el espíritu de la ciencia.

hipótesis del continuo (A. *Kontinuumshypothese*, F. *hypothèse du continu*, I. *continuum hypothesis*). El conjunto ordenado $\mathbb{R}$ de los reales se conoce también como el CONTINUO. ¿Cuántos números reales hay? Tantos como subconjuntos de números naturales. $|\mathbb{R}| = |\wp\omega|$. Pero ¿cuántos subconjuntos de ω hay? ω es el mínimo ordinal infinito numerable; es, por tanto, un ordinal inicial, es decir, un cardinal, el mínimo cardinal infinito, el primero de los álefs, $|\omega| = \omega = \aleph_0$. Por el TEOREMA DE CANTOR, la cardinalidad del conjunto potencia de ω tiene que ser mayor que la cardinalidad de ω, $|\omega| < |\wp\omega|$. Ya sabemos que $|\omega| = \aleph_0$. La cardinalidad de $\wp\omega$, $|\wp\omega|$, es la misma que la cardinalidad de $\mathbb{R}$, $|\mathbb{R}|$, a saber, $2^{\aleph_0}$. Pero ¿cuánto es $2^{\aleph_0}$? Esta pregunta plantea el problema del continuo. Cantor conjeturó que $|\wp\omega| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esta

conjetura se conoce como *la hipótesis del continuo* (CH). La hipótesis del continuo equivale a negar que pueda haber un conjunto con cardinalidad mayor que $|\omega|$ pero menor que $|\wp\omega|$, o mayor que $|\mathbb{N}|$ pero menor que $|\mathbb{R}|$, es decir, equivale a afirmar que entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$ no hay ninguna otra cardinalidad intermedia, es decir, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, el cardinal inmediatamente siguiente a $\aleph_0$. Podemos generalizar el problema. Sea A un conjunto infinito cualquiera con $|A| = \aleph_\alpha$. ¿Qué valor tiene $|\wp A| = 2^{\aleph_\alpha}$? Hausdorff conjeturó que, para cualquier α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Esta conjetura se conoce como *la hipótesis generalizada del continuo* (GCH). La hipótesis generalizada del continuo equivale a negar que pueda haber un conjunto infinito A con cardinalidad mayor que $|A|$ pero menor que $|\wp A|$, es decir, equivale a afirmar que entre $\aleph_\alpha$ y $2^{\aleph_\alpha}$ no hay ninguna otra cardinalidad intermedia, es decir, que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, el cardinal inmediatamente siguiente a $\aleph_\alpha$.

Cantor trató desesperadamente de probar la hipótesis del continuo, sin conseguirlo. Su fracaso —como ahora sabemos— era inevitable, pues la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas habituales de la teoría de conjuntos, digamos, del sistema ZFC de Zermelo-Fraenkel con AXIOMA DE ELECCIÓN. En 1938 Gödel probó que, si la teoría de conjuntos así axiomatizada es consistente, sigue siendo consistente con el añadido de CH (o incluso de GCH). En 1963 Paul Cohen probó (mediante su nuevo procedimiento del *FORCING*) que, si la teoría de conjuntos es consistente, sigue siendo consistente con el añadido de $\neg$CH (o de $\neg$GCH). Por tanto, quedó demostrado que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas habituales de la teoría de conjuntos. La cardinalidad del continuo, o del conjunto potencia de ω, está completamente indeterminada por los axiomas habituales de la teoría de conjuntos y puede ser tan grande como queramos. Se trata de una indeterminación extraordinaria. En efecto, la afirmación de que $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ es compatible con ZFC para cualquier ordinal α que no sea cofinal con ω, esto es, para cualquier α tal que $cf(\alpha) \neq \omega$. En 1964 W. Easton probó que la hipótesis de que, para cualquier cardinal regular $\aleph_\alpha$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}$, es compatible con los axiomas habituales de la teoría de conjuntos. De hecho, el valor de 2^κ para un cardinal regular κ puede ser cualquier cosa, mientras sea $cf(2^\kappa) > cf(\kappa)$ y $2^\mu \leq 2^\kappa$ para $\mu < \kappa$.

Gödel llevó a cabo su prueba de la consistencia relativa de GCH construyendo una realización o modelo interno, L, el universo de los conjuntos constructibles, que satisface GCH. En dicha realización vale el AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD, $V = L$, que afirma que todos los conjuntos son constructibles. Y ese axioma implica la hipótesis generalizada del continuo. Gödel no pretendía proponer el axioma de constructibilidad como un axioma de la teoría estándar de conjuntos. Más bien pensaba que en el futuro nuevos axiomas que postulasen la existencia de CARDINALES GRANDES zanjarían la cuestión con

la negación de la hipótesis del continuo. Sin embargo, esa esperanza no se ha cumplido. La existencia de cardinales grandes gigantescos (inaccesibles, de Mahlo, medibles, etc.) es compatible tanto con la hipótesis del continuo como con su negación.

homeomorfismo (A. *homöomorphismus*, F. *homéomorphisme*, I. *homœomorphism*). Sean $\langle S_1,T_1\rangle$ y $\langle S_2,T_2\rangle$ espacios topológicos. Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una función biyectiva continua cuya inversa f^{-1} también es continua, f es un *homeomorfismo*. La existencia del homeomorfismo f implica que $\langle S_1,T_1\rangle$ y $\langle S_2,T_2\rangle$ son isomorfos como espacios topológicos o, como también se dice, *homeomorfos*.

homomorfismo (A. *Homomorphismus*, F. *homomorphisme*, I. *homomorphism*). En general, se llama así a una función que aplica una estructura en otra similar, preservando la similitud entre ellas. Esta condición es más débil que el ISOMORFISMO, pues no requiere que dicha función sea biyectiva.

En particular, dados dos GRUPOS $\langle G_1,\otimes_1,e_1\rangle$ y $\langle G_2,\otimes_2,e_2\rangle$ la función $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un *homomorfismo* si cualesquiera a, $b \in G_1$ satisfacen la ecuación $f(a \otimes_1 b) = f(a) \otimes_2 f(b)$. En tal caso, se dice que ambos grupos son homomorfos.

Análogamente, dados dos RETÍCULOS $\langle A_1,\sqcap_1,\sqcup_1\rangle$ y $\langle A_2,\sqcap_2,\sqcup_2\rangle$, la función $f : A_1 \rightarrow A_2$ es un *homomorfismo* si cualesquiera a, $b \in A_1$ satisfacen las ecuaciones $f(a \sqcap_1 b) = f(a) \sqcap_2 f(b)$ y $f(a \sqcup_1 b) = f(a) \sqcup_2 f(b)$. En tal caso, se dice que ambos retículos son homomorfos. Esta condición es más débil que el isomorfismo de retículos.

Se habla también de homomorfismo de *álgebras de Lie*, un tipo de estructura no definido en este diccionario.

horizontes (A. *Horizonte*, F. *horizons cosmologiques*, I. *horizons*). El modelo estándar del *BIG BANG* y otros modelos de la cosmología relativista contienen horizontes. El *horizonte de eventos* de una partícula P es la frontera entre dos clases de eventos: (E_1) aquellos que pueden influir sobre la historia de P (mediante señales luminosas u otro tipo de señales) y (E_2) aquellos que, en principio, por su misma posición en el espaciotiempo, no pueden ni podrán jamás ejercer una influencia sobre la historia de P. El horizonte de eventos de P existe si y solo si la clase (E_2) no está vacía. El *horizonte de partículas* de un evento E separa las partículas del Universo en dos clases: (P_1) aquellas que pueden haber contribuido a E (mediante la emisión de señales de algún tipo, capaces de influir sobre este evento) y (P_2) aquellas que, en principio, por su posición relativa a la E, no han sido la fuente de ninguna acción que pudiera repercutir sobre E. El horizonte de partículas de E existe si y solo si la clase (P_2) no está vacía.

Vale la pena señalar que en el modelo estándar el horizonte de partículas de un evento *E* es tanto más estrecho —contiene tantas menos partículas— cuanto menos tiempo haya trascurrido desde el *Big Bang* cuando *E* ocurre. Al sentido común no familiarizado con la geometría del espaciotiempo relativista le cuesta trabajo conciliar esta propiedad del modelo estándar con su rasgo más conocido: la expansión del Universo. Esta significa que la materia se apretuja —su densidad aumenta— infinitamente en la dirección del *Big Bang*. Sin embargo, aunque la distancia $d_t(P,Q)$ entre dos partículas cualesquiera *P* y *Q* a *t* segundos del *Big Bang* no hace sino decrecer con *t*, el diámetro del horizonte de partículas de los eventos que ocurren en las cosmolíneas de *P* y *Q* decrece proporcionalmente más aún.

Para otro uso de *horizonte*, ↗AGUJERO NEGRO, SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD.

I

idea reguladora (A. *regulative Idee*, F. *idée regulatrice*, I. *regulative idea*). Kant (1781) propuso llamar *ideas* a aquellos.conceptos —como el de una sociedad perfectamente justa— que no pueden estar realizados en la experiencia. Según él, la idea de un ente perfectísimo (Dios) y la idea de una totalidad coherente de los fenómenos (mundo) son productos necesarios de la razón, que carecen de realidad objetiva, pero regulan la constitución de la experiencia, orientando la investigación científica.

ideal (A. *Ideal*, F. *idéal*, I. *ideal*).
a. *En un anillo.* Sea $\mathbb{A} = \langle A,\oplus,0,\otimes\rangle$ un ANILLO. Un *ideal* (bilateral) en $\mathbb{A}$ es un subconjunto no vacío $J \subseteq A$, que cumple las condiciones siguientes:

I_A1 $\quad x \oplus -y \in J$, para todo x, $y \in J$.
I_A2 $\quad x \otimes z \in J$ y $z \otimes x \in J$, para todo $x \in J$ y todo $z \in R$.

Un ideal unilateral (por la izquierda, o por la derecha), se define modificando apropiadamente la condición I_A2.

b. *En un retículo.* Sea $\mathfrak{R} = \langle R,\sqcap,\sqcup\rangle$ un RETÍCULO. Un *ideal* en $\mathfrak{R}$ es un subconjunto no vacío $J \subseteq R$, que cumple las condiciones siguientes:

I_R1 $\quad x \sqcup y \in J$, para todo x, $y \in J$.
I_R2 $\quad x \sqcap z \in J$, para todo $x \in J$ y todo $z \in R$.

En particular, si $a \in R$, el conjunto $J(a) = \{a \sqcap x: x \in R\}$ es un ideal que se llama el *ideal principal* determinado por a.

Un FILTRO en el retículo $\mathfrak{R}$ se caracteriza por cumplir condiciones iguales a I_R1 e I_R2 con los signos $\sqcap$ y $\sqcup$ intercambiados.

idealismo (A. *Idealismus*, F. *idéalisme*, I. *idealism*). Doctrina filosófica que atribuye alguna forma de exclusividad o primacía a las *ideas*, en alguna de las acepciones muy diversas que esta palabra tiene en filosofía.

Según esto, el *idealista* por antonomasia debería ser Platón, que introdujo la palabra 'idea' en el vocabulario filosófico y llamó así a los prototipos inmutables de las cosas cambiantes, los cuales conocemos, según él, con 'el ojo del alma' (en griego corriente, ἰδέα era la 'figura', el 'aspecto visible' de una persona o cosa). Según el *idealismo* platónico, tales prototipos eternos son lo "realmente real" (τὸ ὄντως ὄν) y el devenir mundano no es sino un reflejo suyo, inadecuado y eternamente inacabado.

Sin embargo, es más corriente llamar *idealista* a Berkeley, quien, tomando 'idea' en su acepción inglesa ordinaria de imagen mental percibida, recordada o fantaseada —Berkeley niega la existencia de "ideas abstractas"—, sostuvo que las cosas llamadas materiales no son sino conglomerados de ideas, cuya existencia consiste en ser percibidas (↗*ESSE EST PERCIPI*). Esta filosofía de Berkeley otorga primacía a las mentes que perciben las ideas y sería, por eso, más justo llamarla *mentalista* o *espiritualista*.

Se habla también del *idealismo* de Kant y de los numerosos pensadores que, en un sentido o en otro, han adoptado su punto de vista. Kant repudió el mentalismo de Berkeley y redactó contra él una "Refutación del idealismo"; niega además que las que él llama 'ideas' tengan "realidad objetiva" o valor cognitivo alguno (↗IDEA REGULADORA). No obstante, hay quienes tachan de 'idealista' a cualquiera que, con Kant, adjudique al intelecto humano la tarea de "deletrear las apariencias sensibles para poderlas leer como experiencia" y reconozca la primacía del pensamiento en la articulación ordenada de los fenómenos.

Como un ejemplo más del variado espectro semántico del término, mencionamos el *idealismo* de Hegel, un filósofo que, por una parte, sostuvo expresamente la "idealidad" de las cosas finitas, en cuanto ninguna es lo que es sino en virtud de las relaciones que sostiene con todas las demás en el devenir; y, por otra parte, hacía culminar la autorrealización de lo real con la filosofía misma, que describe así: "la Idea que se piensa a sí misma, la verdad sapiente, [...] que es la universalidad validada en el contenido concreto como en su propia actualidad" (1830, § 574).

idealización (A. *Idealisierung*, F. *idéalisation*, I. *idealization*). La física y las demás ciencias generalmente solo pueden valerse de conceptos matemáticos para captar realidades concretas gracias a que se hacen una representación *idealizada* de estas, la cual simplifica algunas características de la realidad e ignora otras. Por ejemplo, la teoría mecánica del péndulo supone que éste consiste en una cuerda inextensible y sin espesor, cuya masa está entera concentrada en uno de sus extremos, mientras que el otro permanece fijo. Asimismo, la teoría general de la RELATIVIDAD predice la PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO suponiendo que este planeta es una partícula de prueba (esto

es, un punto en movimiento cuya masa es demasiado pequeña para alterar el campo gravitacional) en el campo de Schwarzschild que generaría una masa solar, si no existiese ninguna otra masa en el mundo.

idempotente (A. *idempotent*, F. *idempotente*, I. *idempotent*). Sea $f : A \rightarrow A$ una FUNCIÓN cuyo dominio y codominio son idénticos. Se dice que f es *idempotente* si la FUNCIÓN COMPUESTA $f \circ f = f$.

identidad (A. *Identität*, F. *identité*, I. *identity mapping*). Sea M un conjunto cualquiera. La FUNCIÓN biyectiva $\mathbf{1}_M : M \rightarrow M$ tal que, para cada $x \in M$, $\mathbf{1}_M(x) = x$, es la *identidad* en M.

implicación (A. *Implikation*, F. *implication*, I. *implication*, *entailment*). Relación inversa a la relación de CONSECUENCIA. Un enunciado A implica otro enunciado B si y solo si B es una consecuencia de A, lo cual ocurre si y solo si el enunciado 'si A, entonces B' es una verdad lógica. Supongamos que la fórmula α representa la forma lógica del enunciado A y la fórmula β representa la forma lógica del enunciado B. La relación de implicación se simboliza en el metalenguaje mediante el signo $\vDash$, el mismo que se usa para la consecuencia (aunque con el orden de las fórmulas cambiado). Por tanto, que α implica β se escribe en el metalenguaje como $\alpha \vDash \beta$. $\alpha \vDash \beta$ si y solo si cada interpretación que verifica o satisface α verifica o satisface también β. La relación de implicación se da asimismo entre un conjunto Γ de fórmulas (por ejemplo, los axiomas de una teoría) y una consecuencia suya β, en cuyo caso escribimos $\Gamma \vDash \beta$. $\Gamma \vDash \beta$ si y solo si toda interpretación que verifica o satisface cada fórmula $\gamma \in \Gamma$ verifica o satisface también β.

El signo metalingüístico de implicación o consecuencia $\vDash$ no debe ser confundido con el conector $\Rightarrow$ del lenguaje formal (el signo de CONDICIONAL). Un condicional $(\alpha \Rightarrow \beta)$ es verdadero en una interpretación determinada $\mathfrak{I}$ si $\mathfrak{I}$ satisface β o si $\mathfrak{I}$ no satisface α. Un condicional puede ser verdadero en unas interpretaciones y falso en otras. Una fórmula α implica otra fórmula β si todas las interpretaciones que satisfacen α satisfacen también β. La implicación no es relativa a una interpretación determinada, sino que es una propiedad absoluta de las fórmulas (dada una lógica fija, claro). De todos modos, ambas nociones distintas pueden interrelacionarse: $\alpha \vDash \beta$ si y solo si $\vDash(\alpha \Rightarrow \beta)$, es decir, una fórmula implica otra si y solo si el condicional cuyo antecedente es la primera y cuyo consecuente es la segunda es lógicamente válido. Pasando al lenguaje ordinario, para que un enunciado condicional sea verdadero basta con que, de hecho, su antecedente sea falso o su consecuente sea verdadero. Para que un enunciado A implique otro B es necesario no solo que $(A \Rightarrow B)$ sea verdadero, sino además que también sea verdadero cual-

quier otro condicional ($A' \Rightarrow B'$) donde A' y B' tengan la misma forma lógica que A y B, respectivamente, es decir, se requiere que ($A \Rightarrow B$) no sea una mera verdad fáctica, sino una verdad lógica, verdadera en función de su mera forma y con independencia de su contenido.

Desde la antigüedad hasta el siglo XX ha sido frecuente confundir las nociones de condicional e implicación, llamando a ambas implicación. Como, de todos modos, es fácil distinguir ambas nociones, se planteaba la seudocuestión de cuál de ellas era la buena. Filón de Mégara defendía la (más tarde) llamada "implicación material", es decir, el condicional. Diódoros Kronos defendía la llamada (por C. I. Lewis) "implicación estricta", es decir, la implicación como inversa de la consecuencia. Y el uso de la palabra 'implicación' para hablar de condicionales verdaderos cuyo antecedente no implica su consecuente daba lugar a las presuntas "paradojas de la implicación", paradojas que se desvanecen en cuanto se usa una terminología adecuada, que evite la confusión entre condicional ($\Rightarrow$) e implicación ($\vDash$).

En la lógica de primer orden la relación de consecuencia coincide extensionalmente con la de deducibilidad. Por tanto, una fórmula α implica otra β si y solo si β es deducible de α: $\alpha \vDash \beta$ si y solo si $\alpha \vdash \beta$.

impredicatividad (A. *Imprädikativität*, F. *imprédicativité*, I. *impredicativity*). Russell (1906) llamó 'predicativa' a una condición —una "función proposicional"— que caracteriza un conjunto; 'no predicativa', entonces, es una que no logra hacerlo, como la condición 'x es el conjunto de todos los conjuntos'. Poincaré sostuvo que el carácter no predicativo de ciertas caracterizaciones viene de que envuelven un círculo vicioso. Así, el término 'conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos' supuestamente denota un objeto caracterizado mediante una alusión a la totalidad de los conjuntos, uno de los cuales es precisamente ese objeto. Asimismo el ordinal de todos los ordinales, nombrado en la PARADOJA DE BURALI-FORTI, se define por la expresión 'todos los ordinales', cuya extensión lo contiene. Caracterizar el término t nombrando un determinado conjunto K tal que $t \in K$ es como repetir el *definiendum* en el *definiens*, puesto que cualquier expresión que nombre a $K = \{x: x \in K\}$ denota, entre otros, al objeto que se busca designar con t. Poincaré objetó a la primera prueba del TEOREMA DEL BUEN ORDEN por Zermelo (1904) que la caracterización de ciertos conjuntos que figuran decisivamente en ella peca de este vicio. Zermelo respondió que el uso de términos no predicativos es endémico en el análisis: ellos figuran en cada demostración en que el máximo o el mínimo de un conjunto numérico definido previamente se utiliza para llegar a nuevas conclusiones. Por lo demás, cuesta juzgar viciosa la caracterización de *diciembre* como *el último de los meses del año*. Por eso Thiel (1984), que comparte el punto de vista de Poincaré en

esta materia, define *impredicativo* como "un procedimiento para delimitar o caracterizar un objeto, que en la descripción del mismo hace referencia a una totalidad de objetos que [...] comprendería al propio objeto en cuestión, y cuyos elementos no pueden todos generarse constructivamente". La impredicatividad así definida resulta viciosa no porque invoque circularmente, para fijar la referencia a cierto objeto, una totalidad que lo presupone, sino más bien porque la totalidad invocada no satisface un requisito de constructibilidad que los partidarios de dicho punto de vista tendrían que explicar y justificar.

inclusión (A. *Teilmengenbeziehung*, *Inklusion*, F. *inclusion*, I. *inclusion*). La relación que se da entre dos conjuntos A y B cuando todos los elementos de A son elementos de B, es decir, cuando A es un subconjunto de B. La relación de *inclusión* se representa mediante el signo $\subseteq$. Cualquier conjunto A está incluido en sí mismo, $A \subseteq A$. Si excluimos este caso, exigiendo que B tenga al menos un elemento que no sea elemento de A, hablamos de inclusión propia de A en B, lo que representamos mediante $A \subset B$. Por tanto, $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$. En virtud de la definición de inclusión, el conjunto vacío $\varnothing = \{x : x \neq x\}$ está incluido en todo conjunto A, $\varnothing \subseteq$ A, pues $\varnothing$ carece de elementos, por lo que todos sus elementos —vale decir, ninguno— son también elementos de A.

Si $A \subseteq B$, suele llamarse *inclusión* a la inyección canónica $A \to B$, $x \mapsto x$, que asigna a cada elemento x de A el mismo objeto x, considerado como elemento de B.

inconmensurable (A. *Inkommensurabel*, F. *incommensurable*, I. *incommensurable*). Dícese que dos magnitudes del mismo género, A y B, son *inconmensurables* si no existen dos enteros p y q tales que una magnitud igual a p veces A sea idéntica a una magnitud igual a q veces B. Por ejemplo, la base y la diagonal de un cuadrado cualquiera son siempre inconmensurables.

Kuhn (1962) usa el término metafóricamente para referirse a la relación entre la CIENCIA NORMAL nacida de una REVOLUCIÓN CIENTÍFICA y aquella que precedió y dio lugar a esa revolución. Según él, el reemplazo de un PARADIGMA por otro genera entre ambos modos de hacer ciencia un abismo a través del cual no es posible la comunicación inteligente ni el debate racional. Los científicos practicantes suelen opinar que esta idea es ridícula. Y seguramente lo sería si 'paradigma' fuera sinónimo de 'teoría científica'. Abundan los individuos que dan clases, a veces el mismo día, de mecánica newtoniana y mecánica cuántica, sin sentir que están cayendo en la esquizofrenia. Es común asimismo abordar distintos aspectos de un mismo problema físico recurriendo a teorías diferentes y aun incompatibles (cf. Hawking, 1975). Por último, la física dispone de los recursos matemáticos para comparar con toda

la precisión que se quiera distintas teorías físicas sobre un mismo objeto unas con otras y con los resultados experimentales; por ejemplo, el llamado formalismo parametrizado postnewtoniano (PPN) se utiliza para contrastar las teorías modernas de la GRAVITACIÓN con los resultados de la observación del sistema solar, sin cargar previamente la balanza a favor de ninguna de ellas. En cambio, si 'paradigma' significa, como quería Kuhn, un dechado individual de investigación científica, que combina y encarna concreta e inextricablemente teoría, métodos y estándares, sin que sea factible desentrañarlos y hacerlos explícitos, es claro que dos científicos embebidos en paradigmas diferentes, aunque por un rato piensen que se están comunicando, acabarán sintiendo cada uno la insuperable extrañeza del otro, sobre todo si entienden estar hablando del mismo tema. En tal caso, pues, no parece injusto hablar de la *inconmensurabilidad* —esto es, la radical incomparabilidad— de sus respectivos afanes. Por otra parte, cuando Kuhn (1970) desecha esta idea romántica de paradigma y la reemplaza con el concepto, diligentemente analizado, de MATRIZ DISCIPLINARIA, socava las bases de tal inconmensurabilidad, pues los distintos ingredientes de una matriz pueden seguramente evolucionar a distinto ritmo, sin que nunca haya que reemplazarlos de un solo golpe a todos. Entonces, como las fibras imbricadas en un cable, los elementos matriciales pueden sostener la continuidad de la historia de la ciencia, aunque ninguno dure para siempre.

independencia (A. *Unabhängigkeit*, F. *indépendence*, I. *independence*). Un enunciado B es independiente de otro enunciado A si y solo si B no es una consecuencia de A. Una fórmula φ es independiente de otra fórmula ψ si y solo si φ no es una consecuencia de ψ, es decir, si y solo si hay una interpretación $\Im$ tal que $\Im$ satisface ψ, pero $\Im$ no satisface φ. En general, una fórmula φ es independiente de un conjunto Γ de fórmulas si y solo si hay una interpretación $\Im$ tal que, para cada fórmula $\psi \in \Gamma$, $\Im$ satisface ψ, pero $\Im$ no satisface φ. Como la independencia es la negación de la consecuencia, puede representarse en el metalenguaje mediante el signo de consecuencia barrado. Así, $\Gamma \nvDash \varphi$ se lee 'φ es independiente de Γ'. Por tanto, $\Gamma \nvDash \varphi$ si y solo si no es el caso que $\Gamma \vDash \varphi$.

En la lógica de primer orden, probamos que una sentencia φ es consecuencia de un conjunto Γ de sentencias ofreciendo una deducción de φ a partir de premisas de Γ. Para probar que φ es independiente de Γ no nos sirve el cálculo deductivo, sino que debemos emplear una prueba semántica, en concreto, una prueba de independencia. Ofrecer una prueba de independencia de φ respecto a Γ significa indicar una interpretación $\Im$ que satisface todas las sentencias de Γ, pero no satisface φ. Para probar que la conmutatividad es independiente de los axiomas de la teoría de grupos hay que indicar un

GRUPO (una realización de los axiomas de la teoría de grupos) que no es conmutativo (que no satisface la conmutatividad de su operación binaria), es decir, un grupo no abeliano. Para probar que el axioma de las paralelas es independiente de los demás axiomas de la geometría euclídea hay que indicar una realización de estos axiomas en la que no se verifica el axioma de las paralelas. Por ejemplo, Klein propuso una realización del plano hiperbólico (que satisface la negación de este axioma y la afirmación del resto) en el interior de un círculo euclídeo. En este modelo las cuerdas del círculo desempeñan el papel de las líneas rectas. Evidentemente, si λ es una cuerda (una "recta"), dado un punto P dentro del círculo pero fuera de λ, hay infinitas cuerdas del círculo que pasan por P pero no cortan a λ. Por tanto, no se cumple el axioma de las paralelas. Para probar que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos ZFC hay que ofrecer una realización o modelo de ZFC que no verifica la hipótesis del continuo, por ejemplo el modelo construido por Cohen (1963/1964) mediante *FORCING* para obtener ese resultado.

A veces se dice que un sistema axiomático es independiente si y solo si cada uno de sus axiomas es independiente de los demás. Para mostrar en detalle un ejemplo trivial, consideremos los tres axiomas (reflexividad, simetría y transitividad) que definen una relación de equivalencia: 1) $\forall x Rxx$, 2) $\forall x \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx)$, 3) $\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \Rightarrow Rxz)$. 1) es independiente de 2) y 3), como muestra $\langle \{1\}, \mathfrak{I}(R) = \emptyset \rangle$, que no satisface 1), pues $\langle 1,1 \rangle \notin \emptyset$. 2) es independiente de 1) y 3), como muestra $\langle \{0,1\}, \mathfrak{I}(R) = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 0,1 \rangle\} \rangle$, que no satisface 2), pues $\langle 0,1 \rangle \in \mathfrak{I}(R)$, pero $\langle 1,0 \rangle \notin \mathfrak{I}(R)$. 3) es independiente de 1) y 2), como muestra $\langle \{0,1,2\}, \mathfrak{I}(R) = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\} \rangle$, que no satisface 3), pues $\langle 0,1 \rangle \in \mathfrak{I}(R)$ y $\langle 1,2 \rangle \in \mathfrak{I}(R)$, pero $\langle 0,2 \rangle \notin \mathfrak{I}(R)$.

independiente estadísticamente (A. *statistisch unabhängig*, F. *statistiquement indépendante*, I. *statistically independent*). Sea $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathrm{p} \rangle$ un espacio aleatorio (↗CÁLCULO DE PROBABILIDADES). Los eventos A y B son *estadísticamente independientes* si y solo si $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A)\mathrm{p}(B)$. En tal caso, obviamente, si $\mathrm{p}(A) > 0$, la PROBABILIDAD CONDICIONAL de B dado A es igual a la probabilidad de B: $\mathrm{p}(B|A) = \mathrm{p}(B)$.

indéxico (A. *Indexzeichen*, F. *terme indexical*, *expression indexicale*, I. *indexical*). Una expresión cuya referencia o DENOTACIÓN depende de las circunstancias en que se la usa, según reglas propias de la lengua a que pertenece. Son indéxicos los pronombres personales, ciertos pronombres y adjetivos demostrativos, ciertos adverbios de lugar y tiempo, etc. Por ejemplo, 'yo' designa en castellano a quien habla, 'hoy' al día en que habla, 'aquí' al lugar

donde habla; 'este río' puede ser el Amazonas o el Manzanares según que la frase se pronuncie en Manaos o en Madrid. A menudo una misma expresión funciona como indéxico en un contexto y no en otro; por ejemplo, 'pasado' es indéxico en 'el siglo pasado', pero no en 'pasado el susto, recuperó la compostura'.

inducción (A. *Induktion*; F. *induction*, I. *induction*). Cicerón llamó *inductio* al género de inferencias de lo particular a lo general que Aristóteles llamaba ἐπαγωγή. Así entendida, la *inducción* comprende (1) la inducción "completa", que infiere atributos de una clase finita de objetos (cosas, procesos, sucesos) partiendo de premisas que describen a cada uno de sus miembros; (2) la inducción "ampliativa", que infiere atributos de una clase posiblemente infinita de objetos a partir de información sobre una muestra parcial de estos, y (3) las diversas formas de inducción matemática (↗INDUCCIÓN ARITMÉTICA, INDUCCIÓN TRANSFINITA, REGLA OMEGA DE INFERENCIA). Obviamente, de estas tres clases de inducción solo la (1) y la (3) tienen fuerza demostrativa. Por eso Galileo no tuvo empacho en decir (sin prestar atención al tercer caso) que la inducción es imposible (en el segundo) o inútil (en el primero). Por su parte, en esos mismos años, Francis Bacon vio en la inducción ampliativa el método principal del pensamiento científico, cuya meta es descubrir nuevas verdades, no limitarse a repetir en sus conclusiones la información ya incluida en sus premisas. Hume (1739) cuestionó seriamente el valor cognitivo que cabe atribuir a la inducción sin renunciar al empirismo. Pero el empirista J. S. Mill (1843) la puso en el centro de su lógica de la ciencia, organizándola en "cuatro métodos de indagación experimental", a saber, los métodos de concordancia y diferencia, de residuos y de variación concomitante.

En la literatura actual, el término *inducción* suele cubrir "todos los casos de argumento no demostrativo, en que la verdad de las premisas, aunque no implica la verdad de la conclusión, pretende ser una buena razón para creer en esta" (Black, 1967). En esta acepción, por cierto, el término excluye la inducción matemática. En cambio, incluye todas las formas de INFERENCIA ESTADÍSTICA, las cuales asignan a sus conclusiones una probabilidad determinada, en general mayor que 0 y menor que 1, dependiente del alcance y la probabilidad de sus premisas. Basándose en la concepción *lógica* de la probabilidad, introducida por Keynes (1921), varios autores quisieron establecer una lógica rigurosa de la inferencia inductiva. Según dicha concepción, el respaldo que un conjunto de premisas Ψ brinda a una conclusión C depende de las relaciones conceptuales entre C y los miembros de Ψ y se expresa cuantitativamente como la PROBABILIDAD CONDICIONAL de C dado Ψ. Carnap, que trabajó más que nadie en el desarrollo de una lógica inductiva basada en estas ideas, nunca logró formularla para un lenguaje formal lo bastante rico para

servir de vehículo al pensamiento científico; además, ninguna de sus lógicas inductivas permite atribuirle una probabilidad mayor que 0 a una ley universal de la naturaleza, dado cualquier número finito de premisas particulares. Hintikka ha formulado una lógica inductiva que confiere probabilidad positiva a proposiciones universales; pero, como otras invenciones de su versátil ingenio, ella ha generado más admiración que convencimiento. El proyecto de una lógica inductiva en el sentido de Keynes y Carnap ya casi no tiene partidarios, y la mayoría de los interesados en la inducción favorecen hoy el BAYESIANISMO. Desde este punto de vista, la inferencia inductiva se ocupa solo en mejorar la credibilidad —la probabilidad subjetiva— de sus conclusiones.

Siguiendo el ejemplo de Popper (1935), muchos filósofos de la ciencia niegan toda utilidad a la inducción propiamente tal como vía para enriquecer el conocimiento científico; mas no por ello rechazan la inferencia estadística basada en una concepción objetivista de la probabilidad. Para aplicar este modo de inferencia en una situación dada, hay que concebir esta situación como un espacio aleatorio (↗CÁLCULO DE PROBABILIDADES). En la medida en que este concepto sea justo, las relaciones necesarias impuestas por él sustentan las conclusiones de la inferencia estadística.

inducción aritmética (A. *arithmetische Induktion*, F. *induction arithmétique*, I. *arithmetical induction*). Forma de razonamiento indispensable para conocer las propiedades de los NÚMEROS NATURALES. Una inferencia por *inducción aritmética* —o *inferencia aritmética inductiva*— concluye que *todos* los números naturales poseen cierta propiedad *P*, a partir de dos premisas, a saber, (*a*) la *base inductiva*, que asevera que el primer número natural (*uno* o *cero*, según el sistema adoptado) posee la propiedad *P*; y (*b*) el *paso inductivo*, que asevera el siguiente enunciado condicional: *si un número natural cualquiera n posee la propiedad P, entonces también el número siguiente n* + 1 *posee la propiedad P*. Generalmente, en las demostraciones por inducción aritmética, la base inductiva es obvia y todo el esfuerzo de la prueba se va en establecer el paso inductivo.

A fines del siglo XIX, Poincaré sostuvo que aceptamos la inducción aritmética en virtud de una intuición que es la raíz de todo el saber matemático. Por ese mismo tiempo, Frege (1884) propuso una definición de número natural de la cual se deduce sin más que la inducción aritmética es una forma de inferencia legítima. Si esa definición se juzga viable, la aritmética elemental descansa entera en definiciones y las formas ordinarias de inferencia, y consta por lo tanto exclusivamente de lo que Frege llamó proposiciones ANALÍTICAS.

inducción electromagnética (A. *elektromagnetische Induktion*, F. *induction électromagnétique*, I. *electromagnetic induction*). Fenómeno descubierto por Faraday en 1831, que consiste en la aparición de una corriente eléctrica en un circuito conductor que se mueve a través de un campo magnético, o reposa en un campo magnético cambiante. Faraday, que concebía el campo magnético como un haz de "líneas de fuerza", entendió haber mostrado que la FUERZA ELECTROMOTRIZ generada en el circuito era proporcional a la tasa de variación del número de líneas circundado por él.

En términos de la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA, esta LEY DE FARADAY puede formularse como sigue. Sean S una superficie circundada por la curva cerrada C, con elemento de línea ds. Denotamos con $\mathbf{B}$ el campo magnético, con $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a S y con $\mathbf{E}_C$ el campo eléctrico tangente a C generado por la variación de $\mathbf{B}$. Entonces, la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ generada en C por la variación del campo magnético $\mathbf{B}$ está dada por

$$\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E}_C \cdot ds = -k\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

donde el símbolo $\oint_C$ indica que la integral se toma sobre toda la curva cerrada C. Para que surja la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ no es menester que la curva C coincida con un circuito conductor, pero la presencia de éste da lugar a que $\mathscr{E}$ produzca en él una corriente eléctrica.

inducción transfinita (A. *transfinite Induktion*, F. *induction transfinie*, I. *transfinite induction*). La inducción transfinita sobre los ORDINALES es una generalización del razonamiento por inducción aritmética sobre los números naturales. En vez de limitarnos a los ordinales finitos (los números naturales), aplicamos la inducción a todos los ordinales, sin excepción.

En 1928 John von Neumann demostró un teorema general de inducción transfinita que justifica las demostraciones por inducción sobre todos los números ordinales. Constituye una potente generalización al ámbito transfinito de la inducción aritmética. En efecto, si queremos probar que todos los números naturales tienen cierta propiedad, basta con probar que el 0 la tiene y que, suponiendo que un número natural n cualquiera la tenga, también la tiene n+1. El teorema de recursión transfinita nos permite definir una función para todos los ordinales, definiéndola para el 0 y, suponiendo que ya esté definida para un ordinal cualquiera α, definiéndola para $\alpha+1$ y, suponiendo que ya esté definida para todos los ordinales menores que un ordinal límite λ, definiéndola para λ. (Recuérdese que un ordinal límite es un ordinal que no es el 0 ni el sucesor de otro, es decir, $\lambda \neq \alpha+1$ para todo α.) Algo similar ocu-

rre con las demostraciones por inducción transfinita. De hecho, este tipo de definiciones y demostraciones se usan constantemente en teoría de conjuntos, pero solo a partir de la prueba de von Neumann tal uso está justificado.

Para los números ordinales vale el *principio del mínimo elemento*: si hay algún ordinal que tenga cierta propiedad, entonces hay un mínimo ordinal que tiene esa propiedad. Este principio se formaliza en primer orden mediante el siguiente esquema:

$$\exists\alpha\varphi(\alpha) \Rightarrow \exists\alpha(\varphi(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta\in\alpha \Rightarrow \neg\varphi(\beta))) \quad \text{para cualquier fórmula } \varphi(x)$$

De aquí se sigue en especial que cada conjunto no vacío de ordinales posee un mínimo elemento.

A partir del principio del mínimo elemento se puede probar fácilmente la primera versión del principio de inducción transfinita, que dice que si ocurre que siempre que todos los ordinales menores que un ordinal dado tienen una propiedad, ese ordinal también la tiene, entonces todos los ordinales tienen esa propiedad, lo cual puede formalizarse mediante el siguiente esquema:

$$\forall\alpha(\forall\beta(\beta\in\alpha \Rightarrow \varphi(\beta)) \Rightarrow \varphi(\alpha)) \Rightarrow \forall\alpha\varphi(\alpha) \quad \text{para cualquier fórmula } \varphi(x)$$

De aquí se sigue la versión canónica del *teorema de inducción ordinal transfinita*: si algo vale para el 0 y, suponiendo que valga para un ordinal cualquiera, vale para su sucesor, y, suponiendo que valga para todos los ordinales menores que un límite, vale para el límite, entonces eso vale para todos los ordinales. El siguiente esquema lo formaliza:

$$\varphi(0) \wedge \forall\beta(\varphi(\beta) \Rightarrow \varphi(\beta+1)) \wedge \forall\lambda(\forall\gamma\,(\gamma\in\lambda \Rightarrow \varphi(\gamma)) \Rightarrow \varphi(\lambda)) \Rightarrow \forall\alpha\varphi(\alpha)$$
$$\text{para cualquier fórmula } \varphi(x).$$

inercia (A. *Trägheit*, F. *inertie*, I. *inertia*). Kepler adoptó la voz latina *inertia* ('pereza, indolencia') para referirse a la supuesta tendencia natural de los cuerpos a reposar inmóviles; pero pronto empezó a usársela para designar la tendencia de un cuerpo que no es frenado ni impulsado por fuerzas externas a continuar en reposo o en movimiento uniforme en línea recta (↗MARCO DE REFERENCIA, MASA, PRINCIPIO DE INERCIA).

inferencia estadística (A. *statistischer Schluss*, F. *inférence statistique*, I. *statistical inference*). Razonamiento que aplica conceptos y emplea recursos del CÁLCULO DE PROBABILIDADES para sacar consecuencias acerca de una población o de una de sus partes. Se emplea sobre todo para inferir la probabilidad de los eventos de cierta clase de la frecuencia relativa con que se los ve

ocurrir. Por ejemplo, si se conoce la mortalidad de los distintos grupos de habitantes de un país a cada edad, se puede determinar por inferencia estadística la probabilidad de que de un bibliotecario de 38 años de edad fallezca en el curso de los próximos veinte y calcular según ella la prima anual que debe pagar por un seguro de vida que se mantendrá vigente durante ese tiempo. Si se conoce el número de pernos defectuosos que contiene una muestra ALEATORIA de la producción semanal de una fábrica de pernos, se puede determinar por inferencia estadística el porcentaje de pernos defectuosos en dicha producción semanal con un margen de error y un grado de confianza calculables (↗INDUCCIÓN).

ínfimo (A. *Infimum*, F. *borne inférieure*, I. *infimum, greatest lower bound*). La máxima cota inferior. Sea $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ un ORDEN PARCIAL. Sea $B \subseteq A$. Si el conjunto de las cotas inferiores de B tiene un máximo, esta máxima cota inferior se llama el *ínfimo* de B, abreviadamente *inf*(B). Sea $c \in A$. $c = inf(B)$ si y solo si (1) c es una cota inferior de B, y (2) $\forall y(y$ es una cota inferior de $B \Rightarrow y \preccurlyeq c)$. B tiene a lo sumo un ínfimo. Es decir, B puede tener o no tener un ínfimo, pero si lo tiene, éste es único. Lo mismo ocurre con el mínimo. Una diferencia importante entre el mínimo y el ínfimo de B es que el mínimo ha de ser elemento de B y el ínfimo puede no serlo.

infinito (A. *unendlich*, F. *infini*, I. *infinite*). En la matemática y la ciencia teórica con frecuencia manejamos conjuntos infinitos. Un conjunto A es *infinito* si y solo si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes (y, por tanto, las satisface todas): (1) A no es finito; (2) A no es biyectable con un ordinal $\alpha \in \omega$; (3) $|A| \notin \omega$; (4) $|A| \geq \aleph_0$; (5) la cardinalidad de A es un ÁLEF, es decir, hay un ordinal α tal que $|A| = \aleph_\alpha$; (6) no hay una relación R tal que tanto R como su inversa R^{-1} bien-ordenen A; (7) A es biyectable con algún subconjunto propio suyo (es decir, con algún subconjunto de A distinto de A). Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es infinito, pues es biyectable con subconjuntos propios suyos, como, por ejemplo, con el subconjunto de los números pares mediante la biyección $f : n \mapsto 2n$. La condición (7) es la definición de infinitud de Dedekind. La prueba de su equivalencia con las demás requiere el axioma de elección. Mediante un número finito de aplicaciones de operaciones conjuntistas como la unión, la intersección, el producto cartesiano y el conjunto potencia a conjuntos finitos obtenemos siempre de nuevo conjuntos finitos. El infinito es inalcanzable desde lo finito. Para llegar al infinito se requiere dar un salto mortal, introduciendo un axioma específico (el AXIOMA DE INFINITUD) que explícitamente postule la existencia de un conjunto infinito.

inflación [en cosmología] (A. *Inflation*, F. *inflation*. I. *inflation*). Hipotético proceso de expansión exponencial del Universo temprano durante un brevísimo periodo, algo así como entre 10^{-37} y 10^{-35} s después del *Big Bang*. A partir de 10^{-35} s la evolución del Universo coincidiría con la formulada en el modelo cosmológico estándar, del que los modelos inflacionarios serían meras extensiones (hacia atrás). Una región espacial minúscula de tamaño menor que la longitud de Planck (unos 10^{-35} m), incluida en un único dominio de horizonte, se habría inflado hasta dar lugar a todo el Universo observable. Esta expansión exponencial habría sido inducida por la transición de un campo escalar Φ desde un estado de falso vacío a otro de vacío real. Si Φ es constante, el tensor de energía de este campo es

$$_{\Phi}T_{ab} = -V(\Phi)g_{ab}$$

donde $V(\Phi)$ es el potencial del campo y g_{ab} es la métrica. Por tanto, si $V(\Phi) \neq 0$, $V(\Phi)$ actúa como una constante cosmológica positiva que induce la expansión. Se supone que la métrica FRW del modelo estándar del *Big Bang* sigue siendo aplicable durante el periodo de inflación, durante el cual el modelo inflacionario es casi idéntico al modelo de De *Sitter*, que incorpora una constante cosmológica positiva y describe un universo vacío en expansión exponencial. Para un valor casi constante del potencial del campo que induce la inflación $V(\Phi)$, el factor de escala a del modelo estándar crece exponencialmente, $a(t) = e^{Ht}$, donde H es el parámetro de Hubble, que toma el valor

$$H = \left(\frac{8\pi G V(\Phi)}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Alan Guth presentó el primer modelo inflacionario en 1981. Con él pretendía resolver tres presuntos problemas del modelo estándar del *Big Bang*: (1) *El problema de los* MONOPOLOS MAGNÉTICOS. La teorías de gran unificación (entre las interacciones fuerte y electrodébil) predicen que la ruptura de simetría que condujo a la separación de dichas fuerzas produjo una enorme cantidad de monopolos magnéticos supermasivos, que deberían estar ahora en todas partes. Sin embargo, no se encuentran. La inflación explica la situación, arrojándolos fuera del horizonte. (2) *El problema de la homogeneidad* o *del horizonte*. Si miramos a puntos opuestos del firmamento, lo que vemos es relativamente homogéneo. Sin embargo, los conos del pasado de dichos puntos no se solapan, siempre han estado en dominios de horizonte distintos y, por tanto, nunca han podido interactuar. O bien aceptamos condiciones iniciales homogéneas o no hay manera de explicar cómo temperaturas distintas podrían homogeneizarse. La inflación soluciona el problema creando todo el

Universo observable a partir de un solo y minúsculo dominio de horizonte, en el que el equilibrio termodinámico podía fácilmente establecerse. (3) *El problema de la planitud*. Parece que el Universo actual es espaciamente plano, al menos aproximadamente. De nuevo, o bien se acepta la condición inicial de que era plano desde el principio o no se entiende cómo un universo muy curvado pudo aplanarse. La inflación lo explica por el efecto de la gran expansión exponencial, que reduce drásticamente cualquier curvatura. Cuanto más inflamos un globo, tanto más se reduce la curvatura en su superficie, hasta que llega a parecer una superficie plana. De todos modos, (1) sólo es un problema para los que acepten las teorías de gran unificación y no hay razón empírica alguna para aceptarlas; (2) y (3) sólo son problemas para quien rechace las condiciones iniciales. Más recientemente, una cuarta función se ha atribuido a la inflación: (4) dar cuenta del espectro de fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo, que se habrían producido como consecuencia de fluctuaciones cuánticas durante el periodo inflacionario y que posteriormente habrían servido de "semillas" para la condensación de las galaxias.

En el modelo originario de Guth, Φ era el campo de Higgs de una teoría concreta de gran unificación. Ese modelo hubo de ser abandonado, porque la transición desembocaba en un universo demasiado inhomogéneo. Más adelante, el campo Φ dejó de ser algún campo concreto de la física de partículas, para convertirse simplemente en el 'inflatón', es decir, cualquier campo escalar posible cuyo potencial cumpla las condiciones que se requieran del modelo inflacionario en cuestión. Según el tipo de inflatón que se considere y cómo se defina su potencial, se obtienen modelos inflacionarios distintos e incompatibles. Así al modelo de la "vieja" inflación de Guth (1981) han seguido los "nuevos" modelos inflacionarios de Linde (1982) y de Albrecht y Steinhardt (1982). Posteriormente Linde ha desarrollado diversos modelos caóticos y estocásticos, que no cabe considerar como simples extensiones del modelo estándar del *Big Bang*, pues en ellos nuestro *Big Bang* es un mero fenómeno local que produce un universo-burbuja (nuestro Universo observable) dentro de un superuniverso eternamente burbujeante, donde nuevos episodios de inflación generan constantemente nuevos universos-burbuja. Otros autores han presentado una gran variedad de modelos inflacionarios. Precisamente esta gran flexibilidad de los modelos inflacionarios, que permiten definir ad hoc el potencial del campo para acomodarlo a casi cualesquiera resultados posibles de las observaciones, hace problemática la contrastación empírica de esta familia de modelos.

información (A. *Information*, F. *information*, I. *information*). Solemos asociar la palabra 'información' al contexto de las noticias. Leemos la prensa para estar informados. Buscamos cierta información en la biblioteca o en In-

ternet. La información, en este sentido, es algo que se puede transmitir a distancia. Algunos ingenieros de telecomunicación de la Bell fueron los pioneros de la teoría matemática de la información (o de la comunicación). Su preocupación por transmitir más información a un menor costo por un mismo canal (una línea telefónica o telegráfica, por ejemplo) los llevó a analizar la noción de información. En 1924 uno de ellos, Nyquist, calculó la velocidad de la transmisión de los mensajes telegráficos como $V = K \cdot \log M$, donde K es una constante dependiente del número de modulaciones que el sistema puede transmitir por segundo y M es el número de signos de que dispone el sistema. En 1928 otro ingeniero de la Bell, Hartley, introdujo una medida de la cantidad de información transmitida por una señal s:

$$I(s) = \log (1/p(s))$$

donde $p(s)$ es la probabilidad de emisión de la señal s. Esta definición, llamada a perdurar, caracteriza la información como inversa de la probabilidad. Cuanto menos probable sea la señal, más información transmite. La información se identifica así con la sorpresividad. Estas ideas iniciales de Nyquist y Hartley fueron desarrolladas y sistematizadas por Shannon (1948), creador de la teoría de la información.

La fuente F de la información se representa mediante un conjunto finito de resultados o signos posibles $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y una distribución de probabilidad p en A, que atribuye a cada $a_i \in A$ un número real entre 0 y 1, de tal modo que $\sum_{i=1}^{n} p(a_i) = 1$. La autoinformación de un resultado o signo a_i se define como su sorpresividad:

$$I(a_i) = \log(1/p(a_i)) = -\log(p(a_i)).$$

La información transmitida por el mensaje es inversamente proporcional a la probabilidad del mensaje; por eso se define como el logaritmo de la probabilidad inversa. Aunque las probabilidades de los mensajes independientes se multiplican, queremos que la información transmitida por dos mensajes independientes sea igual a la suma de las informaciones transmitidas por cada uno de ellos por separado. El logaritmo es la función que nos permite transformar productos en sumas, puesto que $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, para cualesquiera números x, y.

La incertidumbre o sorpresividad media de la fuente F, llamada $H(F)$, se define como la media ponderada de las autoinformaciones:

$$H(F) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i) \cdot I(a_i) = -\sum^{n} p(a_i) \cdot \log p(a_i)$$

Von Neumann enseguida se dio cuenta de la llamativa semejanza de la definición de *H* con la fórmula de la ENTROPÍA de Boltzmann, por lo que aconsejó a Shannon llamarla entropía. Shannon siguió el consejo y llamó entropía a la medida *H* de la incertidumbre media de la fuente, lo cual ha sido criticado por muchos, que piensan que la medida *H* de la teoría de la información no tiene nada que ver (a pesar de la semejanza estructural de su fórmula) con la entropía termodinámica. Así, L. Tisza sugirió llamar a *H* no entropía, sino dispersión (de la distribución de probabilidad), con lo que sin duda se habrían evitado bastantes malentendidos.

La teoría de Shannon define de un modo preciso nociones tales como las de código, canal, ruido y equivocación, y las engarza en una serie importante de teoremas, como el *teorema fundamental de Shannon*: si la entropía de una fuente no excede la capacidad del canal, entonces es posible codificar los mensajes de la fuente de tal modo que éstos se transmitan por el canal con un número arbitrariamente pequeño de errores, es decir, con una equivocación tan pequeña como queramos, a pesar del ruido que puede afectar a la transmisión. Por el contrario, si la entropía de la fuente excede la capacidad del canal, no hay modo de conseguir esa reducción arbitraria de la equivocación. Cuando el teorema de Shannon nos dice que es posible encontrar un código para superar el ruido, no nos dice cómo encontrarlo, ni menos aún cómo implementarlo en la práctica, pero nos dice que tratar de conseguirlo es una empresa razonable. Cuando nos dice que no puede haber tal código, nos evita la pérdida de tiempo y esfuerzo que su quimérica búsqueda implicaría. En último término el teorema de Shannon nos dice que la información fiable es posible en un mundo poco fiable y que por medio de códigos adecuados podemos asegurar la perfección de la transmisión del mensaje a través de un medio imperfecto y ruidoso.

Desde los orígenes de la teoría, la información siempre se había definido en función de la probabilidad. Sin embargo, en 1962 Ingarden y Urbanik mostraron que también la probabilidad puede ser ella misma definida en función de la información (introducida esta última sin mención de aquélla, claro). Ambas son formalmente equivalentes, dado el contexto de la teoría de la medida. En 1965 y 1967 Kolmogorov desarrolló la teoría de la información sobre nuevas bases, definiendo sus conceptos sin referencia alguna a la probabilidad, pero usando la noción de MÁQUINA DE TURING e identificando la información contenida en un texto con su COMPLEJIDAD DE KOLMOGOROV.

La teoría matemática de la información de Shannon cumple perfectamente su cometido como análisis del proceso de la transmisión de señales, y en ese contexto precisa de un modo adecuado la noción de cantidad de información. Mucho más dudoso es que precise de modo alguno la noción de contenido de la información o información semántica. No parece ser la rareza es-

tadística de los signos que componen un mensaje lo que determine que éste sea más o menos significativo o el contenido de la información que transmita. Ya Shannon había advertido desde el principio sobre la irrelevancia de las consideraciones semánticas para el problema técnico de la transmisión. Y Weaver lo indicaba con toda claridad: "La palabra *información* en esta teoría se usa en un sentido especial que no es el habitual. En particular, no debe ser confundida con el significado. De hecho dos mensajes, uno de los cuales esté cargado de significado y el otro sea un mero sinsentido, pueden ser exactamente equivalentes desde el punto de vista de la información así entendida". Por ello no es de extrañar que filósofos y lingüistas hayan considerado que la noción de información que precisa la teoría matemática de la información no es la que ellos necesitan y hayan tratado de desarrollar teorías alternativas.

Ya en 1935 Karl Popper había expresado de un modo informal la idea de que un enunciado contiene tanta más información cuantas más posibilidades excluye. Esta noción fue luego ampliada y desarrollada por Carnap y Bar-Hillel al principio de los años cincuenta. Bar-Hillel lamentaba que el nombre de teoría de la información se generalizase para lo que en realidad era una teoría estadística de la transmisión de señales. Carnap y Bar-Hillel acuñaron la expresión "información semántica" para distinguirla de la noción empleada en la teoría de la comunicación. Los fonemas sueltos no contienen información semántica alguna; sólo el enunciado que componen es informativo. Pero, en el sentido de la teoría de Shannon, es cada señal —cada fonema— la que va añadiendo información a la ya aportada por la secuencia precedente de señales. Según Bar-Hillel, el contenido semántico de un enunciado es la clase de los estados posibles (o descripciones de estado) del universo excluidos por (o incompatibles con la verdad de) ese enunciado. El cálculo formal del contenido semántico resulta ser el mismo que el de la cantidad de información de Shannon, aunque su interpretación sea completamente distinta. El principal continuador de la teoría de la información semántica ha sido Hintikka, según el cual el contenido de información de un enunciado es el número de alternativas que excluye. Cuantas más excluye, tanto más informativo es. Cuantas más alternativas sean compatibles con el enunciado, tanto más probable y tanto menos informativo será éste. Así, aun suponiendo que la conjunción $(A \wedge B)$ y la disyunción $(A \vee B)$ sean ambas verdaderas, por razones puramente lógicas hay que concluir que $(A \wedge B)$ es más informativo que $(A \vee B)$, pues $(A \wedge B)$ excluye más alternativas (todas las que contienen $\neg A$ y todas las que contienen $\neg B$), mientras que $(A \vee B)$ sólo excluye las que contienen a la vez tanto $\neg A$ como $\neg B$. Esta noción de información no tiene nada que ver con la transmisión de señales. De todos modos comparte con la noción de Shannon la idea básica de que información es eliminación de incertidumbre.

Dretske (1981) usó la teoría de la información de Shannon para analizar cuestiones epistemológicas. Ello requería la dilucidación de la noción de *contenido de la información*. La definición de Dretske es relativa al conocimiento previo del receptor: una señal *s* transmite la información de que φ si y solo si la probabilidad condicional de φ, dado *C* (el conocimiento previo del receptor de la señal) y la llegada de *s*, es 1, pero, dado sólo *C*, es menor que 1:

$$\mathrm{Inf}(s) = \varphi \Leftrightarrow \mathrm{p}(\varphi | s \wedge C) = 1 \wedge \mathrm{p}(\varphi | C) < 1$$

Esta definición es muy sugestiva, pero Suppes la ha criticado porque exige una probabilidad igual a 1 (es decir, una seguridad absoluta) de φ, dada la llegada de la señal y el conocimiento previo, para la transmisión de la información; tal exigencia sería excesiva y poco realista.

Otra aportación filosófica de los años ochenta ha sido la semántica situacional de Barwise y Perry. Ambos autores partían de la noción de información objetiva, concebida como relación entre tipos de situaciones. Una situación S contiene información sobre otra situación *S′* si y sólo si hay una correlación sistemática entre las situaciones que tienen ciertos rasgos en común con S y las situaciones que tienen otros rasgos en común con *S′*. Dada esa correlación, podemos decir que la situación S significa la situación *S′*. El significado es, pues, una relación entre situaciones. Como consecuencia de la evolución biológica, los organismos han adquirido la capacidad de obtener cierta información (útil para ellos) acerca de situaciones ausentes a partir de la presente, detectando ciertos rasgos significativos de esa situación presente y explotándolos para obtener información acerca de las otras situaciones, gracias a estar sintonizados con las correspondientes correlaciones. Son esas correlaciones las que permiten el flujo de la información. El lenguaje no es una excepción. En concreto, el significado de una oración declarativa es una relación entre las situaciones en las que se profiere y las situaciones descritas por tales proferencias.

infradeterminación de las teorías por los hechos (A. *Unterbestimmung der Theorien durch die Tatsachen*, F. *sous-détermination des théories par les faits*, I. *underdetermination of theories by facts*). Hablando de la contrastación de las teorías físicas con los hechos de la experiencia, Duhem (1906) distingue entre los *hechos prácticos*, efectivamente percibidos y registrados, y los *hechos teóricos*, representaciones idealizadas de aquellos, apropiadas para la comparación con las predicciones de la teoría. Entre los fenómenos realmente constatados en el curso de un experimento y el resultado de este experimento, formulado por el físico, se intercala una elaboración intelectual muy

compleja que reemplaza un relato de hechos concretos con un juicio simbólico y abstracto. No puede haber adecuación entre el hecho teórico, precisamente determinado, y el hecho práctico, de contornos vagos e indecisos como todo lo que nos revelan nuestras percepciones. Otro tanto ocurre con los instrumentos mismos empleados en la experimentación. Su utilización científica demanda la sustitución de los objetos concretos que componen esos instrumentos por una representación abstracta y esquemática de los mismos, susceptible de integrarse en las deducciones y cómputos de la teoría física. Una cosa es, pues, el instrumento concreto que el físico maneja con sus manos; otra el modelo esquemático del mismo al que aplica las fórmulas de la física. De ahí que a un mismo hecho práctico pueda corresponder una infinidad de hechos teóricos diferentes.

innumerable (A. *überabzählbar*, F. *non dénombrable*, I. *uncountable*). Un conjunto es *innumerable* si y solo si no es NUMERABLE. Todos los conjuntos innumerables son infinitos, pero no a la inversa. Hay conjuntos infinitos, como el de los números enteros, que no son innumerables, sino numerables. Para que un conjunto sea innumerable se requiere, además de que sea infinito, que tenga más elementos que números naturales hay, es decir, que tenga una cardinalidad mayor que $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Referidas a un conjunto A, las siguientes expresiones son equivalentes entre sí: (1) A es innumerable. (2) A es infinito y A no es biyectable con $\mathbb{N}$, es decir, no hay una biyección o correspondencia biunívoca entre A y $\mathbb{N}$. (3) $|A| > |\mathbb{N}|$. (4) $|A| > \aleph_0$. Un conjunto que no es innumerable se llama numerable. No hay que confundir la noción de lo innumerable con la de lo no enumerable; la primera se refiere a la cardinalidad del conjunto; la segunda, a la computabilidad de la función que lo genera. Ningún conjunto innumerable es enumerable, pero no todo conjunto no enumerable es innumerable. Por ejemplo, el conjunto de las sentencias aritméticas verdaderas no es enumerable, pero tampoco es innumerable. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y el conjunto $\mathbb{C}$ de los complejos son innumerables. De todos modos, no todos los conjuntos innumerables tienen la misma cardinalidad; unos son más grandes que otros y tienen una cardinalidad mayor. Cantor probó que $|A| < |\wp A|$, de donde se sigue que si un conjunto infinito A es numerable, su conjunto potencia $\wp A$ es innumerable. Precisamente Cantor introdujo los números cardinales transfinitos, los ÁLEF, $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... $\aleph_\alpha$ ... para medir las diversas cardinalidades transfinitas, de las cuales solo la primera, $\aleph_0$, es numerable, mientras que todas las demás son innumerables.

instrumentalismo (A. *Instrumentalismus*, F. *instrumentalisme*, I. *instrumentalism*). John Dewey llamó instrumentalismo a su teoría de la investigación.

Concibió la inteligencia, el pensamiento y la ciencia como instrumentos tentativos al servicio de la acción, es decir, de la resolución de nuestros problemas prácticos. Más recientemente el instrumentalismo ha sido contrapuesto al REALISMO CIENTÍFICO. El realismo científico afirma que la realidad está ya de por sí estructurada de un cierto modo, que las teorías científicas descubren y describen esa estructura propia del mundo y que a cada término, concepto o parámetro de una teoría corresponde una parte o aspecto de la realidad extrateórica. El *instrumentalismo*, por el contrario, sostiene que las teorías son instrumentos conceptuales que nos sirven para hacer predicciones observacionales, para calcular valores medibles, para resolver problemas y diseñar experimentos y sistemas tecnológicos. En especial, según los instrumentalistas, no todos los términos de las teorías necesitan tener una referencia en la realidad extrateórica; algunos pueden ser meros artilugios de conveniencia, introducidos por su valor instrumental en la obtención de predicciones observacionales o en la resolución de problemas.

La polémica entre realismo e instrumentalismo es a veces conducida con ardor. Los sectarios de ambas posturas con frecuencia piensan que son incompatibles. Sin embargo, no está nada claro que lo sean. Y algunos pensadores incluso oscilan entre ambas. Putnam, por ejemplo, fue primero un decidido campeón del realismo científico, para convertirse luego en uno de sus críticos más agudos y acabar adoptando una postura cercana al instrumentalismo pragmatista. Parece obvio que las buenas teorías científicas son (entre otras cosas) instrumentos exitosos de predicción de observaciones y resolución de problemas. El realismo científico es una de las explicaciones posibles (quizás la mejor, pero no la única) de ese éxito instrumental de la ciencia. Por otro lado, gran parte del contenido semántico de las teorías científicas y de la ciencia en general, aunque no sea teórica, parece corresponder a aspectos de la realidad extrateórica. La geografía no inventa los continentes, y los planetas y sus satélites no son artefactos de la teoría astronómica. De hecho, hemos llegado a América y a la Luna y nuestras sondas han "aterrizado" en Venus y Marte. El éxito instrumental de la ciencia reafirma nuestra confianza en la verdad de sus tesis. Por eso las teorías científicas con aplicaciones tecnológicas gozan de mayor fiabilidad que las meramente especulativas. Por tanto, realismo e instrumentalismo, lejos de oponerse, se sostienen mutuamente y describen aspectos complementarios de la empresa científica.

Pensemos en un mapa cartográfico. Algunos elementos del mapa representan cosas existentes en la realidad extracartográfica y observables sobre el terreno, como los lagos, ríos o montañas. Otros elementos del mapa, como las curvas de nivel, representan aspectos de la realidad geográfica no directamente observables, pero medibles mediante aparatos, como la alti-

metría. Otros elementos del mapa, finalmente, como los paralelos y los meridianos, son meros artefactos del sistema de representación, a los que no corresponde nada en la realidad extracartográfica. Sin embargo, esos paralelos y meridianos resultan útiles para localizar las posiciones (por ejemplo, de los lagos observables) y para medir las distancias; tienen un valor instrumental. También las teorías científicas tienen sus artefactos de dudosa correspondencia extrateórica, como, para empezar, las estructuras matemáticas infinitas innumerables empleadas en su formulación. El espacio de Hilbert con que la mecánica cuántica representa un sistema atómico es un espacio vectorial complejo de infinitas dimensiones, algo que difícilmente puede considerarse como parte del mundo físico, aunque resulta sumamente útil para obtener predicciones estadísticas correctas de los resultados de los experimentos.

integral (A. *Integrale*, F. *intégrale*, I. *integral*). Arquímedes atribuye a Eudoxo el método que emplea para evaluar el área de una superficie plana circundada por una línea curva o el volumen de un cuerpo encerrado por una superficie curva. Conforme a ese método tal área o volumen se concibe como el límite a que converge, respectivamente, una SECUENCIA de áreas poligonales o de volúmenes poliédricos cuyos valores dependen de una fórmula palmaria. El concepto moderno de integral permite extender esta idea básica a la evaluación de cantidades de muy diversa índole y complejidad. El concepto fue inventado independientemente por Newton y Leibniz y 'racionalmente reconstruido' por Cauchy y Riemann. El concepto de integral de Riemann fue luego generalizado por Stieltjes. Poco más tarde, Lebesgue introdujo el concepto de integral que lleva su nombre. Este concepto, de importancia decisiva para la moderna matemática aplicada, amplió enormemente la clase de las funciones integrables. No cabe explicarlo aquí, pero definiremos, a modo de orientación, la integral de Riemann de una función acotada, con argumentos y valores reales.

Sea, pues, $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo cerrado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, tal que $|f(x)|$ es menor que un número N, para todo $x \in [a,b]$. Sean $x_0,\ldots, x_n$ números reales tales que $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$. Esta lista de números, que llamaremos *linderos*, divide el intervalo cerrado $[a,b]$ en subintervalos cerrados $[x_k,x_{k+1}]$. Marquemos cada subintervalo $[x_k,x_{k+1}]$ con un *hito*, esto es, un número cualquiera $\xi_k \in [x_k,x_{k+1}]$. Mediante una selección de linderos e hitos en $[a,b]$ se determina una *segmentación* σ de $[a,b]$. Los hitos de σ satisfacen la condición

$$a = x_0 \leq \xi_0 \leq x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n = b$$

En vez de $x_{k+1} - x_k$, escribimos Δx_k. El parámetro $\Delta(\sigma)$ de la segmentación σ es la mayor de las diferencias $\Delta x_0, \dots, \Delta x_{n-1}$. La *suma de Riemann* de la función f, correspondiente a la segmentación σ, es el número real

$$\mathscr{S}_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

El número real I es la *integral* (*de Riemann*) *de la función f sobre el intervalo* $[a,b]$ si existe, para cada número real positivo ε, un número real positivo δ tal que, para toda segmentación σ de $[a,b]$ con parámetro $\Delta(\sigma) < \delta$, $|I - \mathscr{S}_\sigma(f)| < \varepsilon$. En tal caso, se dice que la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *integrable*. La integral I se representa habitualmente mediante el símbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

Los números a y b se llaman, respectivamente, el *límite inferior de integración* y el *límite superior de integración*. La función $f(x)$ se llama el *integrando*. x es la *variable de integración*. Si $[a,b] \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathbb{R}$ y f es la restricción a $[a,b]$ de una función $g : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$, es común describir a la integral I arriba descrita como *la integral de g sobre* $[a,b]$, y designarla mediante el símbolo $\int_a^b g(x)dx$.

Nuestra función f es ciertamente integrable si es una FUNCIÓN CONTINUA y también puede serlo aunque sea discontinua. Pero una función fuertemente discontinua no será integrable según la definición de Riemann. Por ejemplo, no es integrable según ella la función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in [a,b]$, $\varphi(x) = 0$ si x es un número racional y $\varphi(x) = 1$ si x es un número irracional. En cambio, según la definición de Lebesgue, φ es integrable y la integral de φ sobre el intervalo $[a,b]$ es igual a $b - a$.

Explicaremos sumariamente el descubrimiento de Leibniz en que reposa la evaluación de integrales (o *cálculo integral*). Para ello, consideramos una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier intervalo cerrado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, la integral de $f\upharpoonright[a,b]$ sobre $[a,b]$ existe y se denota con $\int_a^b f(x)dx$. Se puede demostrar que existe un $\xi \in [a,b]$ tal que $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ (*teorema del valor medio*). Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida así:

$$F(u) = \int_0^u f(x)dx \text{ si } u \geq 0 \text{ y } F(u) = \int_u^0 f(x)dx \text{ si } u < 0$$

Es evidente que $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, de modo que para evaluar la integral de f sobre el intervalo $[a,b]$ basta calcular F en los límites de integración a y b. Ahora bien, la DERIVADA de F es la función $\frac{dF}{du}$ definida por la correspondencia

$$u \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{F(u+h) - F(u)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_u^{u+h} f(x)dx$$

y el teorema del valor medio implica, obviamente, que el límite de la derecha es igual a $f(u)$. En otras palabras, la función F definida arriba es una función cuya derivada es el integrando f, o, como suele decirse, F es la *antiderivada* de f. Como la derivada es una función lineal y la derivada de una constante es igual a 0, si F es la antiderivada de f, también lo es F + C, donde C es una constante indeterminada llamada *constante de integración*, la cual, en problemas concretos, suele estar determinada por las circunstancias del caso. En todo caso, la indeterminación de C no afecta a la evaluación de $\int_a^b f(x)dx$, ya que $F(a) - F(b) = F(a) + C - F(b) - C$.

inteligencia artificial (A. *künstliche Intelligenz*, F. *intelligence artificielle*, I. *artificial intelligence*). Intento de diseñar máquinas o "sistemas expertos" capaces de realizar tareas que en los seres humanos requieren inteligencia. Su precursor inmediato fue Turing, que en 1950 planteó la pregunta de si puede pensar una máquina y propuso un criterio preciso para responderla, conocido como el *test de Turing*. Supongamos que estamos frente a un terminal que nos permite comunicarnos por escrito con dos "interlocutores" que no vemos, de los cuales uno es un ser humano y el otro es una máquina, digamos, un computador. Podemos hacer las preguntas que queramos y leer las respuestas de ambos. Si, a pesar de todo, somos incapaces de distinguir al interlocutor maquinal del humano, podemos decir que la máquina es capaz de pensar. La expresión 'inteligencia artificial' fue acuñada seis años después en la convicción de que había que extender la noción de inteligencia del dominio humano o animal al de los sistemas artificiales capaces de resolver problemas, como los computadores. Ese mismo año 1956 la inteligencia artificial (o AI, según sus iniciales inglesas) se constituyó como disciplina académica en un seminario de verano organizado en Dartmouth por los matemáticos Minski y McCarthy, al que asistieron también el economista Simon y el físico Newell, entre otros. Todos ellos estaban interesados en inventar máquinas que razonasen inteligentemente. La inteligencia artificial ha tratado de construir máquinas que lleven a cabo tareas computables, como decidir la validez de una fórmula proposicional o probar automáticamente teoremas de una teoría for-

mal. También ha tratado de diseñar sistemas capaces de aprender por ensayo y error o de corregir sus propias hipótesis en función de la nueva información disponible, o de manejar nociones borrosas o imprecisas. Otra tarea típica de la AI es el desarrollo de sistemas expertos, que incorporen el saber profesional de un médico, por ejemplo, y permitan diagnosticar las enfermedades y recetar los tratamientos de un modo automático.

intencionalidad (A. *Absichtlichkeit* (*a*), *Intentionalität* (*b*), F. *intentionalité*, I. *intentionality*).
a. Una acción se dice *intencional* cuando obedece a una *intención* o propósito; el adjetivo se aplica también a los resultados de tales acciones ('daño intencional' *vs.* 'daño accidental'). El sustantivo abstracto *intencionalidad* designa esta característica de las acciones y sus efectos.
b. En una segunda acepción, inspirada en el uso escolástico de la palabra latina *intentio*, la *intencionalidad* es el atributo distintivo de los FENÓMENOS psíquicos (en oposición a los físicos), según Brentano (1874). El mismo consiste en la referencia a un objeto, existente o no, la cual, en efecto, parece ser común a percepciones y fantasías, recuerdos y esperanzas, deseos y decisiones, conceptos y juicios. Husserl hizo de la *intencionalidad* en este sentido el carácter propio de la conciencia y el tema central de su FENOMENOLOGÍA.

interpretación (A. *Interpretation*, F. *interprétation*, I. *interpretation*). Las fórmulas de un lenguaje formal son sólo secuencias finitas de signos que adquieren significado y valor veritativo una vez que las interpretamos. Interpretar un lenguaje formal consiste en especificar un conjunto no vacío como universo de la interpretación (al que se referirán las variables ligadas), en asignar un individuo de ese universo a cada variable individual y en asignar entidades adecuadas (individuos, relaciones y funciones) a los parámetros del lenguaje (nombres, relatores y functores). Las constantes lógicas (conectores, cuantificadores y signo de identidad) no necesitan ser interpretadas por una interpretación, pues su significado está fijado de una vez por todas por la lógica del lenguaje (en el caso de la lógica clásica de primer orden, por las reglas semánticas, comunes a toda interpretación, enunciadas en el párrafo subsiguiente). El sistema formado por el universo y las referencias de los parámetros en una interpretación dada constituyen el sistema sobre el que interpretamos el lenguaje en esa interpretación. Este sistema es homólogo al lenguaje, por definición, pues siempre tiene tantas entidades distinguidas como parámetros tiene el lenguaje y a cada parámetro del lenguaje corresponde una entidad del mismo tipo y aridad en el sistema (por ejemplo, a un relator ternario corresponde una relación ternaria).

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con tipo de semejanza σ (donde σ es una secuencia de números que indica el número, tipo y aridad de los parámetros de $\mathcal{L}$) y sea $\mathcal{A}$ un sistema con universo A y homólogo a $\mathcal{L}$, es decir, con el mismo tipo de semejanza σ. Una interpretación $\mathfrak{I}$ sobre $\mathcal{A}$ asigna individuos de A a las variables individuales de $\mathcal{L}$ y asigna entidades distinguidas de $\mathcal{A}$ a los parámetros de $\mathcal{L}$. Sea g: Variables $\rightarrow A$ una asignación de individuos de A a las variables individuales. Sean ... c_j ... los nombres de $\mathcal{L}$, sean ... R_i ... los relatores de $\mathcal{L}$ y sean ... f_j ... los functores de $\mathcal{L}$. Sea $\mathcal{A} = \langle A, \ldots \mathfrak{I}(c_j)\ldots, \ldots \mathfrak{I}(R_i)\ldots, \ldots \mathfrak{I}(f_k)\ldots\rangle$, donde para cada nombre c_j, $\mathfrak{I}(c_j) \in A$, para cada relator n-ario R_i, $\mathfrak{I}(R_i) \in \wp A^n$ y para cada functor m-ario f_j, $\mathfrak{I}(f_j)$: $A^m \rightarrow A$. Entonces, $\mathfrak{I} = \langle g, \mathcal{A}\rangle$ es una interpretación de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{A}$.

La interpretación $\mathfrak{I}$ asigna un individuo a cada término del lenguaje $\mathcal{L}$: (1) $\mathfrak{I}(x) = g(x)$ para cada variable x. (2) $\mathfrak{I}(f\tau_1 \ldots \tau_n) = \mathfrak{I}(f)\mathfrak{I}(\tau_1)\ldots\mathfrak{I}(\tau_n)$. Para cada fórmula φ del lenguaje $\mathcal{L}$ está determinado si la interpretación $\mathfrak{I}$ satisface φ (le asigna el valor veritativo 1) o no satisface φ (le asigna el valor veritativo 0): (1) $\mathfrak{I}$ satisface $\tau_1 = \tau_2$ si y solo si $\mathfrak{I}(\tau_1) = \mathfrak{I}(\tau_2)$. (2) $\mathfrak{I}$ satisface $R\tau_1 \ldots \tau_n$ si y solo si $\langle\mathfrak{I}(\tau_1) \ldots \mathfrak{I}(\tau_n)\rangle \in \mathfrak{I}(R)$. (3) $\mathfrak{I}$ satisface $\neg\alpha$ si y solo si $\mathfrak{I}$ no satisface α. (4) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface α y $\mathfrak{I}$ satisface β. (5) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface α o $\mathfrak{I}$ satisface β. (6) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \Rightarrow \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface β o $\mathfrak{I}$ no satisface α. (7) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ si y solo si ($\mathfrak{I}$ satisface α y $\mathfrak{I}$ satisface β) o ($\mathfrak{I}$ no satisface α y $\mathfrak{I}$ no satisface β). (8) $\mathfrak{I}$ satisface $\forall x\varphi$ si y solo si para cada $a \in A$ la interpretación $\mathfrak{I}^{x:a} = \langle g', \mathcal{A}\rangle$ satisface φ, donde g' asigna el individuo $a \in A$ a la variable x y coincide con g en todas sus otras asignaciones. (9) $\mathfrak{I}$ satisface $\exists x\varphi$ si y solo si para algún $a \in A$, $\mathfrak{I}^{x:a}$ satisface φ.

Sea Γ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$. $\mathfrak{I}$ satisface Γ si y solo si, para cada $\varphi \in \Gamma$, $\mathfrak{I}$ satisface φ. Sea Σ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$. Si la interpretación $\mathfrak{I}$ sobre $\mathcal{A}$ satisface Σ, entonces cualquier interpretación sobre $\mathcal{A}$ satisface Σ. Por tanto, la satisfacción de un conjunto de sentencias solo depende del sistema sobre el que la interpretamos, no de la interpretación particular (es decir, no depende de su concreta asignación de individuos a las variables). Por ello podemos decir que el sistema $\mathcal{A}$ satisface Σ. Si el sistema $\mathcal{A}$ satisface Σ, decimos que $\mathcal{A}$ es una REALIZACIÓN de Σ. Mediante ciertos ajustes, los conceptos explicados en este párrafo se pueden aplicar a lenguajes de orden superior al primero, o regidos por algunas lógicas no clásicas.

intersección (A. *Durchschnitt*, F. *intersection*, I. *intersection*). La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los objetos que son elementos de A y de B. Simbólicamente: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Para

cualquier conjunto A, la *gran intersección* de A es el conjunto de los elementos que pertenecen a todos los elementos de A; simbólicamente,

$$\bigcap A = \{x : \forall y (y \in A \Rightarrow x \in y)\}$$

En el caso particular de la gran intersección de una FAMILIA de conjuntos suele omitirse el adjetivo 'gran'.

intervalo (A. *Intervall*, F. *intervale*, I. *interval*). El *intervalo abierto* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. El *intervalo cerrado* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Análogamente, se definen los intervalos *abierto-cerrado* $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ y *cerrado-abierto* $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. El producto cartesiano de n copias del intervalo (a,b) es el *cubo abierto* $(a,b)^n$ (↗TOPOLOGÍA ESTÁNDAR DE $\mathbb{R}^n$).

intuicionismo (A. *Intuitionismus*, F. *Intuitionnisme*, I. *Intuitionism*). Corriente radicalmente constructivista e intelectualista de la filosofía de la matemática, fundada por Brouwer a principios del siglo XX. El intuicionismo rechaza el infinito actual y gran parte de la matemática clásica, que lo presupone. La matemática clásica acepta como objeto de estudio cualquier estructura matemática que pueda definirse consistentemente. El intuicionismo, por el contrario, solo acepta la existencia de aquellos objetos matemáticos que puedan ser construidos paso a paso en el pensamiento del matemático individual y solo les atribuye aquellas propiedades que puedan ser inmediatamente captadas por su intuición intelectual. En el tiempo finito del que disponemos solo podemos acabar de construir objetos finitos. Los objetos infinitos, como las series numéricas, solo están dados potencialmente, como procesos inacabados de construcción. Brouwer aceptaba la idea kantiana de una intuición a priori del tiempo, aunque rechazaba la del espacio. La intuición fundamental es la del paso del tiempo, de la sucesión de los instantes, de la iteración de las unidades.

La matemática es concebida por el intuicionismo como una actividad de construcción introspectiva, que se realiza sin palabras ni símbolos, por mera intuición. El lenguaje y la lógica solo sirven para comunicar a los demás y para registrar los resultados de la propia actividad psicológica. En cualquier caso, el intuicionismo rechaza la aplicación general de la lógica clásica, que solo valdría para los objetos o conjuntos finitos, ya terminados o construidos, pero no para los infinitos (potenciales), que nunca acabamos de construir. En particular, los intuicionistas rechazan el principio del *TERTIUM NON DATUR*, que dice que todo enunciado es verdadero o falso, que para cada A, A o no A. En efecto, conciben la verdad como la prueba y la falsedad como la refutación

y muchos enunciados relativos a conjuntos infinitos no han sido probados ni refutados. Por ejemplo, la primera conjetura de Goldbach dice que todo número par $n \geq 4$ es igual a la suma de dos números primos. En efecto, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11$, $16 = 3 + 13$, etc. Pero quizás haya un número par muy grande que no sea igual a la suma de dos primos. Hasta ahora nadie lo ha encontrado, pero tampoco nadie ha probado que no lo haya. No hemos logrado probar ni refutar la conjetura de Goldbach. Por tanto, según los intuicionistas, no es verdadera ni falsa. Este y otros muchos contraejemplos mostrarían que el *tertium non datur* deja de valer cuando hablamos de conjuntos infinitos. A pesar de la desconfianza de Brouwer hacia la lógica y el lenguaje, su discípulo Heyting codificó en 1930 las pautas de inferencia intuicionistamente aceptables, dando así lugar a la LÓGICA INTUICIONISTA.

A finales del siglo XIX Kronecker criticaba el uso de los números irracionales por Weierstrass y Dedekind, rechazaba las definiciones no constructivas en la aritmetización del análisis y se oponía frontalmente al infinito actual y a la teoría cantoriana de conjuntos. Puede considerársele como el precursor del intuicionismo. También los matemáticos franceses Poincaré, Hadamard, Borel, Baire y Lebesgue sostuvieron opiniones más o menos afines al intuicionismo y en particular rechazaban las pruebas indirectas de existencia, con las que se probaba la existencia de un objeto sin construirlo, simplemente mostrando que de la hipótesis de su inexistencia se sigue una contradicción.

De todos modos, fue Brouwer quien a partir de 1907 formuló el programa intuicionista con toda su fuerza y radicalidad. Weyl y Heyting y posteriormente Troelstra, entre otros, contribuyeron a su desarrollo. Y el filósofo Dummett lo ha defendido elocuentemente.

El programa intuicionista requiere abandonar el análisis matemático habitual y sustituirlo por una nueva matemática intuicionista, que emplea nuevas nociones, como la de secuencia de elecciones. El problema de las paradojas desaparece, pues son meras combinaciones de palabras a las que no corresponde construcción mental alguna. Durante cierto tiempo, el exigente intuicionismo parecía ofrecer la opción más segura para el desarrollo consistente de las matemáticas. Sin embargo, en 1932 Gödel probó que hay una manera de traducir la lógica y la aritmética clásica a la intuicionista, de tal manera que cualquier fórmula clásica válida es también intuicionistamente válida y a cualquier posible contradicción en la teoría clásica correspondería otra contradicción en la intuicionista. En otras palabras, Gödel probó la consistencia relativa de la lógica y la aritmética clásica respecto a la intuicionista. Por tanto, la segunda no es más segura que la primera. Este resultado redujo considerablemente el atractivo del programa intuicionista. Además, la mate-

mática intuicionista tiene que renunciar a gran parte de la riqueza, potencia y elegancia de la matemática clásica, así como a muchos de sus resultados y métodos. Además, en los casos en que los teoremas clásicos coinciden con los intuicionistas, las pruebas de los mismos resultados se vuelven mucho más complicadas. Por todo ello el intuicionismo no ha logrado gran aceptación en la comunidad científica y sigue siendo cultivado por una fracción minoritaria de los matemáticos, sobre todo en Holanda. De todos modos, la prueba de que un resultado clásico puede también obtenerse con los austeros medios intuicionistas es interesante por sí misma, con independencia de lo que uno pueda pensar de esta peculiar filosofía de la matemática.

inversa (A. *inverse*, F. *inverse*, I. *inverse*). Sea R una RELACIÓN binaria. La *inversa* de R, escrita R^{-1}, es la relación $\{\langle x,y\rangle : \langle y,x\rangle \in R\}$. Por tanto, $wR^{-1}z$ si y solo si zRw. $(R^{-1})^{-1} = R$. La inversa de la relación $<$ entre números es la relación $>$. La inversa de la relación de consecuencia entre fórmulas es la relación de implicación. Sea $f : A \rightarrow B$ una FUNCIÓN inyectiva con recorrido $f[A] = G$. La *inversa* de f, escrita f^{-1}, es una función $f^{-1} : G \rightarrow A$ que tiene como dominio el recorrido de f y como recorrido el dominio de f y tal que para cada $y \in G$, $f^{-1}(y) = x$ si y solo si $f(x) = y$. La composición de la inversa de una función con esa función es la función identidad: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$. La inversa de la multiplicación por una constante a es la división por a, la inversa de la adición de una constante a es la sustracción de a, y, entre los números reales positivos, la inversa del cuadrado es la raíz cuadrada.

isometría (A. *Isometrie*, F. *isométrie*, I. *isometry*). Sea $\langle S,\delta\rangle$ un ESPACIO MÉTRICO. Una *isometría* de este espacio es una FUNCIÓN biyectiva $f : S \rightarrow S$ que preserve las distancias, de modo que, para cualesquiera puntos x, $y \in S$, $\delta(f(x),f(y)) = \delta(x,y)$.

isomorfismo (A. *Isomorphismus*, F. *isomorphisme*, I. *isomorphism*). Dos sistemas (o estructuras concretas) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ con universos posiblemente distintos A y B pueden parecerse estructuralmente en ciertos aspectos, pero no en otros. En el caso extremo de que sean estructuralmente idénticos decimos que se trata de sistemas isomorfos entre sí. Son distinguibles por su "materia", por su universo, pero no por su forma: su forma es la misma, son iso-morfos. La relación de isomorfía solo está definida entre sistemas con el mismo tipo de semejanza (es decir, con el mismo número de relaciones y funciones y las mismas aridades en ambos sistemas). Un isomorfismo entre sistemas del mismo tipo de semejanza es una biyección del universo del primer sistema en el universo del segundo que preserva las relaciones y funciones de dichos sistemas. Empecemos por un ejemplo sencillo. Sean $\mathcal{A} = \langle A,R,f\rangle$ y $\mathcal{B} = \langle B,S,g\rangle$

dos sistemas tales que A y B son conjuntos no vacíos, R es una relación binaria en A, S es una relación binaria en B, $f: A \times A \to A$ es una operación en A y g es una operación en B. Un *isomorfismo* entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es una biyección h de A en B que conserva las relaciones y operaciones, es decir, tal que para cada $x, z, y, w \in A$: (1) xRz si y solo $h(x)Sh(z)$ y (2) $f(x,y) = w$ si y solo si $g(h(x),h(z)) = h(z)$. Dos sistemas son *isomorfos* entre sí si y solo si existe un isomorfismo entre ellos. Para expresar que dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos escribimos abreviadamente $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. La relación de isomorfía entre sistemas es reflexiva, simétrica y transitiva. Se trata, pues de una relación de equivalencia. El hecho de que dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean isomorfos implica en especial que sus respectivos universos A y B tienen la misma cardinalidad.

Pasando ahora a la definición general, consideremos dos realizaciones cualesquiera de una misma ESTRUCTURA abstracta: $\mathcal{A} = \langle A, O_1, \ldots, O_m \rangle$ y $\mathcal{B} = \langle B, Q_1, \ldots, Q_m \rangle$. Un *isomorfismo* de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ es una función biyectiva $f: A \to B$, tal que, para cada entero positivo $r \leq m$, $Q_r = f_r(O_r)$, donde f_r es la función determinada por f —según se indica enseguida— en el conjunto A_r donde se ha escogido a O_r. Conforme a la definición de ESTRUCTURA, el conjunto A_r donde se ha escogido O_r puede siempre describirse mediante una fórmula en que figura h veces el nombre de A, j veces el operador $\wp$ y k veces el operador $\times$, donde $h \geq 1$ y $j + k = n \geq 0$. Diremos que un conjunto que puede describirse de este modo es un conjunto de altura n y base A. Si f es una función cuyo dominio es A, f determina en cada conjunto Ω de altura n y base A una función que, para mayor claridad, aquí llamaremos f_Ω (aunque lo normal es llamarla f). f_Ω se define recursivamente así. Si $n = 0$, entonces $\Omega = A$ y $f_\Omega = f$. Si $n > 0$, hay dos posibilidades: o bien (i) $\Omega = \wp\Psi$, donde Ψ es un conjunto de altura $n - 1$ y base A; o bien (ii) $A_r = \Delta \times \Gamma$, donde Δ y Γ son conjuntos de base A y altura menor que n. En el caso (i), f_Ω es la función que asigna a cada $U \subseteq \Omega$ su imagen $f_\Psi[U]$, por la función f_Ψ que f determina en Ψ. En el caso (ii), f_Ω es la función que asigna a cada $\langle v,w \rangle \in \Delta \times \Gamma$, el par $\langle f_\Delta(v), f_\Gamma(w) \rangle$, donde f_Δ y f_Γ son las funciones determinadas por f en Δ y Γ, respectivamente.

Si f es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, la función inversa f^{-1} es obviamente un isomorfismo de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$. Dos estructuras se dicen *isomorfas* si existe un isomorfismo de una a la otra. En ciertos casos, la misma índole de las estructuras permite seleccionar —entre los muchos isomorfismos que admiten— un *isomorfismo canónico* bien determinado, cuya existencia justifica la identificación, elemento por elemento, de ambas estructuras (↗DIFEOMORFISMO, HOMEOMORFISMO).

isótopos (A. *Isotopen*, F. *isotopes*, I. *isotopes*). Si dos o más elementos químicos tienen el mismo NÚMERO ATÓMICO pero distinta MASA ATÓMICA, se dice que son *isótopos*. El núcleo de sus respectivos átomos contiene el mismo nú-

mero de protones, pero distinto número de neutrones. Como el número de protones del núcleo atómico es igual al número de electrones en un átomo no ionizado, del cual dependen a su vez las propiedades químicas, los isótopos comparten estas propiedades y por lo tanto ocupan el mismo lugar en la TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS. De ahí el término 'isótopo' (del griego ἴσος τόπος, 'igual lugar'). Los isótopos se designan con el mismo símbolo, precedido de un exponente numérico que indica el total de protones y neutrones en el núcleo respectivo (por ejemplo, el metal llamado *plata* es una mezcla de ^{107}Ag y ^{109}Ag). Con excepción de los isótopos del *hidrógeno* (^{1}H), llamados *deuterio* (^{2}H) y *tritio* (^{3}H), los isótopos se designan con el mismo nombre, seguido del número en cuestión (por ejemplo, uranio-235, uranio-238).

J

jerarquía acumulativa [de los conjuntos] (A. *kumulative Hierarchie*, F. *hiérarchie cumulative*, I. *cumulative hierarchy*). Hacia 1925-1930 von Neumann y Zermelo introdujeron la jerarquía acumulativa como una manera transparente de visualizar el universo conjuntista, concebido como el resultado de un proceso inacabable que, partiendo del conjunto vacío, va generando nuevos conjuntos a partir de otros ya obtenidos anteriormente mediante la aplicación repetida de las operaciones de conjunto potencia y gran unión. La generación se produce paso a paso, siguiendo la serie de los ordinales. En cada paso, indexado por el ordinal α, se obtiene un nuevo escalón, $V(\alpha)$. Esto nos permite definir por recursión transfinita la siguiente función:

$V(0) = \emptyset$
$V(\alpha+1) = \wp V(\alpha)$ — para cualquier ordinal α
$V(\lambda) = \sup\{V(\beta): \beta < \lambda\} = \bigcup_{\beta < \lambda} V(\beta)$ — para cualquier ordinal límite λ

La gran unión de todos estos escalones, $\bigcup_{\alpha\in\Omega} V(\alpha)$, constituye la jerarquía acumulativa. El AXIOMA DE REGULARIDAD equivale a decir que cada conjunto está en alguno de estos escalones, $\forall x \exists \alpha (x \in V(\alpha))$, lo cual determina el RANGO del conjunto. También equivale a identificar el universo conjuntista V con la jerarquía acumulativa, $V = \bigcup_{\alpha\in\Omega} V(\alpha)$. Mientras Frege y Russell pensaban en los conjuntos básicamente como las extensiones de los conceptos, los lógicos y matemáticos actuales tienden a pensar en ellos más bien como los componentes de la jerarquía acumulativa.

joule. Unidad internacional de TRABAJO y ENERGÍA. 1 *joule* (1 J) es igual al trabajo realizado por una fuerza de 1 NEWTON cuyo punto de aplicación se desplaza la distancia de 1 METRO en la dirección de la fuerza (1 J = 1 N · m).

julio (A. *Joule*, F. *joule*, I. *joule*). ↗JOULE.

K

kelvin. Unidad termodinámica de TEMPERATURA. 1 *kelvin* (1 K) es igual a la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua, esto es, de aquella temperatura a la cual el agua, el hielo y el vapor de agua pueden coexistir en un recipiente cerrado.

kilogramo (A. *Kilogramm*, F. *kilogramme*, I. *kilogram*). Unidad de MASA del SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES de medida. 1 *kilogramo* (1 kg) es igual a la masa del prototipo internacional de platino e iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (Sèvres, París), en las condiciones especificadas en la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1889.

L

lagrangiano (A. *Lagrangesche Funktion*, F. *lagrangien*, I. *Lagrangian function*). Sea $\mathcal{S}$ un sistema mecánico clásico con n grados de libertad (↗MECÁNICA CLÁSICA). Si las fuerzas externas que actúan sobre $\mathcal{S}$ son derivables de un potencial o un potencial generalizado U, y T designa la energía cinética del sistema, el *lagrangiano* de $\mathcal{S}$ es la función $L = T - U$. Conforme al PRINCIPIO DE HAMILTON, la evolución de $\mathcal{S}$ entre dos instantes t_1 y t_2 trascurre necesariamente de modo que la integral $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ sea estacionaria sobre la curva representativa de dicha evolución, esto es, tenga sobre dicha curva un valor extremo, mayor o menor que el que tiene sobre cualquier otra curva que trace un camino levemente distinto de t_1 a t_2. La condición necesaria y suficiente para que este requisito se cumpla es que L satisfaga las ECUACIONES DE EULER Y LAGRANGE para el sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

(donde $q_1, \ldots, q_n$ son las coordenadas generalizadas de posición de $\mathcal{S}$).

Como se indica bajo CÁLCULO DE VARIACIONES, en la literatura matemática suele llamarse *lagrangiano* a cualquier función análoga a la descrita, que cumpla el requisito señalado.

La física del siglo XX, motivada por el poder y la elegancia del principio de Hamilton, ha definido lagrangianos apropiados para las más diversas teorías y situaciones. Ello ha permitido derivar de un principio variacional las ECUACIONES DE MAXWELL de la electrodinámica clásica y las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN de la relatividad general. En las últimas décadas, ha sido una regla heurística casi estándar en la formulación de TEORÍAS CUÁNTICAS DE CAMPOS que primero se defina un lagrangiano del cual luego se derivan las ecuaciones diferenciales de la teoría, cuyas soluciones se contrastarán con la experiencia. En todos estos casos en que se trata de campos, esto es, de sistemas físicos con infinitos grados de libertad, lo que se defi-

ne es en rigor una *densidad lagrangiana* $\mathcal{L}$ dependiente del valor θ(r) del campo y sus derivadas en cada punto r del espacio; integrándola sobre este se obtiene el lagrangiano $L = \int \mathcal{L} d^3\mathbf{r}$ que figura en el enunciado del principio de Hamilton.

lema de interpolación de Craig (A. *Craigs Lemma*, F. *lemma d'interpolation de Craig*, I. *Craig's interpolation lemma*). ↗TEOREMA DE INTERPOLACIÓN.

lenguaje de una teoría (A. *Sprache der Theorie*, F. *langage d'une théorie*, I. *language of a theory*). Cada teoría formal T es un conjunto de sentencias formadas según las reglas de construcción de fórmulas a partir de ciertos parámetros (constantes individuales, functores y predicados) que constituyen el vocabulario de la teoría. El conjunto de todas las fórmulas formables a partir de ese vocabulario, tanto si son teoremas de la teoría como si no, constituye el lenguaje de la teoría, $\mathcal{L}$(T). El lenguaje de una teoría siempre está incluido en el lenguaje de cualquier extensión de esa teoría. Si Σ es una extensión de T, entonces $\mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(\Sigma)$. En la práctica, solemos empezar con una teoría formulada en su vocabulario primitivo y luego vamos ampliando su lenguaje a base de introducir definiciones de nuevos símbolos o conceptos, pasando así a extensiones definicionales cada vez más amplias de la teoría originalmente dada. Obviamente, toda teoría está incluida en su lenguaje, $T \subseteq \mathcal{L}(T)$. La inversa no ocurre si la teoría es consistente. Sin embargo, una teoría contradictoria es idéntica a su lenguaje. T es consistente si y solo si $T \neq \mathcal{L}(T)$. T es contradictoria si y solo si $T = \mathcal{L}(T)$.

lenguaje formal (A. *formale Sprache*, F. *langage formel*, I. *formal language*). Los seres humanos tenemos la capacidad lingüística innata de aprender y usar cualquier lengua natural a la que estemos expuestos durante nuestra infancia. Estas lenguas (como el inglés, el español o el quechua) son instrumentos flexibles y versátiles de comunicación, que se prestan a una enorme variedad de usos: sirven para cantar, para transmitir órdenes o noticias, para cortejar, insultar, halagar, consolar, enseñar, gastar bromas, dormir a los niños, enardecer a las masas, etc. A pesar de ello y como contrapartida, los lenguajes naturales son excesivamente blandos, ambiguos, imprecisos y dependientes del contexto como para ser instrumentos óptimos de expresión y comunicación de los resultados de la ciencia y de la matemática. En esa misión son a veces complementados con ventaja por otros instrumentos de comunicación artificiales, los lenguajes formales, definidos ad hoc para llevar a cabo la tarea de que se trate en cada caso de un modo más simple, eficiente y preciso. Como su mismo nombre indica, una lengua o lenguaje natural es

un instrumento de comunicación fundamentalmente oral, aunque sus mensajes puedan ser transcritos, mientras que el lenguaje formal es esencialmente escrito.

Los lenguajes formales se llaman lenguajes, pues sirven para codificar, transmitir y almacenar todo tipo de ideas e informaciones, y se llaman formales, pues sus oraciones son fórmulas, es decir, secuencias de símbolos (ideográficos, no fonéticos) construidas de acuerdo con reglas formales. También los gramáticos generativos tratan de reducir a reglas explícitas la construcción espontánea de las oraciones de una lengua natural por sus hablantes, pero tal gramática generativa es más bien un programa de investigación de gran dificultad y solo parcialmente realizado, mientras que la gramática de un lenguaje formal está dada de un modo explícito y trivial desde el principio. Por eso todas las nociones gramaticales o sintácticas son decidibles en un lenguaje formal: siempre se puede determinar de un modo automático y en un número finito de pasos si una determinada fila de signos es o no un término o una fórmula y qué tipo de término o de fórmula, etc. A veces incluso permite la simulación de procesos como el razonamiento o la comprensión semántica mediante manipulaciones (o reescrituras) de las fórmulas en función de su mera forma. Por eso no es de extrañar que tengan tantas aplicaciones en el mundo de la computación.

Aunque los lenguajes formales son imprescindibles para la programación de los computadores, nadie ha propuesto que los seres humanos los adopten para su intercomunicación personal y ni siquiera para escribir libros o artículos. Son instrumentos especializados, que tenemos a nuestra disposición en el armario conceptual, del que solo los sacamos cuando los necesitamos para precisar alguna idea o analizar alguna prueba o resolver algún problema. Pasa como con el sacacorchos, que no pretende sustituir a la mano, pero resulta útil para descorchar botellas. Ya Frege, el fundador de la lógica moderna, comparaba en 1882 el lenguaje ordinario con la mano, y su conceptografía formal con la herramienta: "Los defectos señalados tienen su fundamento en una cierta blandura y maleabilidad del lenguaje, que por otro lado es la condición de su desarrollo y de su múltiple aplicabilidad. El lenguaje puede ser comparado en este sentido con la mano, que, a pesar de su adaptabilidad a todo tipo de tareas, a veces no nos basta. Por eso nos creamos manos artificiales, herramientas para tareas específicas, que trabajan más precisamente de lo que podría hacer la mano. ¿Cómo es posible tal precisión? Por la rigidez de la herramienta, por la inmutabilidad de sus partes, es decir, por las propiedades cuya ausencia en la mano explica su versatilidad. Tampoco nos basta el lenguaje de palabras. Necesitamos un sistema de signos, del que cualquier ambigüedad esté ausente, y a cuya estricta forma lógica no se le pueda escapar el contenido".

La lógica aspira a un grado de precisión frecuentemente incompatible con la vaguedad del lenguaje ordinario y solo alcanzable en su plenitud mediante el uso de lenguajes formales. La lógica no pretende sustituir a la lingüística ni dar cuenta de todas las sutilezas, matices, usos y razonamientos del lenguaje ordinario, sino solo de los austeros y precisos modos de expresión y razonamiento que se usan en la ciencia y la matemática (y en la filosofía con pretensiones de claridad). Por ello, el significado de las constantes lógicas no siempre se corresponde perfectamente con el de las expresiones ordinarias con que las parafraseamos. Por ejemplo, los conectores o constantes lógicas de negación, disyunción y condicional tienen significados unívocos y precisos, pero que no siempre corresponden a la multiplicidad de usos que hacemos de 'no', 'o' y 'si' en el lenguaje coloquial. El significado de las constantes lógicas viene fijado por su definición semántica, no por su paráfrasis en el lenguaje ordinario, que sirve de mera orientación. Por ejemplo, en la lógica no hay ningún conector que corresponda exactamente a la construcción 'si..., entonces...' del lenguaje ordinario, de igual modo que tampoco en la matemática hay conceptos que correspondan exactamente a 'muchos' o 'pocos' de la lengua corriente y ni siquiera en la física hay un término que corresponda al de 'trabajo' en el lenguaje ordinario. En mecánica también decimos 'trabajo', pero en general no estamos hablando de lo mismo. La traducción entre lenguajes siempre presenta problemas y se dejan en el tintero aspectos de la lengua traducida. De todos modos, aunque es imposible traducir un chiste o una arenga al lenguaje formal, es posible traducir un texto matemático o científico corto sin que se pierda nada de interés para la ciencia o la matemática. La dificultad que a veces sentimos al intentar traducir un contenido científico al lenguaje formal con frecuencia procede de que el texto original deja que desear en cuanto a claridad y precisión, en cuyo caso el proceso de traducción al lenguaje formal se acompaña de una clarificación de nuestras propias ideas.

Cada lenguaje formal $\mathcal{L}$ es el conjunto de todas las fórmulas que se pueden construir de acuerdo con su gramática a partir de cierto alfabeto o vocabulario o conjunto de signos primitivos, que incluye los parámetros (predicados, functores o conceptos) peculiares del lenguaje, además de las constantes lógicas (conectores y cuantificadores), las variables y los signos auxiliares (como paréntesis) comunes a los diversos lenguajes formales del mismo nivel lógico. Una TEORÍA formal T es un conjunto de teoremas formulables con cierto vocabulario y clausurado respecto a la relación de CONSECUENCIA. El conjunto de todas las fórmulas gramaticalmente admisibles que se pueden construir con ese vocabulario constituye el lenguaje de esa teoría. Por tanto, cada teoría formal T es un subconjunto de su lenguaje formal, $T \subseteq \mathcal{L}(T)$. Este subconjunto es propio, es decir, $T \neq \mathcal{L}(T)$, si la teoría es consistente, e impropio, es decir, $T = \mathcal{L}(T)$, si la teoría es contradictoria. Un lenguaje formal

$\mathcal{L}'$ es una extensión de otro lenguaje $\mathcal{L}$ si y solo si todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ son fórmulas de $\mathcal{L}'$, es decir, si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. Así, el lenguaje formal de la teoría de conjuntos es una extensión del lenguaje de la lógica de primer orden, que a su vez es una extensión del lenguaje de la lógica proposicional. Las teorías de la física o de la economía matemáticas son extensiones de sus teorías matemáticas subyacentes, y lo mismo puede decirse de sus correspondientes lenguajes formales. El lenguaje de la mecánica clásica es una extensión del lenguaje del análisis matemático y del álgebra lineal. Los lenguajes formales también pueden clasificarse por el máximo orden de la cuantificación que admiten: lenguajes de orden cero, de primer orden, de segundo orden, etc. Cada orden o nivel lógico tiene su correspondiente lógica clásica, que aplica su noción de consecuencia a todos los lenguajes de ese nivel.

Todos los lenguajes tienen limitaciones de las que rara vez somos conscientes y que en el lenguaje ordinario afloran, por ejemplo, en forma de paradojas y malentendidos. El mayor triunfo de la lógica y la metamatemática ha consistido en ser capaces de descubrir, explorar y demostrar con todo rigor el alcance de sus propias limitaciones y de las limitaciones de los lenguajes formales que utilizan. Así, el TEOREMA DE INCOMPLETUD de Gödel nos desvela las limitaciones de la formalización en la aritmética, el TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM señala los límites de la caracterización unívoca (hasta isomorfía) de las estructuras matemáticas. Además, importantes desarrollos en la matemática pura, desde el análisis no estándar hasta los nuevos resultados obtenidos en teoría de conjuntos en los últimos setenta años, como la independencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo respecto de los otros axiomas, serían inconcebibles sin el uso esencial de los correspondientes lenguajes formales.

leptón (A. *Lepton*, F. *lepton*, I. *lepton*). Partícula elemental con spin ½ que no siente la interacción nuclear fuerte. Por tanto, los leptones son fermiones. Hay seis tipos de leptones: electrón, muón, tauón, neutrino electrónico, neutrino muónico y neutrino tauónico (↗NÚMERO LEPTÓNICO).

ley de Boyle y Mariotte (A. *Boyle-Mariottesches Gesetz*, F. *loi de Mariotte*, I. *Boyle's Law*). Relación entre la presión p y el volumen V de un gas, establecida por Boyle en 1662 e, independientemente, por Mariotte en 1676. Según lo comprobado experimentalmente por ambos, a temperatura constante, el producto pV es constante. Esta relación simple no subsiste a grandes presiones y la física actual la acepta como característica del GAS IDEAL, un modelo que funciona satisfactoriamente a presiones y temperaturas corrientes.

ley de Coulomb (A. *Coulombsches Gesetz*, F. *loi de Coulomb*, I. *Coulomb's Law*). Ley fundamental de la electrostática. En virtud de ella, la fuerza eléctrica que ejerce una partícula cargada sobre otra es directamente proporcional al producto de las cargas respectivas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las partículas, y tiene la dirección de la recta que une ambas partículas. Si q_1 y q_2 son las dos CARGAS ELÉCTRICAS, **r** es un vector de magnitud r que va de la primera partícula a la segunda, y **F** es la fuerza que aquella ejerce sobre esta, la *ley de Coulomb* se expresa, en unidades del SISTEMA INTERNACIONAL, así:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3}$$

donde la *constante eléctrica* (o permitividad del vacío) ε_0 es igual a 8,854 187 817 × 10^{-12} farads por metro o, equivalentemente, a 8,854 187 817 × 10^{-12} $C^2N^{-1}m^{-2}$ (valor exacto).

ley de Faraday (A. *Faradaysches Gesetz*, F. *loi de Faraday*, I. *Faraday's Law*). Se le da este nombre, por un lado, a la ley de la INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA descubierta por Faraday en 1831; por otro, a la *ley de la electrólisis* establecida por él en 1833 y que puede formularse sumariamente así: las masas de sustancia química separadas por electrólisis son proporcionales a la carga eléctrica que ha atravesado el electrolito; en particular, la masa separada por unidad de carga es proporcional al equivalente químico de la sustancia en cuestión (esto es, al cociente entre su PESO ATÓMICO y su valencia).

ley de Gay-Lussac (A. *Gay-Lussacsches Gesetz*, F. *loi de Gay-Lussac*, I. *Charles's Law*). Relación entre el volumen V y la temperatura T de un gas publicada por Gay-Lussac en 1802, pero observada años antes por su compatriota Charles. A presión constante, el cociente V/T es constante. Esta relación simple no subsiste a temperaturas muy bajas y hoy se acepta solo como característica del GAS IDEAL, un modelo que funciona satisfactoriamente a presiones y temperaturas corrientes.

ley de la gravitación universal de Newton (A. *Newtonsches Gravitationsgesetz*, F. *loi de la gravitation universelle de Newton*, I. *Newton's Law of Gravity*). Ley natural con la que Newton (1687) pudo dar cuenta a la vez de los movimientos planetarios y de la caída de los cuerpos graves sobre la Tierra. Con arreglo a ella, si una partícula de masa m_1 está situada a una distancia r de una partícula de masa m_2, cada una experimenta una fuerza dirigida hacia la otra y de magnitud proporcional a $(m_1 m_2)/r^2$. Si **r** es un vector

de magnitud r dirigido desde la primera partícula hacia la segunda, la fuerza **F** ejercida sobre esta última está dada por

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3}$$

donde G es la CONSTANTE DE GRAVITACIÓN.

ley de los grandes números (A. *Gesetz der grossen Zahlen*, F. *loi des grands nombres*, I. *law of large numbers*). Llámase así a ciertos teoremas del CÁLCULO DE PROBABILIDADES que permiten deducir, de la probabilidad de un evento E de cierto tipo, la casi certeza de otro evento E' que envuelve un número muy grande de eventos del mismo tipo que E. Según algunos filósofos, hay también una *ley natural de los grandes números*, corroborada por la experiencia, que sería el fundamento de la aplicabilidad del cálculo de probabilidades en las ciencias empíricas.

La llamada *ley débil de los grandes números*, demostrada por Jacques Bernoulli (1713), se refiere a una SECUENCIA de eventos estadísticamente INDEPENDIENTES, de un mismo tipo (por ejemplo, jugadas sucesivas con una ruleta, que ha de reemplazarse, al menor desgaste, con una copia exacta del dispositivo original). Sea $\mathrm{p}(a)$ la probabilidad de que uno de esos eventos tenga la propiedad a (por ejemplo, que la bolita de la ruleta se detenga en el número 25). Sea $r_n(a)$ el número de eventos con la propiedad a en un total de n eventos del tipo en cuestión. Entonces, la *frecuencia relativa* $f_n(a)$ con que ocurre la propiedad a es el cociente $r_n(a)/n$. El teorema de Bernoulli dice que, en tal caso, por pequeño que sea el número real $\varepsilon > 0$, la probabilidad de que ε sea mayor que la diferencia entre $f_n(a)$ y $\mathrm{p}(a)$ tiende a la certeza cuando n crece indefinidamente:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|f_n(a) - \mathrm{p}(a)| < \varepsilon) = 1$$

(La diferencia tipográfica entre **P** y **p** indica que se trata de distribuciones de probabilidad definidas en espacios aleatorios diferentes.)

Llámase *ley fuerte de los grandes números* a un teorema demostrado en 1917 por Cantelli (el mismo nombre se da también a otros teoremas afines). Su explicación adecuada requiere conceptos que no tienen cabida aquí (cf. Révész, 1969). La indicación siguiente se refiere al caso especial de una secuencia de eventos como la considerada en el párrafo anterior. Entónces, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, con el incremento indefinido del número n de eventos registrados, no solamente converge a 1 la probabilidad de que ε exceda la diferencia absoluta entre $\mathrm{p}(a)$ y la frecuencia relativa $f_n(a)$ de a en la serie total de

esos eventos (teorema de Bernoulli). *Además*, según el teorema de Cantelli, es infinitamente improbable que no sea finito el conjunto de todos los enteros positivos k, tales que $\varepsilon \leq |f_k(a) - \mathrm{p}(a)|$. Esto significa que, con probabilidad 1, la diferencia $|f_n(a) - \mathrm{p}(a)|$ deviene y *permanece* pequeña al crecer n. Dicho con más precisión: para todo par de números reales positivos ε y δ, hay un entero positivo r tal que $(1 - \delta)$ es menor que la probabilidad de que se cumplan a la vez las m desigualdades siguientes (para cualquier entero positivo m):

$$|f_{r+k}(a) - \mathrm{p}(a)| < \varepsilon \qquad (k = 1,\ldots, m)$$

ley de Ohm (A. *Ohmches Gesetz*, F. *loi de Ohm*, I. *Ohm's Law*). Relación establecida por Ohm en 1826 entre la la corriente eléctrica I que pasa por un conductor y la diferencia de potencial ΔV entre los extremos de este. Conforme a la *ley de Ohm* ambas cantidades son proporcionales: $\Delta V = RI$. El factor de proporcionalidad R se llama *resistencia*, y depende del material del conductor, su longitud, sección y temperatura. La unidad internacional de resistencia, igual a 1 voltio por ampere, se llama *ohm* (1 Ω = 1 V/A).

ley de Planck (A. *Plancksches Strahlungsgesetz*, F. *loi de Planck*, I. *Planck's Law*). ↗RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO.

ley natural (A. *Naturgesetz*, F. *loi naturelle*, I. *law of nature*). La expresión 'ley de la naturaleza' irrumpe en la literatura filosófica como un oxímoron que Platón pone en boca de Calicles (*Gorgias*, 483E), pero luego fue tomada muy en serio, sobre todo por pensadores cristianos, a quienes les parecía normal que el Creador del Universo le hubiese también dictado leyes, como Solón a Atenas. Los fundadores de la ciencia moderna se proponen justamente descubrir estas leyes, y Descartes incluso infiere su segunda "ley del movimiento" —la conservación del producto de la masa por la velocidad— de la presunta constancia de la voluntad divina. Con la progresiva secularización de la ciencia, el término *ley natural* dejó de evocar la imagen de un Legislador y entre los filósofos y científicos empiristas llegó a significar meramente una regularidad del acontecer. Para ellos, sin embargo, el descubrimiento de las leyes naturales, así entendidas, siguió siendo la principal meta de la ciencia. Es comprensible que lo sintiesen así, pues el conocimiento de tales regularidades permite prevenir daños y asegurar beneficios y es un ingrediente imprescindible de cualquier tecnología. Pero además, para el POSITIVISMO, la EXPLICACIÓN científica de los hechos consiste precisamente en inferirlos de leyes naturales, aplicadas a las circunstancias particulares en que ocurren. (Aunque, obviamente, al clasificar un fenómeno con otros, porque el desarrollo de todos ellos se ciñe a un patrón común, no se aclara cómo y por qué se desarrollan de ese modo.)

Desde Frege (1879), se entiende normalmente que cualquier enunciado universal puede expresarse en el cálculo predicativo mediante una sentencia de la forma esquemática $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n))$, donde $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ y $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ son fórmulas en que las variables $x_1,\ldots, x_n$ están libres ($n \geq 1$). Se ha dicho, sin embargo, que esta forma no es apropiada para expresar una ley natural *L*, pues, si lo fuera, cada caso individual en que *L* se cumpla podría describirse mediante una sentencia de la forma $(\varphi(a_1,\ldots,a_n) \Rightarrow \psi(a_1,\ldots,a_n))$, donde $a_1,\ldots, a_n$ son constantes individuales (esto es, nombres propios), y, por lo tanto, cualquier situación en que $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ fuera falso contaría como un ejemplo del cumplimiento de *L*. Quienes piensan así proponen distinguir las sentencias universales ordinarias de las *nomomorfas* o "legiformes", aptas para expresar una ley natural verdadera o putativa. En lugar del conector verifuncional $\Rightarrow$ utilizado arriba, una sentencia universal nomomorfa exhibiría un conector no EXTENSIONAL, que simbolizaremos con $\backsim\!\!\!\!\rightarrow$; con su antecedente y consecuente unidos por este conector, el enunciado esquemáticamente representado por $(\varphi(a_1,\ldots,a_n) \backsim\!\!\!\!\rightarrow \psi(a_1,\ldots,a_n))$ con antecedente $(\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ falso sería un CONDICIONAL CONTRAFÁCTICO, expresable en castellano por enunciados de este tipo: "Si los objetos $a_1,\ldots, a_n$ cumplieran la condición φ, entonces cumplirían también la condición ψ". Aunque todos entendemos la diferencia entre un enunciado como este y un condicional verifuncional del tipo "φ solo si ψ", a la hora de estipular reglas semánticas formales para el conector $\backsim\!\!\!\!\rightarrow$, las opiniones se dividen irreconciliablemente. Por un lado, hay quien lo aceptaría como un primitivo, con toda la variedad y ambigüedad que ello pueda entrañar. Por el otro, no escasean las propuestas para dar a $\backsim\!\!\!\!\rightarrow$ un carácter semi o cuasi o pseudoextensional, recurriendo al artilugio de los MUNDOS POSIBLES.

La idea de ley connota constreñimiento y, por ende, necesidad. Hume intentó privar de esta connotación a las regularidades naturales, alegando que la necesidad que solemos atribuirles es puramente psíquica y refleja nuestro hábito de observar su repetición. El argumento de Hume ha mortificado al positivismo: si la ciencia es solo un inventario de regularidades que no comportan necesidad alguna, no puede darnos previsiones ciertas ni asegurarnos poder. La lectura de las leyes como generalizaciones sobre CONDICIONALES CONTRAFÁCTICOS (regidos por el conector modal $\backsim\!\!\!\!\rightarrow$) obviaría este reparo, si ella misma fuese viable. Una alternativa preferible ha sido practicada por la teoría física desde siempre: dada una familia de regularidades constatadas en un campo de la experiencia y enunciables en la forma $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi_k(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow \psi_k(x_1,\ldots,x_n))$ $(k \in \mathcal{I})$, se concibe una estructura $\mathfrak{E}$ tal que $\mathfrak{E} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi_k(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow \psi_k(x_1,\ldots,x_n))$ para todo índice *k*; así la necesidad física que creemos reconocer en la constancia de las regularidades viene a verse como una manifestación de las necesidades conceptuales inhe-

rentes a la estructura. (He aquí un ejemplo típico: concebido como modelo de 𝔈, el fenómeno que exhibe la regularidad ilustra una solución de una ecuación diferencial; las fórmulas $\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)$ y $\psi_k(x_1,\ldots,x_n)$ describen dos momentos diferentes de la evolución gobernada por ella; entonces la regularidad tiene la necesidad de un teorema matemático.)

Empiristas y positivistas se resignan a que sea imposible *certificar* una ley natural; pero se han empeñado en diseñar métodos que asegurasen su CONFIRMACIÓN con una probabilidad especificable. Los afanes de Carnap en esta dirección lo llevaron a concluir que, con sus métodos inductivos, la probabilidad de una ley universal de la naturaleza en ningún caso pasaría de 0. Popper, persuadido desde mucho antes de la inanidad de la inducción, sostuvo por eso que las leyes naturales no debían confirmarse, sino CORROBORARSE, mediante la reiterada superación de pruebas experimentales difíciles.

En la práctica de la ciencia se suele distinguir entre leyes *fenomenológicas* y leyes *fundamentales*; también, entre leyes *causales* y leyes meramente *funcionales* o descriptivas. Por ejemplo, la LEY DE BOYLE —según la cual en un gas a temperatura constante el producto de la presión por el volumen es constante— es una ley funcional, de la cual se infiere inmediatamente la siguiente ley causal: el calentamiento ilimitado de un gas encerrado herméticamente en una botella de acero la hará reventar (cuando la presión creciente supere la resistencia del metal). La ley de Boyle es asimismo una ley fenomenológica, que la física actual explica como una manifestación macroscópica de la estructura de los gases, formados por pequeñísimas moléculas (a razón de $6{,}022\ 141\ 99(47) \times 10^{23}$ en cada MOL de gas), cuyo movimiento, a una velocidad media proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura, genera la presión del gas contra las paredes del recipiente que lo contenga. En cambio, las ecuaciones de la mecánica —clásica o cuántica— que supuestamente rigen el movimiento de cada molécula son las leyes fundamentales que explican las fenomenológicas. Por mucho tiempo, físicos y filósofos han atribuido a las leyes fundamentales prioridad sobre las fenomenológicas, sosteniendo incluso que la verdad exacta de aquellas cimienta la validez aproximada de estas. Cartwright (1983) sostiene todo lo contrario: las leyes fenomenológicas, que hablan de lo que está ahí para que todos lo vean, pueden ser exactamente verdaderas —es cosa de ajustar con precisión los márgenes de imprecisión de nuestros enunciados; no así las leyes fundamentales, que se refieren a modelos ideales de uno u otro aspecto o fragmento del acontecer, y que se realizan a lo sumo imperfectamente en circunstancias muy excepcionales conjuradas en nuestros laboratorios. En la física aplicada y en la ingeniería disponemos de un gran número de leyes fenomenológicas que dan descripciones detalladas y sumamente exactas de lo que ocurre en situacio-

nes reales. Para derivarlas de leyes fundamentales éstas deben someterse a una larga serie de correcciones y retoques.

leyes de De Morgan (A. *De Morgansche Gesetze*, F. *lois de De Morgan*, I. *De Morgan's laws*). Sea $\mathfrak{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, \complement, 0, 1 \rangle$ un ÁLGEBRA DE BOOLE. Entonces, para todo $a, b \in B$, se cumplen las dos relaciones siguientes, llamadas *leyes de De Morgan*:

$$a \sqcap b = \complement(\complement a \sqcup \complement b) \qquad\qquad a \sqcup b = \complement(\complement a \sqcap \complement b)$$

En particular, si $\mathfrak{B}$ es el álgebra potencia de un conjunto M, de modo que $\mathfrak{B} = \langle \wp M, \cup, \cap, \mathbf{C}, \varnothing, M \rangle$, y escribimos X' por $\mathbf{C}X$ para todo $X \in \wp M$, las leyes de De Morgan toman la forma acostumbrada:

$$X \cap Y = (X' \cup Y')' \qquad\qquad X \cup Y = (X' \cap Y')'$$

para todo X, $Y \subseteq M$.

Como el ÁLGEBRA DE LINDENBAUM de la LÓGICA PROPOSICIONAL clásica es un álgebra de Boole, todo par de variables proposicionales p y q satisface las leyes de De Morgan en la forma siguiente:

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad\qquad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

leyes de Kepler (A. *Keplersche Gesetze*, F. *lois de Képler*, I. *Kepler's laws*). Un análisis prolongado y acucioso de las observaciones realizadas (a ojo desnudo) por Tycho Brahe a fines del siglo XVI permitió a Kepler concluir, en las primeras décadas del XVII, que el movimiento de los planetas en torno al Sol obedece a las tres reglas llamadas *leyes de Kepler*, que suelen ahora enunciarse así:

1ª ley de Kepler. Cada planeta describe una elipse en uno de cuyos focos está el Sol.

2ª ley de Kepler. El radio vector —esto es, el segmento recto— que une el planeta al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

3ª ley de Kepler. Los cuadrados de las distancias medias entre los planetas y el Sol son proporcionales a los cubos de sus respectivos periodos de revolución. (En otras palabras, si R es la distancia media entre un planeta y el Sol y T es el período de revolución de ese planeta, el cociente R^2/T^3 es el mismo para todos los planetas.)

Las leyes de Kepler describen aproximadamente, pero con notable acierto, el comportamiento de un sistema planetario gobernado por la ley newto-

niana de la GRAVITACIÓN universal, y obtuvieron universal reconocimiento y celebridad como un triunfo colosal del espíritu humano solo después que Newton publicó esa ley.

leyes del movimiento de Newton (A. *Newtonsche Bewegungsgesetze*, F. *lois du mouvement de Newton*, I. *Newton's Laws of Motion*). Al comienzo de sus *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (1687), Newton enuncia en latín tres "axiomas o leyes del movimiento" que cabe traducir al castellano así:

Ley I. Todo cuerpo persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo en cuanto es compelido a cambiar su estado por fuerzas impresas.

Ley II. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre siguiendo la línea recta en que esa fuerza se imprime.

Ley III. A toda acción se opone siempre una reacción igual y contraria; esto es, las acciones recíprocas que dos cuerpos ejercen el uno sobre el otro son siempre iguales y se dirigen en sentidos contrarios.

Para Newton, el movimiento se mide por 'la velocidad y la cantidad de materia conjuntamente' (*Definición II*). Es claro, entonces, que la Ley II enunciada por él difiere de la llamada *Segunda Ley de Newton* en su versión habitual —debida a Euler— que, imitando el lenguaje de Newton, puede formularse así:

> La aceleración multiplicada por la cantidad de materia (o MASA) es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre siguiendo la línea recta en que esa fuerza se imprime.

Aunque no se halla en Newton, esta versión de la ley está implícita en muchos argumentos donde él aplica la segunda ley a situaciones en que la fuerza impresa varía de instante en instante.

La primera ley expresa el PRINCIPIO DE INERCIA. Se ha dicho que es superflua, pues se deduce de la segunda (en la versión habitual): si falta toda fuerza impresa, la aceleración es nula y, por ende, la velocidad es constante, esto es, uniforme y rectilínea o nula. Pero Newton fue sabio al enunciarla por separado, pues ha sobrevivido a la segunda en la MECÁNICA RELATIVISTA.

Las tres leyes newtonianas del movimiento no pueden sostener, sin supuestos adicionales, todo el andamiaje teórico de la MECÁNICA CLÁSICA; pero son su más conciso y conocido epítome. Como no es fácil hacerlas pasar por generalizaciones obtenidas por INDUCCIÓN a partir de la experiencia, algunos fi-

lósofos empiristas trataron de entenderlas como definiciones (de 'fuerza', la segunda; de 'masa', la tercera; mientras que la primera sobra). Pero este camino presenta también grandes dificultades. Un enfoque menos inadecuado se torna posible al descartar el distingo tajante entre verdades empíricas y analíticas.

límite (A. *Grenze*, F. *limite*, I. *limit*). ↗CONVERGENCIA.

línea de universo (A. *Weltlinie*, F. *ligne d'univers*, I. *worldline*). ↗COSMOLÍNEA.

líneas espectrales (A. *Spektrallinien*, F. *lignes spectrales*, I. *spectral lines*). Si un elemento químico —hidrógeno, por ejemplo, o sodio— en estado gaseoso recibe una descarga eléctrica, emite luz cuyo espectro está formado por líneas brillantes y nítidas, separadas por zonas oscuras, según un patrón característico de ese elemento (espectro de emisión). Si el mismo gas es iluminado con luz blanca, refleja luz cuyo espectro presenta líneas nítidas y oscuras justamente en las posiciones de las líneas brillantes del espectro de emisión (espectro de absorción). Fenómenos análogos presentan los gases incandescentes, así como las chispas eléctricas, cuyo espectro depende del metal de que estén hechos los electrodos donde se forma la chispa. También los compuestos químicos generan espectros de emisión y absorción, con líneas y bandas características.

El espectro de emisión de algunos gases se había observado ya en el siglo XVIII, pero el gran interés científico en las líneas espectrales comienza en 1814, cuando Fraunhofer descubrió que el espectro del Sol está entrecortado por cientos de líneas oscuras, que ahora llevan su nombre. Una de ellas, que interrumpe la zona amarilla del espectro solar, fue identificada con la línea amarilla brillante observable en el espectro de emisión del sodio. Se reconoció en las líneas espectrales un medio para investigar la composición química de las estrellas. Hacia 1850, Stokes sugirió que la coincidencia entre las líneas de los espectros de emisión y absorción de un elemento dado se debía a que "las últimas moléculas" de que este consta tienen un modo de vibración propio, cuyos períodos característicos distinguen tanto a la luz que ellas emiten cuando están excitadas como a la que absorben por resonancia. Anticipaba así el enorme aporte que el estudio de las líneas espectrales contribuiría al conocimiento de la estructura de los ÁTOMOS.

lógica cuántica (A. *Quantenlogik*, F. *logique quantique*, I. *quantum logic*). La MECÁNICA CUÁNTICA asocia a cada sistema físico $\mathcal{S}$ un ESPACIO DE HILBERT $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Los vectores de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ representan los estados posibles de $\mathcal{S}$. Si un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ representa un estado de $\mathcal{S}$, cualquier vector $\alpha|\psi\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) repre-

senta el mismo estado. Es claro entonces que el mismo estado puede representarse adecuadamente (i) por el subespacio de $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}$ generado por $|\psi\rangle$ y también (ii) por el proyector $|\psi\rangle\langle\psi|$ que aplica todo el espacio $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}$ en el subespacio generado por $|\psi\rangle$ (↗OPERADOR LINEAL). Este método de representación sugirió a Birkhoff y von Neumann (1936) la posibilidad de concebir las características especiales de la mecánica cuántica y su gran novedad frente a la clásica como el resultado de un cambio de lógica.

La idea de una *lógica cuántica* explota una analogía entre la estructura del conjunto de los subespacios de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y el conjunto de las partes del ESPACIO DE LAS FASES $\mathscr{E}$ de un sistema mecánico clásico: ambos son RETÍCULOS ordenados parcialmente por la relación de inclusión. Ahora bien, el retículo $\langle \wp\mathscr{E},\subseteq \rangle$ es un ÁLGEBRA DE BOOLE isomorfa al álgebra $\langle \mathscr{Y}_{\mathscr{C}},\Rightarrow\rangle$ de las proposiciones referentes a la posición del sistema mecánico clásico en $\mathscr{E}$; si la proposición que asevera que el sistema está en $P\subseteq\mathscr{E}$ se denota con la minúscula homofónica p, y f es el isomorfismo de $\langle\mathscr{E},\subseteq\rangle$ en $\langle \mathscr{Y}_{\mathscr{C}},\Rightarrow\rangle$ por $P \mapsto p$, entonces, para todo A, $B \subseteq\mathscr{E}$, $f(A \cup B) = f(A) \vee f(B) = a \vee b$, $f(A \cap B) = f(A) \wedge f(B) = a \wedge b$, y $f(\mathbf{C}A) = \neg f(A) = \neg a$.

Consideremos ahora el retículo de los subespacios del espacio de Hilbert $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}$. Designando a sus elementos con letras góticas, tenemos que $\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, pero $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, el subespacio generado por $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$; por otra parte, para cada subespacio $\mathfrak{A}$, el conjunto de todos los vectores ortogonales a $\mathfrak{A}$, es decir, el conjunto $\{|\xi\rangle \in\mathscr{H}_{\mathscr{S}} : |\alpha\rangle \in \mathfrak{A} \Rightarrow \langle\alpha|\xi\rangle = 0\}$, es un subespacio $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{A}' = \mathscr{H}_{\mathscr{S}}$ y $\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{A}' = \{0 \in\mathscr{H}_{\mathscr{S}}\}$, de modo que $\mathfrak{A}'$ es el complemento de $\mathfrak{A}$ en el retículo de los subespacios de $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}$. Por lo tanto, este es un retículo complementado; pero no es un álgebra de Boole, pues no obedece a la ley distributiva $\mathfrak{X}\sqcap(\mathfrak{Y}\sqcup\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{X}\sqcap\mathfrak{Y})\sqcup(\mathfrak{X}\sqcap\mathfrak{Z})$, como se verá enseguida: sea $|\theta\rangle = a|\varphi\rangle + b|\psi\rangle$, donde $\langle\varphi|\psi\rangle = 0$ pero todos los vectores y coeficientes mencionados difieren de cero; sean $\mathfrak{A}_{|\theta\rangle}$, $\mathfrak{A}_{|\varphi\rangle}$ y $\mathfrak{A}_{|\psi\rangle}$ los subespacios de $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}$ generados respectivamente por los vectores que se indican; es obvio entonces que $\mathfrak{A}_{|\theta\rangle} \sqcap (\mathfrak{A}_{|\varphi\rangle} \sqcup \mathfrak{A}_{|\psi\rangle}) = \mathfrak{A}_{|\theta\rangle} \neq 0 = (\mathfrak{A}_{|\theta\rangle} \sqcap \mathfrak{A}_{|\varphi\rangle}) \sqcup (\mathfrak{A}_{|\theta\rangle} \sqcap \mathfrak{A}_{|\psi\rangle})$.

La llamada *lógica cuántica* se constituye definiendo la biyección $g : \mathfrak{B} \mapsto b$ del retículo de los subespacios del espacio de Hilbert $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}$ en el conjunto de las proposiciones referentes al estado del sistema cuántico $\mathscr{S}$ y confiriendo a este conjunto la estructura de retículo que hace de esa biyección un isomorfismo. Designemos con símbolos en negrita las operaciones lógicas de disyunción ($\boldsymbol{\vee}$), conjunción ($\boldsymbol{\wedge}$) y negación ($\boldsymbol{\neg}$). Entonces $g(\mathfrak{A})\ \boldsymbol{\wedge}\ g(\mathfrak{B}) = g(\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{B}) = g(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, pero $g(\mathfrak{A})\ \boldsymbol{\vee}\ g(\mathfrak{B}) = g(\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}) = g(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$, y $\boldsymbol{\neg} g(\mathfrak{A}) = g(\mathfrak{A}')$, la proposición que dice que el sistema está en el subespacio ortogonal a $\mathfrak{A}$. Kochen y Specker (1967) demostraron que, si $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}$ tiene más de dos dimensiones, los conectores así definidos *no pueden ser funciones veritativas*. Su significado y, en particular, su alcance ontológico no

pueden, por eso, ser los mismos de los conectores homólogos de la lógica ordinaria o "clásica". Por su parte, el "condicional" de la lógica cuántica tendrá que ser la relación ⇛ entre proposiciones —sea la que fuere— que corresponde, en virtud del isomorfismo g, a la relación que ordena parcialmente el retículo de los subespacios. Ciertamente la mecánica cuántica no razona mediante un nuevo MODUS PONENS de la forma $\vdash a$, $\vdash(a \Rrightarrow b)$, $\therefore \vdash b$; los adalides de la lógica cuántica siguen usando el MODUS PONENS clásico para deducir teoremas matemáticos e incluso en sus razonamientos filosóficos. Por todo ello cuesta ver más que un simpático juego de palabras en la denominación "lógica cuántica" que le dan al retículo de proposiciones descrito.

lógica de primer orden (A. *Logik der ersten Stufe*, F. *logique du premier ordre*, I. *first-order logic*). La lógica de primer orden se caracteriza por cuantificar sobre individuos (en eso se diferencia de la LÓGICA PROPOSICIONAL), pero no sobre conjuntos (en eso se diferencia de la LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN). La rama más antigua de la lógica formal, la SILOGÍSTICA, constituye un fragmento de la lógica de primer orden y, en concreto, de la lógica de predicados unarios de primer orden. De todos modos, la silogística se limitaba a analizar enunciados del tipo 'todo *P* es *Q*' o 'algún *P* es *Q*' y similares y solo consideraba los predicados unarios, que designan propiedades, ignorando las relaciones y las funciones. Todas estas limitaciones fueron superadas por Frege (1879), que además introdujo el primer cálculo deductivo de primer orden. De todos modos, la delimitación exacta de la lógica de primer orden frente a la de segundo orden fue obra de Hilbert y Ackermann (1928). Poco después Gödel exploró las posibilidades y limitaciones de la lógica de primer orden y Tarski fijó su semántica. Hoy en día la lógica de primer orden sigue ocupando la posición central en la lógica, como se refleja en este mismo diccionario, donde una gran parte de los artículos lógicos se refieren a ella.

El alfabeto de un lenguaje formal de primer orden consta de constantes lógicas (los CONECTORES, CUANTIFICADORES y el signo de igualdad), PARÁMETROS (nombres, relatores y functores), VARIABLES individuales y paréntesis. Ciertas secuencias finitas de estos signos constituyen los TÉRMINOS y las FÓRMULAS del lenguaje formal. Las variables pueden estar libres o ligadas en las fórmulas. Una fórmula sin variables libres es una sentencia. Estas hileras de signos adquieren significado o al menos referencia mediante una INTERPRETACIÓN del lenguaje al que pertenecen. En una interpretación dada, cada término designa un individuo del universo de la interpretación y cada fórmula puede ser verificada o satisfecha por la interpretación, o bien no serlo. Las fórmulas satisfechas por todas las interpretaciones poseen VALIDEZ LÓGICA, son lógicamente válidas. Las satisfechas por alguna interpretación son satisfaci-

bles. Una fórmula φ es una CONSECUENCIA de otra fórmula ψ (o, equivalentemente, ψ implica φ) si y solo si cada interpretación que satisface a ψ satisface también a φ. La semántica de la lógica de primer orden presenta ciertas peculiaridades a primera vista paradójicas, expresadas en el TEOREMA DE COMPACIDAD y el TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM.

El conjunto de las fórmulas válidas de la lógica de primer orden es recursivamente enumerable, por lo que es posible ofrecer cálculos deductivos que generan sucesivamente todas las fórmulas válidas o todas las consecuencias de un conjunto finito o al menos recursivamente enumerable de premisas. Este es el contenido básico del TEOREMA DE COMPLETUD SEMÁNTICA. Aunque se ha propuesto una gran diversidad de cálculos deductivos para la lógica de primer orden, tales como los axiomáticos (por ejemplo, el de Hilbert y Bernays, 1934), los de DEDUCCIÓN NATURAL (empezando por Gentzen, 1934), los de secuentes o los arbóreos, de hecho todos generan el mismo conjunto de fórmulas, por lo que los únicos motivos para preferir uno más bien que otro son de tipo estético o pragmático. Sin embargo, el conjunto de las fórmulas válidas de la lógica de primer orden no es decidible.

Las lógicas decidibles, como la proposicional, son en cierto sentido triviales. La lógica de primer orden no es trivial, pero todavía es abarcable por la mente humana, está bien definida y es aplicable a una inmensa multitud de tareas. Esto se debe en gran parte a que es recursivamente enumerable, a que sus nociones semánticas de validez y consecuencia están perfectamente captadas por sus cálculos deductivos. La teoría de modelos o realizaciones de la lógica de primer orden es de una gran fecundidad, debido a que satisface los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem, que permiten obtener resultados metamatemáticos de gran interés mediante métodos sutiles y potentes. La posición privilegiada que ocupa la lógica de primer orden se refleja en el TEOREMA DE LINDSTRÖM, que viene a decir que es la lógica más potente que tiene todas estas ventajas. Otras variedades suyas, como la LÓGICA MULTIVARIADA, todavía las comparten, pues no son más potentes que ella. Cuando vamos más allá, como ocurre con la lógica de segundo orden, que posee más potencia expresiva, pues permite caracterizar unívocamente las estructuras de la matemática clásica, perdemos todas las ventajas de la lógica de primer orden y nos quedamos con un mero esquema conceptual inabarcable en sus consecuencias por la mente humana y sin posibilidades de aplicación controlada.

lógica de segundo orden (A. *Logik der zweiten Stufe*, F. *logique du deuxième ordre*, I. *second-order logic*). En la lógica de orden cero (la lógica proposicional) no hay cuantificación alguna. En la de primer orden podemos cuantificar sobre individuos, pero no sobre conjuntos de individuos (o rela-

ciones entre individuos). En la lógica de segundo orden, finalmente, podemos cuantificar tanto sobre los individuos del universo del discurso como sobre los subconjuntos de ese universo, es decir, sobre los conjuntos de individuos y las relaciones entre individuos. La lógica de primer orden posee un solo tipo de variables, que varían sobre (o se refieren indistintamente a) los individuos del universo de la interpretación. Estas variables individuales pueden ser cuantificadas por los cuantificadores. La lógica de primer orden acomoda también la presencia de relatores o parámetros que, en una interpretación dada, se refieren a ciertas propiedades o relaciones determinadas, pero carece de recursos para referirse a subconjuntos cualesquiera del universo de la interpretación. Esos recursos son característicos de la lógica de segundo orden, que incluye variables que varían sobre subconjuntos o propiedades cualesquiera y permite cuantificarlas. El enunciado "Napoleón tenía todas las cualidades de un buen general" no puede traducirse al lenguaje de la lógica de primer orden, pero sí al de segundo orden: $\forall Z(\forall x(Bx \Rightarrow Zx) \Rightarrow Zn)$, donde B significa ser un buen general y n se refiere a Napoleón. En este ejemplo, Z es una variable de segundo orden, que representa propiedades cualesquiera. El principio de inducción aritmética dice que todos los números naturales poseen cualquier propiedad poseída por el 0 y tal que, siempre que la tenga un número cualquiera x, también la tiene su siguiente, $s(x) = x+1$. Este principio se traduce naturalmente al lenguaje de segundo orden: $\forall Z(Z0 \wedge \forall x(Zx \Rightarrow Zs(x)) \Rightarrow \forall xZx)$, donde las variables individuales (minúsculas) varían sobre los números naturales, mientras que la variable de segundo orden Z varía sobre conjuntos cualesquiera de números naturales.

Hay diversos tipos de lenguajes formales de segundo orden. Por ejemplo, unos pueden tener tanto variables predicativas como functoriales, mientras que otros se limitan a las variables predicativas, o incluso a las variables predicativas unarias. Aquí consideraremos lenguajes formales con variables predicativas n-arias cualesquiera y sin variables functoriales. El alfabeto consta de las mismas constantes lógicas y eventuales parámetros que la lógica de primer orden, pero posee, además de las variables individuales, variables predicativas n-arias para cada número n. Entre las constantes lógicas primitivas se puede prescindir del signo de identidad, ya que es definible en la lógica de segundo orden. Los TÉRMINOS se definen como en la lógica de primer orden. Una *fórmula* de la lógica de segundo orden es una secuencia finita de signos del alfabeto de la lógica de segundo orden construida de acuerdo con las siguiente reglas: 1) Si R es un relator (un signo de relación) n-ario y $\tau_1...\tau_n$ son términos, entonces $R\tau_1...\tau_n$ es una fórmula. 2) Si W es una variable n-aria y $\tau_1...\tau_n$ son términos, entonces $W\tau_1...\tau_n$ es una fórmula. 3) Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ también es una fórmula. 4) Si α y β son fórmulas, entonces $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ y $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ son

también fórmulas. 5) Si φ es una fórmula y x es una variable individual, entonces $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ también son fórmulas. 6) Si φ es una fórmula y W es una variable predicativa (de cualquier aridad), entonces $\forall W\varphi$ y $\exists W\varphi$ también son fórmulas. Si la última regla usada en la construcción de una fórmula fue la regla (6), hablamos de una cuantificación (universal o existencial) de segundo orden. Las variables, tanto las individuales como las predicativas, pueden estar libres o ligadas en las fórmulas. Una fórmula sin variables libres es una sentencia. Una fórmula pura de la lógica de segundo orden es una fórmula de segundo orden sin parámetros, es decir, escrita solo con variables, constantes lógicas y paréntesis.

La semántica de la lógica de segundo orden es como la de primer orden, excepto en lo que respecta a las variables predicativas, que se interpretan como variando sobre subconjuntos cualesquiera del universo A de la interpretación (es decir, sobre $\wp A$) en el caso de las variables predicativas unarias y, en el caso general de las n-arias, como variando sobre subconjuntos cualesquiera del producto cartesiano, iterado n–1 veces, del universo consigo mismo (es decir, sobre $\wp A^n = \wp(A \times \ldots \times A)$, donde A aparece n veces).

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de segundo orden con tipo de semejanza σ (donde σ es una secuencia de números que indica el número, tipo y aridad de los parámetros de $\mathcal{L}$) y sea $\mathcal{A}$ un sistema con universo A y homólogo a $\mathcal{L}$, es decir, con el mismo tipo de semejanza σ. Una interpretación $\mathfrak{I}$ sobre $\mathcal{A}$ asigna individuos de A a las variables individuales de $\mathcal{L}$ y relaciones sobre A a las variables predicativas de $\mathcal{L}$ y entidades distinguidas de $\mathcal{A}$ a los parámetros de $\mathcal{L}$. Sea g : {Variables individuales} $\rightarrow A$ una asignación de individuos de A a las variables individuales. Para cada n, sea h_n : {Variables predicativas n-arias} $\rightarrow A^n$ una asignación de relaciones n-arias sobre A a las variables predicativas n-arias. Sean c_j los nombres de $\mathcal{L}$, sean R_i los relatores de $\mathcal{L}$ y sean f_j los functores de $\mathcal{L}$. Sea $\mathcal{A} = \langle A, \ldots \mathfrak{I}(c_j)\ldots, \ldots \mathfrak{I}(R_i)\ldots, \ldots \mathfrak{I}(f_j)\ldots\rangle$, donde para cada nombre c_j, $\mathfrak{I}(c_j) \in A$, para cada relator n-ario R_i, $\mathfrak{I}(R_i) \in \wp(A^n)$ y para cada functor m-ario f_j, $\mathfrak{I}(f_j) : A^m \rightarrow A$. Entonces, $\mathfrak{I} = \langle g, \{h_i\}, \mathcal{A}\rangle$ es una interpretación de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{A}$.

La interpretación $\mathfrak{I}$ asigna un individuo a cada término del lenguaje $\mathcal{L}$: $\mathfrak{I}(x) = g(x)$ para cada variable individual x. $\mathfrak{I}(f\tau_1\ldots \tau_n) = \mathfrak{I}(f)\mathfrak{I}(\tau_1)\ldots\mathfrak{I}(\tau_n)$. Para cada fórmula φ del lenguaje $\mathcal{L}$ está determinado (con la salvedad más abajo indicada) si la interpretación $\mathfrak{I}$ satisface φ o no satisface φ: 1) $\mathfrak{I}$ satisface $R\tau_1\ldots \tau_n$ si y solo si $\langle\mathfrak{I}(\tau_1) \ldots \mathfrak{I}(\tau_n)\rangle \in \mathfrak{I}(R)$. 2) $\mathfrak{I}$ satisface $W\tau_1\ldots \tau_n$ si y solo si $\langle\mathfrak{I}(\tau_1) \ldots \mathfrak{I}(\tau_n)\rangle \in h_n(W)$. 3) $\mathfrak{I}$ satisface $\neg\varphi$ si y solo si $\mathfrak{I}$ no satisface φ. 4) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface α y $\mathfrak{I}$ satisface β. 5) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface α o $\mathfrak{I}$ satisface β. 6) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \Rightarrow \beta)$ si y solo si $\mathfrak{I}$ satisface β o $\mathfrak{I}$ no satisface α. 7) $\mathfrak{I}$ satisface $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ si y solo si ($\mathfrak{I}$ satisface α y $\mathfrak{I}$ satisface β) o ($\mathfrak{I}$ no satisface α y $\mathfrak{I}$ no

satisface β). 8) $\mathfrak{I}$ satisface $\forall x\varphi$ si y solo si para cada $a \in A$, la interpretación $\mathfrak{I}^{x:a} = \langle g', \{h_i\}, \mathscr{A}\rangle$ satisface a φ, donde g' asigna el individuo $a \in A$ a la variable x y coincide con g en todas sus otras asignaciones. 9) $\mathfrak{I}$ satisface $\exists x\varphi$ si y solo si para algún $a \in A$, $\mathfrak{I}^{x:a}$ satisface a φ. 10) Para cada variable predicativa n-aria W: $\mathfrak{I}$ satisface $\forall W\varphi$ si y solo si para cada relación $R \in A^n$, la interpretación $\mathfrak{I}^{W:R} = \langle g, \{h_i : i \neq n\} \cup \{h_n'\}, \mathscr{A}\rangle$ satisface a φ, donde h_n' asigna la relación $R \in A^n$ a la variable W y coincide con h_n en todas sus otras asignaciones; y 11) $\mathfrak{I}$ satisface $\exists W\varphi$ si y solo si para alguna relación $R \in A^n$, la interpretación $\mathfrak{I}^{W:R}$ satisface a φ.

Sea Γ un conjunto de fórmulas de $\mathscr{L}$. $\mathfrak{I}$ satisface a Γ si y solo si, para cada $\varphi \in \Gamma$, $\mathfrak{I}$ satisface a φ. Sea Σ un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$. Si la interpretación $\mathfrak{I}$ sobre $\mathscr{A}$ satisface a Σ, entonces cualquier interpretación sobre $\mathscr{A}$ satisface a Σ. Por tanto, la satisfacción de un conjunto de sentencias solo depende del sistema sobre el que la interpretamos, no de la interpretación particular (es decir, no depende de su concreta asignación de individuos a las variables individuales y de relaciones a las variables predicativas). Por ello podemos decir que el sistema $\mathscr{A}$ verifica o satisface Σ. Si el sistema $\mathscr{A}$ satisface Σ, decimos que $\mathscr{A}$ es una *realización* de Σ.

Las nociones semánticas de validez, satisfacibilidad, implicación, consecuencia e independencia se definen como en la lógica de primer orden. En especial una fórmula φ es *válida* si y solo si es satisfecha por todas las interpretaciones; es *satisfacible* si es satisfecha por alguna interpretación; y es una *consecuencia* de un conjunto Γ de fórmulas si y solo si cada interpretación que verifica Γ verifica también φ.

La lógica de segundo orden permite definir muchas nociones indefinibles en la de primer orden, empezando por la identidad. Podemos introducir '=' como un signo definido mediante la definición $x = y \Leftrightarrow_{df} \forall Z(Zx \Leftrightarrow Zy)$. Incluso es posible definir la identidad de propiedades o conjuntos: $Z = W \Leftrightarrow_{df} \forall x(Zx \Leftrightarrow Wx)$. En realidad, en la lógica de segundo orden se pueden definir muchas nociones típicamente conjuntistas, como la de que Z es el conjunto potencia de Y, abreviada Pot(Y,Z), o la de que un conjunto Y es biyectable con Z, abreviada $Y \sim Z$, o la de que un conjunto X es infinito, abreviada Inf(X). Por ejemplo, la biyectabilidad entre Y y Z se define así:

$$Y \sim Z \Leftrightarrow_{df} \exists W[\forall x\forall y\forall z((Wxy \wedge Wxz \Rightarrow y = z) \wedge (Wyx \wedge Wzx \Rightarrow y = z) \\ \wedge \forall u(Yu \Rightarrow \exists x(Wux \wedge Zx)) \wedge \forall x(Zx \Rightarrow \exists u(Wxu \wedge Yu))]$$

La infinitud de Z, siguiendo a Dedekind, se define así:

$$\text{Inf}(Z) \Leftrightarrow_{df} \exists Y[\forall x(Yx \Rightarrow Zx) \wedge \exists x(Zx \wedge \neg Yx) \wedge Z \sim Y]$$

Obsérvese que todas estas nociones son definibles mediante fórmulas puras de segundo orden. La lógica de segundo orden tiene una enorme potencia expresiva y permite caracterizar unívocamente (salvo isomorfía) las estructuras fundamentales de la matemática clásica, tales como el sistema de los números naturales, o el cuerpo ordenado de los números reales, o el espacio euclídeo. Sea s un parámetro de operación unaria ("el siguiente"). El sistema estándar de los números naturales puede caracterizarse mediante estos tres axiomas:

$$\forall x(s(x) \neq 0)$$
$$\forall x \forall y(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$$
$$\forall Z(Z0 \wedge \forall x(Zx \Rightarrow Zs(x)) \Rightarrow \forall xZx)$$

La clase de todas las consecuencias (en la lógica de segundo orden) de estos tres axiomas constituye la aritmética de Peano de segundo orden, que es una teoría categórica. Todas sus realizaciones son isomorfas entre sí. Por tanto, la aritmética de Peano es una teoría sintácticamente completa, que da respuesta a todas las preguntas aritméticas. A primera vista, parece como si la lógica de segundo orden fuera el marco formal adecuado para la aritmética, el análisis, la geometría euclídea e incluso la teoría de conjuntos, pues todas estas teorías, formalizadas en segundo orden, son completas y categóricas y caracterizan unívocamente sus respectivas estructuras. Sin embargo, ya el TEOREMA DE INCOMPLETUD de Gödel nos advierte de que estamos ante un espejismo. Si la aritmética de segundo orden es completa y consistente, entonces no puede ser axiomatizable en el sentido técnico de recursivamente enumerable. Podemos, sí, escribir sus axiomas de segundo orden (acabamos de hacerlo), pero no hay manera de obtener todas las consecuencias de estos axiomas. Aunque dé respuesta a todas las preguntas aritméticas, no hay manera de encontrar esas respuestas de un modo sistemático. En efecto, no solo no hemos encontrado un cálculo deductivo semánticamente completo para la lógica de segundo orden, sino que hemos demostrado que no puede encontrarse, pues no lo hay.

La validez lógica de segundo orden no es recursivamente enumerable, por lo que no hay manera efectiva de caracterizarla. No puede existir un cálculo deductivo completo para la lógica de segundo orden, por lo que es difícil sacarle jugo sintáctico. Tampoco valen para ella los teoremas de Löwenheim-Skolem y de compacidad, por lo que no da lugar a una semántica o teoría de modelos vigorosa, como la de primer orden. Además, y como habíamos insinuado al inicio, ni siquiera las nociones semánticas están bien definidas o determinadas, debido a la inextricable conexión de la lógica de segundo orden con la teoría de conjuntos, que traslada a la primera todas las incertidumbres de la segunda.

Para la mayor parte de las cuestiones abiertas y sin respuesta de la teoría de conjuntos hay una fórmula pura de la lógica de segundo orden, tal que esa fórmula es lógicamente válida si y solo si la correspondiente cuestión conjuntista tiene una respuesta positiva. Nadie duda seriamente de los axiomas conjuntistas de ZF. Las primeras dudas graves se refieren al AXIOMA DE ELECCIÓN (AC), que, en una de sus versiones, dice que existe una función universal de elección, es decir, una función que a cada conjunto no vacío le asigna uno de sus miembros. Notables matemáticos han mirado con suspicacia este axioma o lo han rechazado, aunque la mayoría lo acepta, por la gran cantidad de teoremas a los que es equivalente. Uno de estos principios equivalentes es el teorema del buen orden, conjeturado por Cantor como un pilar imprescindible de su teoría de los ordinales y cardinales. La siguiente sentencia de la lógica pura de segundo orden, interpretada sobre cualquier universo, dice que ese universo puede ser bien-ordenado.

$$\exists W(\forall x\forall y\forall u(\neg Wxx \wedge (Wxy \wedge Wyu \Rightarrow Wxu)) \wedge \forall x\forall y(Wxy \vee Wyx \vee x = y)$$
$$\wedge \forall Z(\exists xZx \Rightarrow \exists u(Zu \wedge \forall x(Zx \Rightarrow Wux \vee u = x))))$$

Esta fórmula es satisfecha o verificada por una interpretación $\mathfrak{I}$ sobre un universo A si y solo si A puede ser bien-ordenado, es decir, si hay alguna relación que lo bien-ordena.

Otra famosa y controvertida conjetura de Cantor es la HIPÓTESIS DEL CONTINUO. En su versión generalizada (GCH), dice que para cada conjunto infinito M no hay una cardinalidad intermedia entre la de M y la del conjunto potencia de M, es decir, no hay un conjunto mayor que $|A|$ y menor que $|\wp A|$. Ya vimos antes que una cierta fórmula pura de segundo orden sirve para definir la infinitud, abreviada **Inf**. De modo similar se definen mediante fórmulas puras de segundo orden el conjunto potencia, abreviado Pot, la menor o igual cardinalidad (es decir, la inyectabilidad), abreviada $\leq$, y la menor cardinalidad, abreviada $<$. GCH es equivalente a la siguiente fórmula pura de segundo orden, escrita aquí usando las abreviaturas Inf, Pot, $\leq$ y $<$:

$$\forall X\forall Y\forall Z(\mathrm{Inf}(X) \wedge \mathrm{Pot}(X,Y) \wedge Z < Y \Rightarrow Z \leq X)$$

En la teoría de conjuntos ZF no podemos probar ni refutar AC o GCH, pues ambas hipótesis son independientes de los axiomas. Tanto AC como GCH son verdades lógicas (fórmulas válidas) de segundo orden, si son verdades conjuntistas. Pero no sabemos si lo son, o si queremos que lo sean, o si tiene sentido preguntarse si lo son. También la compleja noción conjuntista de cardinal inaccesible es definible mediante una fórmula pura de segundo orden. Abreviémosla como Inacc. La fórmula Inacc(X) dice que el con-

junto X es de cardinalidad inaccesible. $\exists X\, \text{Inacc}(X)$ es una fórmula satisfacible de la lógica de segundo orden si hay cardinales inaccesibles. $\neg\exists X\, \text{Inacc}(X)$ es una fórmula válida si no hay cardinales inaccesibles. Pero no sabemos, ni podemos decidir a partir de los otros axiomas, si hay cardinales inaccesibles o no. Otras muchas hipótesis conjuntistas avanzadas pueden expresarse como fórmulas puras de segundo orden, cuya validez lógica depende de arcanos detalles de extensiones alternativas y controvertidas de la teoría de conjuntos habitual. Por tanto, la lógica de segundo orden puede considerarse como teoría de conjuntos disfrazada de lógica.

Podemos introducir un cálculo deductivo (semánticamente incompleto, pero correcto) para la lógica de segundo orden. Basta con agregar a un cálculo deductivo de la lógica de primer orden algunas nuevas reglas de inferencia de segundo orden que preserven la validez. Por ejemplo, podemos añadir reglas de inferencia como la que autoriza a pasar de $\forall W\varphi$ a $\varphi(R)$, donde W es una variable predicativa n-aria, R es un signo de relación n-aria y $\varphi(R)$ es el resultado de sustituir todas las apariciones libres de W en φ por R; o la que permite pasar de $\varphi(R)$ a $\exists W\varphi$. El cálculo resultante nos permite generar fórmulas válidas, aunque no todas, y deducir consecuencias, aunque no todas, a partir de premisas dadas. Este cálculo no es semánticamente completo, al menos en el sentido habitual, basado en las interpretaciones normales o estándar; sin embargo, puede ser semánticamente completo respecto a otra semántica alternativa, introducida por Henkin en 1950 y basada en las interpretaciones generales.

En una *interpretación general* (en el sentido de Henkin) de $\mathcal{L}$ las variables predicativas unarias ya no se interpretan como variando sobre subconjuntos cualesquiera del universo A de la interpretación, es decir, sobre el conjunto potencia $\wp A$ entero, sino solo sobre una parte de $\wp A$. Y lo mismo ocurre con las demás variables predicativas. Una relación n-aria R es definible en $\mathcal{L}$ si y solo si existe una fórmula abierta φ de $\mathcal{L}$ con n variables libres tal que R es el conjunto de los n-tuplos de elementos de A que satisfacen esa fórmula φ. Una interpretación general fija arbitrariamente, para cada n, el conjunto $A_n \subseteq \wp A^n$ de las relaciones n-arias permisibles en esa interpretación, con la única condición de que las relaciones definibles estén entre las permisibles. Una interpretación estándar es un caso extremo de interpretación general, aquel en que todas las relaciones posibles son permisibles, es decir, donde $A_n = \wp A^n$ para cada n. Todas las interpretaciones estándar son generales, pero no a la inversa. Una fórmula es válida en sentido general si y solo si es satisfecha por todas las interpretaciones generales. Hay más interpretaciones generales que interpretaciones estándar. Por consiguiente, hay menos fórmulas satisfechas por todas las interpretaciones generales que por todas las interpretaciones estándar, hay menos fórmulas válidas en sentido ge-

neral que en sentido estándar, muchas menos. Tanto es así que el conjunto de las fórmulas válidas en sentido general es lo suficientemente pequeño como para ser recursivamente numerable. Por eso podemos ofrecer un cálculo deductivo semánticamente completo en sentido general que lo genera. Además, la lógica de segundo orden, interpretada en el sentido general de Henkin, satisface los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem. En cierto modo, es lógica de primer orden en disfraz. Por tanto, todas las ventajas semánticas que prometía la semántica estándar de segundo orden desaparecen. En el lenguaje formal de segundo orden, interpretado en el sentido general, ya no se pueden caracterizar unívocamente las estructuras de la matemática clásica ni se pueden formalizar sus teorías de un modo categórico y completo.

lógica intuicionista (A. *intuitionistische Logik*, F. *logique intuitionniste*, I. *intuitionistic logic*). Brouwer, el fundador del INTUICIONISMO, había recalcado su desconfianza hacia el lenguaje en general y la lógica en particular. La matemática intuicionista sería una actividad constructiva en la mente del matemático, que procedería por intuiciones concretas, sin necesidad alguna de símbolos o palabras. Ninguna lógica podría abarcar esa actividad. Sin embargo, su discípulo Heyting codificó en 1930 las pautas de inferencia intuicionistamente aceptables, dando así lugar a la *lógica intuicionista*, que desde ese momento fue objeto de intenso estudio y escrutinio metamatemático.

Según los intuicionistas, la lógica clásica es válida para los conjuntos finitos, pero no lo es para los infinitos potenciales (los infinitos actuales son rechazados como sinsentidos, al no ser construibles en la mente mediante intuiciones concretas). En especial, el principio clásico del *TERTIUM NON DATUR* o tercio excluso, que afirma que para cada enunciado A vale $(A \vee \neg A)$, es rechazado en su aplicación a conjuntos infinitos, como el de los números naturales. En efecto, los intuicionistas dicen que un enunciado A es verdadero si disponen de una prueba de A y dicen que A es falso (o que $\neg A$ es verdadero) si disponen de una refutación de A. Pero respecto a muchos enunciados sobre los números naturales, por ejemplo, no disponemos de una prueba ni de una refutación. Por tanto, esos enunciados no son verdaderos ni falsos, y para ellos no vale el *tertium non datur*.

El lenguaje formal de la lógica intuicionista es el mismo que el de la lógica clásica. En especial, la definición clásica de FÓRMULA proposicional o de primer orden vale también para el lenguaje de la lógica intuicionista. Lo que varía es el significado de las constantes lógicas y la interpretación de las fórmulas. Según la versión de Heyting, las fórmulas se interpretan del siguiente modo. Afirmar una fórmula φ consiste en asegurar que uno dispone de una prueba de φ. Uno dispone de una prueba de

$(\psi \wedge \varphi)$ cuando uno dispone tanto de una prueba de ψ como de una prueba de φ. Uno dispone de una prueba de $(\psi \vee \varphi)$ cuando uno dispone de una prueba separada de ψ o uno dispone de una prueba separada de φ. Uno dispone de una prueba de $(\varphi \Rightarrow \psi)$ cuando, a partir de cualquier prueba de φ, uno puede construir una prueba de ψ y verificar que lo es. La negación es más fuerte de lo habitual: $\neg\varphi$ significa algo así como que φ es absurdo. Uno dispone de una prueba de $\neg\varphi$ cuando, a partir de cualquier prueba de φ, uno puede construir una contradicción. Disponer de una prueba de $\exists x\varphi(x)$ significa haber construido un objeto designado por a y haber probado que $\varphi(a)$. Disponer de una prueba de $\forall x\varphi(x)$ significa estar en posición de construir, para cada objeto dado designado por a, una prueba de $\varphi(a)$.

En base a esa interpretación, Heyting formuló un cálculo axiomático para la lógica intuicionista, cuyo fragmento proposicional consta de la regla de inferencia del *MODUS PONENS* y de los siguientes esquemas axiomáticos:

1. $\varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \varphi)$
2. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\psi \wedge \varphi)$
3. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \wedge \rho) \Rightarrow (\psi \wedge \rho))$
4. $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \rho)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \rho)$
5. $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
6. $(\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \psi$
7. $\psi \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$
8. $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$
9. $((\varphi \Rightarrow \rho) \wedge (\psi \Rightarrow \rho)) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \rho)$
10. $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
11. $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \neg\psi)) \Rightarrow \neg\varphi$

Como fácilmente se aprecia, todos estos axiomas lógicos intuicionistas son tautologías clásicas. Sin embargo, otras tautologías clásicas no se pueden obtener en este cálculo, por ejemplo, no es deducible $(\varphi \vee \neg\varphi)$, ni tampoco lo son $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ o $\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Si añadimos el *tertium non datur*, $(\varphi \vee \neg\varphi)$, a los axiomas 1–11, obtenemos una axiomatización de la lógica clásica proposicional. Como se observa en el axioma 10, en la lógica intuicionista, como en la clásica, una contradicción implica cualquier cosa. Si eliminamos ese axioma de la axiomatización de Heyting, obtenemos la lógica mínima, propuesta por Johansson.

El cálculo proposicional de Heyting puede fácilmente extenderse a la lógica de primer orden. Todas las fórmulas deducibles en el cálculo intuicionista de primer orden siguen siendo clásicamente válidas, pero no a la inversa. Por ejemplo, la fórmula $\neg\forall x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\neg\varphi(x)$, aunque clásicamente válida,

no es deducible en el cálculo intuicionista. De todos modos, en el resto de esta entrada nos limitaremos a la lógica intuicionista proposicional.

Además de la interpretación de Heyting en términos de pruebas, otras interpretaciones han sido propuestas por Kolgomorov, Gödel, Tarski, Rasiowa y Sikorski, Kripke y otros autores. Por ejemplo, en la interpretación de Kolmogorov las letras proposicionales representan problemas que tratamos de resolver. Los conectores se interpretan así: $(\varphi \wedge \psi)$ significa que los problemas φ y ψ tienen ambos solución. $(\varphi \vee \psi)$ significa que al menos uno de los dos problemas tiene solución. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ significa que la solución de ψ se reduce a la de φ. $\neg\varphi$ significa que una solución de φ conduce a contradicciones. Gödel propuso una interpretación similar, basada en la demostrabilidad. Tarski ofreció una interpretación topológica. Dado un espacio topológico S, podemos asignar a cada letra proposicional A un conjunto abierto val(A) de S. Podemos extender esta evaluación a todas las fórmulas del siguiente modo: val $(\varphi \wedge \psi)$ = val$(\varphi) \cap$ val(ψ); val$(\varphi \vee \psi)$ = val$(\varphi) \cup$ val(ψ); val$(\varphi \Rightarrow \psi)$ = interior(val(ψ) − val(φ)); val$(\neg\varphi)$ = interior(S − val(φ)). Si una fórmula φ es demostrable en el cálculo de Heyting, entonces val$(\varphi) = S$, como probó Stone. Por otro lado, Tarski probó que el cálculo de Heyting es semánticamente completo respecto a esta semántica topológica: si val$(\varphi) = S$ para cada espacio topológico S y cada asignación de conjuntos abiertos de S a las letras proposicionales, entonces φ es deducible en el cálculo de la lógica intuicionista de Heyting.

Un hecho curioso, descubierto por Gödel y Glivenko, es que si una negación $\neg\varphi$ es deducible en la lógica clásica, también lo es en la intuicionista. Obviamente la lógica proposicional intuicionista está contenida en la clásica en el sentido de que todas las fórmulas deducibles en el cálculo de Heyting son también válidas y deducibles en la lógica clásica. Por ello no deja de resultar sorprendente que Gödel descubriera que la lógica intuicionista también contiene a la clásica en algún sentido. En efecto, si consideramos $(\varphi \Rightarrow \psi)$ como una abreviatura de $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ y $(\varphi \vee \psi)$ como una abreviatura de $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ y escribimos estas fórmulas sin abreviar, dejando las demás como están, entonces ocurre que una fórmula cualquiera (así desabreviada) es deducible en el cálculo intuicionista si y solo si es una tautología clásica. La lógica intuicionista también ha sido comparada con la modal. McKinsey y Tarski descubrieron que el cálculo proposicional intuicionista puede ser interpretado en el sistema S4 de LÓGICA MODAL del siguiente modo: si a cada fórmula φ asociamos una fórmula modal φ' sustituyendo en φ cada letra proposicional B por $\Box B$ [es necesario que B], cada conector $\neg$ por $\neg\Diamond$ [no es posible que] y cada símbolo de condicional $\Rightarrow$ por un símbolo de implicación estricta, entonces φ es deducible en el cálculo intuicionista si y solo si φ' es deducible en el cálculo modal S4.

lógica modal (A. *modale Logik*, F. *logique modale*, I. *modal logic*). Lógica que incluye el estudio de los operadores modales —*necesario, posible, imposible, contingente*— y de los razonamientos basados en ellos. La lógica modal puede estudiarse a los diversos niveles cuantificacionales de la lógica clásica (lógica modal proposicional, lógica modal de primer orden, lógica modal de segundo orden...), pero su problemática más característica se manifiesta ya plenamente en la lógica modal proposicional, y a ella nos limitaremos en lo que sigue.

Aristóteles fue el fundador de la lógica modal. Los lógicos medievales establecieron la distinción entre modalidades *de dicto*, que se refieren al enunciado entero, como cuando decimos que es necesario que todos los *A* sean *B*, y modalidades *de re*, que se refieren al verbo, como cuando decimos que todos los *A* son necesariamente *B*. La lógica modal actual considera exclusivamente las modalidades *de dicto*, pero Aristóteles mismo oscilaba entre las dos concepciones. En su libro *Sobre la interpretación* adoptó el punto de vista *de dicto* y enunció las equivalencias básicas entre las modalidades, que siguen siendo lo más intuitivo y generalmente aceptado de esta rama de la lógica: por ejemplo, 'es posible que *Q*' equivale a 'no es necesario que no *Q*', o 'es necesario que *Q*' equivale a 'no es posible que no *Q*'.

La gramática de la lógica modal proposicional describe su lenguaje formal. Su alfabeto o conjunto de símbolos consta de siete constantes lógicas (tres operadores unarios de negación, necesidad y posibilidad, más cuatro conectores binarios de negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional) y de un conjunto infinito numerable de letras proposicionales, además de los paréntesis, como signos auxiliares. Los operadores de necesidad, $\Box$, y de posibilidad, $\Diamond$, son peculiares de la lógica modal; los demás signos son los clásicos. Una FÓRMULA de la lógica proposicional es una hilera o secuencia finita de signos del alfabeto formada de acuerdo con las siguientes reglas: (1) Una letra proposicional cualquiera *A* es una fórmula. (2) Si α es una fórmula, entonces $\neg\alpha$, $\Box\alpha$ y $\Diamond\alpha$ son también fórmulas. (3) Si α y β son fórmulas, entonces $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\Rightarrow\beta)$ y $(\alpha\Leftrightarrow\beta)$ son también fórmulas. Fórmulas de la lógica modal proposicional son todas y solas las secuencias de signos formadas por aplicaciones sucesivas de estas tres reglas. El lenguaje formal de la lógica proposicional es el conjunto de todas sus fórmulas.

La lógica modal proposicional es una extensión de la lógica clásica proposicional. Por tanto, todas las tautologías son también tesis válidas de la lógica modal. ¿Qué más vale en la lógica modal, aparte de lo clásicamente válido? Todo el mundo acepta las equivalencias aristotélicas antes citadas, $(\Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi)$ y $(\Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi)$, o que lo necesario se cumple, $(\Box\varphi \Rightarrow \varphi)$, o que lo real es posible (*de esse ad posse valet consequentia*, decían los me-

dievales), ($\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$). Sin embargo, las intuiciones divergen en cuanto nos preguntamos por la aceptabilidad de otras fórmulas, como ($\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$) o ($\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$), que unos consideran grandes verdades, y otros, grandes sinsentidos. Podemos precisar nuestras intuiciones construyendo un cálculo deductivo que permita generar todas las fórmulas que nos parecen válidas. El problema es que diversos autores han propuesto cálculos diferentes, que no son equivalentes entre sí, pues generan conjuntos distintos de fórmulas.

El estudio moderno de la lógica modal fue iniciado por C. I. Lewis en 1912 en el contexto de su interés por la "implicación estricta". Lewis y Lanfford (1932) analizaron cinco cálculos modales, a los que llamaron S1, S2, S3, S4 y S5. Posteriormente, Becker, Gödel, Feys, von Wright y otros autores propusieron sus propios cálculos, todos distintos y no equivalentes. (Obsérvese la diferencia con la lógica clásica, donde los muchísimos cálculos propuestos son todos equivalentes entre sí.)

Uno de los cálculos modales más simples y populares es sin duda S5, que consta de las siguientes reglas: (1) Se puede escribir cualquier tautología. (2) Se puede escribir cualquier fórmula ($\Box\varphi \Rightarrow \varphi$). (3) Se puede escribir cualquier fórmula ($\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$). (4) Se puede escribir cualquier fórmula $\Box(\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$. (5) Se puede escribir cualquier fórmula ($\Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$). (6) Se puede pasar de φ a $\Box\varphi$. (7) Se puede pasar de ($\varphi \Rightarrow \psi$) y φ a ψ. Una fórmula es deducible en *S5* o es un teorema de *S5* si puede obtenerse aplicando estas reglas un número finito de veces.

S5 genera precisamente el conjunto de las fórmulas modales válidas en la interpretación leibniziana, de acuerdo con la cual una proposición es necesaria si es verdadera en todos los mundos posibles y es posible si es verdadera en algún mundo posible. Supongamos que las letras proposicionales representan proposiciones que son verdaderas o falsas en según qué mundos posibles. Una interpretación leibniziana es un par $\langle M,P_i\rangle$, donde M es un conjunto no vacío de mundos posibles y P_i es una secuencia infinita de subconjuntos de M que estipula en qué mundos posibles son verdaderas las letras sentenciales A_i: A_i es verdadera en el mundo posible $w \in M$ si y solo si $w \in P_i$.

La verdad o verificación o satisfacción de una fórmula modal φ en un mundo posible w de una interpretación leibniziana $\langle M,P_i\rangle$ se define recursivamente así:

(1) A_i es verdad en w si y solo si $w \in P_i$.
(2) $\neg\varphi$ es verdad en w si y solo si φ no es verdad en w.
(3) $\Box\varphi$ es verdad en w si y solo si para cada $v \in M$, φ es verdad en v.
(4) $\Diamond\varphi$ es verdad en w si y solo si para algún $v \in M$, φ es verdad en v.
(5) $(\varphi \wedge \psi)$ es verdad en w si y solo si φ es verdad en w y ψ es verdad en w.

(6) $(\varphi \vee \psi)$ es verdad en w si y solo si φ es verdad en w o ψ es verdad en w.

(7) $(\varphi \Rightarrow \psi)$ es verdad en w si y solo si φ no es verdad en w o ψ es verdad en w.

(8) $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ es verdad en w si y solo si φ es verdad en w si y solo si ψ es verdad en w.

Una fórmula φ es válida si y solo si φ es verdadera en cada mundo posible de cada interpretación leibniziana. El cálculo S5 es correcto y semánticamente completo: para cada fórmula modal φ, φ es deducible en S5 si y solo si φ es válida.

La semántica "leibniziana" debe más a Kripke que a Leibniz. Aunque va muy bien para S5, no funciona para los otros cálculos. Por eso el mismo Kripke ha desarrollado otra semántica modal más flexible y aplicable a los diversos cálculos, basada en las interpretaciones estándar. Una interpretación estándar es un triplo $\langle M,R,P_i\rangle$, donde M es un conjunto no vacío de mundos posibles, R es una relación binaria en M y P_i es una secuencia infinita de subconjuntos de M que estipula en qué mundos posibles son verdaderas las letras sentenciales A_i: A_i es verdadera en el mundo posible $w \in M$ si y solo si $w \in P_i$. Un mundo posible w está en la relación R con otro v si v es accesible desde w, si v es compatible con w. En esta semántica la necesidad y posibilidad no dependen ya de todos los mundos posibles, sino solo de los mundos posibles accesibles desde el mundo posible considerado. En concreto, dada una interpretación estándar $\langle M,R,P_i\rangle$, $\Box\varphi$ es verdad en $w \in M$ si y solo si φ es verdad en cada $v \in$ M tal que wRv. La flexibilidad de esta semántica modal viene de que, variando nuestras exigencias sobre la relación R, obtenemos lógicas modales distintas. Así, exigiendo que R sea una relación reflexiva y transitiva, determinamos como válidas las fórmulas deducibles en S4. Exigiendo que R sea una relación de equivalencia, determinamos como válidas las fórmulas deducibles en S5. Otras exigencias sobre R determinan las diversas lógicas modales propuestas.

La lógica modal carece de aplicaciones en la matemática y en la ciencia empírica, pero alguna de sus versiones ha sido aplicada con mayor o menor fortuna a tareas de programación y a cuestiones filosóficas. Algunos filósofos de la matemática, como Chihara, incluso han pretendido que la lógica modal sustituya a la teoría de conjuntos como base de una nueva manera de entender la matemática, pero su propuesta ha sido acogida con escaso entusiasmo.

lógica multivariada (A. *mehrsortige Logik*, F. *logique à plusieurs sortes de variables*, I. *many-sorted logic*). En su presentación estándar, el lenguaje de la lógica clásica de primer orden contiene un único tipo de variables, que va-

rían sobre los individuos del único universo de la interpretación correspondiente. Sin embargo, en la práctica habitual de la matemática y de la ciencia en general con frecuencia usamos variables de diverso tipo y tipografía para referirnos indistintamente a individuos de varios universos diferentes. Así, en la teoría de espacios vectoriales, se suelen usar variables de un tipo para los escalares y variables de otro tipo (por ejemplo, en negrita) para los vectores. También en geometría podemos usar variables distintas para los puntos, las rectas y los planos, por ejemplo. Algunos autores, como Schmidt, Wang y Feferman, han propuesto una modificación de la lógica de primer orden que haga más fácil y natural su aplicación a tales situaciones: la lógica multivariada. El lenguaje formal de esta lógica posee varios tipos distintos de variables, digamos ${}^1x$, ${}^2x$, ${}^3x$, ... ${}^nx$. (Obsérvese que la palabra 'tipo' se usa aquí en su sentido general, como clase o especie, y no en el sentido peculiar que tiene en la teoría de tipos de Russell.) Las interpretaciones constan de tantos universos A_1, A_2, ... A_n como tipos de variables posee el lenguaje interpretado. Las reglas semánticas de la cuantificación remiten las variables de un tipo a su correspondiente universo.

Sea I un conjunto no vacío de tipos o índices. Para cada tipo $i \in I$, el lenguaje formal posee variables de tipo i: ${}^ix_1$, ${}^ix_2$, ${}^ix_3$, etc. Las constantes lógicas son las habituales (conectores, cuantificadores, signo de identidad). Los parámetros (signos de individuo, de función y de relación) tienen un rango, que es una secuencia finita y no vacía de miembros de I. Los términos se definen recursivamente así:

1. ${}^ix_m$ es un término de tipo i.
2. Si f es un signo de función de rango $(i_1, \ldots i_n)$ y $\tau_1, \ldots \tau_{n-1}$ son términos de tipo $i_1, \ldots i_{n-1}$, respectivamente, entonces $f\tau_1, \ldots \tau_{n-1}$ es un término de tipo i_n.

Las fórmulas se definen recursivamente así:

1. Si σ y τ son términos del mismo tipo, entonces $\sigma = \tau$ es una fórmula.
2. Si R es un signo de relación de rango $(i_1, \ldots i_n)$ y $\tau_1, \ldots \tau_n$ son términos de tipo $i_1, \ldots, i_n$, respectivamente, entonces $R\tau_1, \ldots \tau_{n-1}$ es una fórmula.
3. Si φ y ψ son fórmulas y x es una variable, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ son fórmulas.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje multivariado. Una interpretación $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{L}$ sobre el sistema heterogéneo $\mathcal{A}$ con universos $A_{i \in I}$ asigna a cada tipo $i \in I$ el universo A_i y asigna entidades de $\mathcal{A}$ a los parámetros de $\mathcal{L}$ del siguiente modo: si c es

un signo de individuo de rango i, entonces $\Im(c) \in A_i$. Si f es un signo de función de rango $(i_1, \ldots i_n)$, entonces $\Im(f)$: $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_{n-1}} \rightarrow A_{i_n}$. Si R es un signo de relación de rango $(i_1, \ldots, i_n)$, entonces $\Im(R) \subseteq A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}$. La interpretación asigna a cada término de tipo i un individuo del universo A_i. Y dada una fórmula cualquiera de $\mathcal{L}$, la interpretación $\Im$ la satisface o no la satisface. Así, por ejemplo, la interpretación $\Im$ satisface la fórmula $\exists^i x P^i x$ si y solo si hay un individuo $a \in A_i$ tal que a tiene la propiedad $\Im(P)$.

Se han ofrecido varios cálculos deductivos correctos y semánticamente completos para la lógica multivariada. Resultan de aplicación fácil y natural en las situaciones antes descritas. Además facilitan la prueba de versiones especialmente elegantes del TEOREMA DE INTERPOLACIÓN de Craig. De todos modos, la lógica multivariada no añade nada sustancial a la lógica de primer orden, de la que es una mera variedad. En efecto, la lógica multivariada satisface los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem. Por tanto, y por el teorema de Lindström, no puede ser más potente que la lógica de primer orden. La lógica multivariada es reducible o traducible a la lógica de primer orden. A nivel sintáctico, las fórmulas multivariadas pueden traducirse a fórmulas habituales (univariadas) mediante el procedimiento de la relativización de los cuantificadores. Para ello, añadimos al lenguaje tantos nuevos predicados unarios $P_1, \ldots P_n$ como tipos de variables hay en el lenguaje multivariado. A continuación reemplazamos cada fórmula cuantificada sobre una variable de tipo i por otra con variable normal y el predicado P_i. En concreto, en vez de $\forall^i x \varphi(^i x)$ escribimos $\forall x(P_i x \Rightarrow \varphi(x))$ y en vez de $\exists^i x \varphi(^i x)$ escribimos $\exists x(P_i x \wedge \varphi(x))$. A nivel semántico, una interpretación multivariada sobre n universos se convierte en una interpretación normal sobre un único universo que es la unión de todos ellos, con el añadido de otros tantos subconjuntos de este único universo como entidades distinguidas del sistema sobre el que interpretamos el lenguaje. Una fórmula cualquiera φ del lenguaje multivariado es válida en la lógica multivariada si y solo si la correspondiente fórmula φ' con relativización de los cuantificadores es válida en la lógica habitual de primer orden.

lógica paraconsistente (A. *parakonsistente Logik*, F. *logique paraconsistante*, I. *paraconsistent logic*). La *lógica paraconsistente* estudia sistemas lógicos apropiados para la construcción de teorías formales inconsistentes pero no triviales. Tales sistemas permiten razonar desde conjuntos de premisas contradictorias, sin que se pueda, en general, deducir todo de ellas, como en la lógica clásica. Esta lógica incluye la regla de inferencia $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash \beta$, en virtud de la cual cualquier sentencia β del lenguaje de una teoría inconsistente pasa a ser un teorema de esta. Se puede considerar que un sistema paraconsistenté pone entre paréntesis principios clásicos como la regla citada, o el de

no contradicción, $\vdash\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$; en tal caso, dicho sistema constituye, por así decir, un complemento de la lógica clásica. Pero, en ciertas condiciones, un sistema paraconsistente puede considerarse también como una lógica alternativa.

La física matemática contiene asertos que se contradicen entre ellos, pertenecientes a distintas teorías que están todas en uso —a veces en la solución de un mismo problema— e incluso a lo que pasa por ser una misma teoría. Motivado por este hecho, y la aparente imposibilidad de formalizar las teorías físicas en el marco de la lógica clásica sin trivializarlas, Newton da Costa (1963) ideó una jerarquía infinita de sistemas formales de LÓGICA PROPOSICIONAL en los cuales la regla $(A \wedge \neg A) \vdash B$ no se postula ni se puede derivar. El primero de ellos, llamado cálculo proposicional C_1, incluye nueve axiomas esquemáticos tradicionales, y la regla de inferencia *MODUS PONENS* (bajo el número 9).

1. $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $\vdash(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
4. $\vdash(A \wedge B) \Rightarrow A$
5. $\vdash(A \wedge B) \Rightarrow B$
6. $\vdash A \Rightarrow (A \vee B)$
7. $\vdash B \Rightarrow (A \vee B)$
8. $\vdash(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}) \Rightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}))$
9. $A, A \Rightarrow B \vdash B$

A ellos se agregan otros siete axiomas esquemáticos —donde X° abrevia la fórmula del principio de no contradicción, $\neg(X \wedge \neg X)$—, a saber,

10. $\vdash B^\circ \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A))$
11. $\vdash A \vee \neg A$
12. $\vdash\neg\neg A \Rightarrow A$
13. $\vdash A^\circ \Rightarrow (\neg A)^\circ$
14. $\vdash A^\circ \wedge B^\circ \Rightarrow (A \wedge B)^\circ$
15. $\vdash A^\circ \wedge B^\circ \Rightarrow (A \vee B)^\circ$
16. $\vdash A^\circ \wedge B^\circ \Rightarrow (A \Rightarrow B)^\circ$

El axioma 10 dice que si B es una fórmula "bien portada" (esto es, cuya incompatibilidad con su propia negación $\neg B$ sea demostrable), entonces una fórmula A que demostrablemente implique a B y $\neg B$ es demostrablemente falsa. Los axiomas 11 ("tercio excluso") y 12 son rechazados por la lógica intuicionista, la familia más célebre de lógicas no clásicas; en cambio, la lógi-

ca paraconsistente los admite. Los últimos cuatro axiomas aseguran que las fórmulas compuestas mediante los CONECTORES verifuncionales sean tan "bien portadas" como sus respectivos componentes.

Sobre este sistema de lógica proposicional paraconsistente y otros similares se han fundado lógicas paraconsistentes de primer orden y orden superior.

lógica proposicional (A. *Aussagenlogik*, F. *logique propositionelle*, I. *propositional logic*). La lógica proposicional es la parte más básica y elemental de la lógica clásica. Es una lógica de las proposiciones sin analizar. En los otros niveles de la lógica, como la lógica de primer orden, analizamos las proposiciones y consideramos, por ejemplo, de qué individuos se habla en ellas y qué propiedades o relaciones se les atribuyen. No así en la lógica proposicional, donde las proposiciones se tratan como unidades opacas al análisis, aunque susceptibles de ser verdaderas o falsas, y sólo se consideran las conexiones entre ellas. En el lenguaje formal de la lógica proposicional las proposiciones se simbolizan mediante letras (las letras proposicionales) y sus conexiones se representan mediante los CONECTORES. La lógica proposicional se conoce también como lógica sentencial, lógica de enunciados, lógica conectiva y lógica de orden cero. Esta última denominación alude a la carencia de cualquier tipo de cuantificación en la lógica proposicional.

La gramática de la lógica proposicional describe su lenguaje formal. El alfabeto o conjunto de símbolos de la lógica proposicional consta de cinco constantes lógicas (los conectores o signos de NEGACIÓN, CONJUNCIÓN, DISYUNCIÓN, CONDICIONAL y BICONDICIONAL) y de un conjunto infinito numerable de letras proposicionales, además de los paréntesis, como signos auxiliares. Una FÓRMULA de la lógica proposicional es una hilera o secuencia finita de signos del alfabeto formada de acuerdo con las siguientes reglas: (1) Una letra proposicional cualquiera A es una fórmula. (2) Si α es una fórmula, entonces el resultado de escribir $\neg$ delante, es decir, $\neg\alpha$, también es una fórmula. (3) Si α y β son fórmulas, entonces $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ y $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ son también fórmulas. Fórmulas de la lógica proposicional son todas y solas las secuencias de signos formadas por aplicaciones sucesivas de estas tres reglas. El lenguaje formal de la lógica proposicional es el conjunto de todas sus fórmulas.

La semántica de la lógica proposicional define las nociones fundamentales de validez y consecuencia en función de las asignaciones veritativas. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje formal de la lógica proposicional. Sea Λ el conjunto de sus letras proposicionales. Una asignación veritativa w es una función $w : \Lambda \rightarrow \{0,1\}$ que asigna un valor veritativo (0 o 1) a cada letra proposicional de $\mathcal{L}$. Cualquier asignación veritativa w a las letras proposicionales de $\mathcal{L}$ determina una interpretación veritativa $\Im_w : \mathcal{L} \rightarrow \{0,1\}$ de todas las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$ del siguiente modo:

$\Im_w(\varphi)$	$= w(\varphi)$	si φ es una letra proposicional
$\Im_w(\neg\varphi)$	$= 1$	si $\Im_w(\varphi) = 0$
	$= 0$	si $\Im_w(\varphi) = 1$
$\Im_w(\varphi \wedge \psi)$	$= 1$	si $\Im_w(\varphi) = \Im_w(\psi) = 1$
	$= 0$	en otro caso
$\Im_w(\varphi \vee \psi)$	$= 0$	si $\Im_w(\varphi) = \Im_w(\psi) = 0$
	$= 1$	en otro caso
$\Im_w(\varphi \Rightarrow \psi)$	$= 0$	si $\Im_w(\varphi) = 1$ y $\Im_w(\psi) = 0$
	$= 1$	en otro caso
$\Im_w(\varphi \Leftrightarrow \psi)$	$= 1$	si $\Im_w(\varphi) = \Im_w(\psi)$
	$= 0$	en otro caso

Si $\Im_w(\varphi) = 1$, decimos que w satisface o verifica o hace verdadera a φ.

Una fórmula φ de la lógica proposicional es lógicamente *válida* (es decir, una TAUTOLOGÍA) si y solo si para cada asignación veritativa w : $\Im_w(\varphi) = 1$. Si la fórmula φ contiene n letras proposicionales distintas, hay 2^n asignaciones de valores veritativos a las letras de φ. Todas las asignaciones veritativas satisfacen a φ si y solo si cada una de las 2^n asignaciones de valores veritativos a las letras de φ verifica φ.

φ es una *consecuencia* de Σ si y solo si para cada asignación veritativa w : si $\Im_w(\psi) = 1$ para cada $\psi \in \Sigma$, entonces $\Im_w(\varphi) = 1$. En especial, una fórmula φ es una consecuencia de ψ (o, equivalentemente, ψ implica φ) si y solo si para cada asignación veritativa w : si $\Im_w(\psi) = 1$, entonces $\Im_w(\varphi) = 1$. La fórmula φ es una tautología si y solo si φ es una consecuencia del conjunto vacío de fórmulas. ψ es una consecuencia de φ si y solo si $(\varphi \Rightarrow \psi)$ es una tautología.

φ y ψ son lógicamente *equivalentes* si y solo si para cada asignación veritativa w : $\Im_w(\varphi) = \Im_w(\psi)$. Las fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes si y solo si $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ es una tautología.

La semántica de la lógica proposicional tiene una larga historia. La interpretación del condicional aquí indicada fue propuesta por el lógico griego Filón de Megara. La de la disyunción (no exclusiva), por Peirce en el siglo XIX. Hilbert, Łukasiewicz y Tarski acabaron de precisar las nociones. Otra manera alternativa de caracterizar la lógica proposicional proviene de la tradición del ÁLGEBRA DE LA LÓGICA. Boole se propuso estudiar el álgebra del razonamiento humano, lo que acabó plasmándose en la noción de ÁLGEBRA DE BOOLE. La lógica proposicional clásica es una lógica booleana, en el sentido de que su ÁLGEBRA DE LINDENBAUM es un álgebra de Boole.

La teoría de la prueba de la lógica proposicional describe procedimientos (cálculos deductivos) para generar sucesivamente todas sus fórmulas válidas o para deducir a partir de un conjunto de premisas dadas todas las conse-

cuencias de esas premisas. Hay una gran variedad de cálculos equivalentes para llevar a cabo esa tarea de modo correcto y completo, aunque cada uno de ellos emplea reglas de inferencia parcialmente distintas. El primer atisbo de cálculo (correcto pero semánticamente incompleto) de la lógica proposicional fue implícitamente ofrecido en la antigüedad por el lógico estoico Crisipo en base a cinco reglas primitivas de inferencia o "indemostrados". El primer cálculo propiamente dicho es el fragmento proposicional del cálculo lógico propuesto por Frege en 1879, que constituye un cálculo correcto y completo (con ciertas matizaciones relacionadas con la práctica implícita de la sustitución). La primera delimitación clara del cálculo proposicional aparece en Hilbert y Ackermann (1928). Se trata de un cálculo axiomático. En 1934 Gentzen introdujo los cálculos de DEDUCCIÓN NATURAL, de manejo más fácil e intuitivo. Desde entonces, otros muchos cálculos han sido propuestos. En cualquier caso, mientras generen las mismas fórmulas, todos esos cálculos son intercambiables, al menos en teoría, aunque en la práctica unos resulten más fáciles de aprender y manejar que otros.

La lógica proposicional es decidible. Por ejemplo, las TABLAS DE VERDAD constituyen un procedimiento de decisión respecto a la validez de las fórmulas. La transformación en una FORMA NORMAL CONJUNTIVA equivalente es otro procedimiento de decisión. De hecho, la lógica proposicional es algorítmicamente trivial y la determinación de la validez de sus fórmulas puede confiarse a un computador convenientemente programado.

lógica trivalente (A. *dreiwertige Logik*, F. *logique trivalente*, I. *three-valued logic*). En la lógica clásica se admite el *principio de bivalencia*: solo hay dos valores veritativos, la verdad y la falsedad, toda proposición es verdadera o falsa. Sin embargo, algunos autores han pensado que ciertas proposiciones con sentido no serían verdaderas ni falsas, sino que tendrían un valor veritativo distinto o intermedio. Ya Aristóteles había manifestado dudas sobre si los enunciados que se refieren a futuros contingentes (como que "mañana habrá una batalla naval") son ya hoy verdaderos o falsos. En la antigüedad se confundía la cuestión de si toda proposición es verdadera o falsa con la discusión sobre el determinismo. Los deterministas apoyaban la bivalencia; los indeterministas la ponían en duda. De hecho, ambas cuestiones son independientes. Las hipótesis sobre los resultados de un juego de azar o de una lotería son tan verdaderas o falsas como las hipótesis sobre los movimientos planetarios, aunque más difíciles o imposibles de predecir. En el INTUICIONISMO se niega que los enunciados no demostrados acerca de conjuntos infinitos sean verdaderos o falsos. En mecánica cuántica no se puede asignar una posición y un momento exactos a una partícula al mismo tiempo; si se hace, esa conjunción no es verdadera ni falsa. En 1920 Łukasiewicz propuso reconocer un valor de

verdad indeterminado o neutro ½ intermedio entre la verdad 1 y la falsedad 0 y reemplazar el principio de bivalencia por el de trivalencia, manteniendo sin embargo la definición verifuncional de los conectores. Por ejemplo, en su lógica trivalente, la negación, la conjunción y el condicional se definen del siguiente modo:

A	B	¬A	A ∧ B	A ⇒ B
0	0	1	0	1
0	½	1	0	1
0	1	1	0	1
½	0	½	0	½
½	½	½	½	1
½	1	½	½	1
1	0	0	0	0
1	½	0	½	½
1	1	0	1	1

La lógica trivalente de Łukasiewicz, así definida mediante TABLAS DE VERDAD, fue luego axiomatizada por Wajsberg y Slupecki. Formalmente considerada, la idea de la lógica trivalente se deja generalizar fácilmente a una lógica *n*-valente para cualquier número *n*. Los sistemas generales de *lógica multivalente* fueron introducidos independientemente por Post y Łukasiewicz. De todos modos, no queda claro el significado intuitivo de una gran multiplicidad de valores veritativos, aunque pueda entenderse en algún caso concreto, como en el ejemplo infinito-valente propuesto por Reichenbach: un arquero pretende alcanzar con su flecha el centro de la diana. La proposición que expresa su pretensión tendrá un "valor veritativo" = $1/(1+r)$, donde r es la distancia del punto alcanzado por la flecha al centro de la diana. Obviamente, si acierta a alcanzar el centro, su pretensión tendrá valor veritativo 1, es decir, se habrá cumplido. Cuanto más lejos se quede la flecha del centro, tanto menor será el valor veritativo de su pretensión.

logicismo (A. *Logizismus*, F. *logicisme*, I. *logicism*). Corriente de la filosofía de la matemática que pretende reducir la matemática a la lógica. El programa logicista fue propuesto por Frege en 1884. Según Frege, un enunciado verdadero es analítico si puede ser probado o deducido a partir únicamente de leyes lógicas y definiciones. Al final de su obra *Los fundamentos de la aritmética*, Frege formuló la tesis logicista: los teoremas aritméticos son enunciados analíticos. Cada concepto aritmético es definible en función de conceptos puramente lógicos. Cada teorema aritmético es deducible a partir de

leyes puramente lógicas. Calcular es deducir. La aritmética se reduce a la lógica. También Dedekind compartía estas ideas. Hacia 1900 Russell llegó independientemente a conclusiones similares y las expuso tres años más tarde en *Los principios de la matemática.*

Frege no se limitó a enunciar la tesis logicista en 1884. Inmediatamente se puso manos a la obra de demostrarla y dedicó los veinte años siguientes de su vida a llevar a cabo la tarea. Para ello disponía de su nueva lógica, mucho más potente que la tradicional. Durante todos esos años la fue ampliando y perfeccionando. El resultado fueron los dos tomos de su gran obra, *Leyes fundamentales de la aritmética*, con cuya redacción Frege pensaba haber llevado a feliz término el programa logicista. En 1902, Russell escribió una carta a Frege, dándole cuenta del descubrimiento de la (ahora) llamada PARADOJA DE RUSSELL, que implicaba una contradicción en el sistema fregeano. Frege acabó abandonando el proyecto, pero Whitehead y Russell recogieron el guante y respondieron al reto, tratando de llevar a cabo el programa logicista en los tres tomos de su monumental *Principia Mathematica.* Posteriormente Church continuó el programa logicista, que también recibió el apoyo de Carnap y Hempel.

Los matemáticos del siglo XIX —como Weierstrass y Dedekind— habían llevado a cabo la aritmetización del análisis, reduciendo los números complejos, reales y racionales a clases de números naturales. Por tanto, el primer paso del programa logicista tenía que consistir en definir los números naturales en términos lógicos. Tanto Frege como Russell lo hicieron. Dos conjuntos son biyectables si puede establecerse una biyección entre ellos. Russell identificó el *número de* (elementos de) un conjunto con la clase de todos los conjuntos biyectables con ese conjunto. Así, por ejemplo, el número de páginas de un libro sería la clase de todos los conjuntos biyectables con el conjunto de sus páginas (si el libro tuviera 230 páginas, sería la clase de todos los conjuntos con 230 elementos). En especial, el 1 sería la clase de todos los conjuntos unitarios, el 2 sería la clase de todos los pares, el 3 la clase de todos los tríos, etc. Habiendo definido lo que es el número de un conjunto, se puede definir *número natural*, en general, como aquello que es número de algún conjunto: x es un número natural si y solo si hay un conjunto y tal que x es el número de y. Esta definición no es circular, pues el concepto de *número de* está previamente definido con total independencia del concepto de *número natural.*

Dificultades surgidas en el desarrollo de *Principia Mathematica* hacen dudoso que la tesis logicista quedara probada. Por ejemplo, resulta difícil pensar que el axioma de infinitud o el de reducibilidad sean principios lógicos. En la segunda edición de *Principia*, Russell trató de eliminar la dificultad con el axioma de infinitud, anteponiéndolo como antecedente a cada teorema cuya demostración lo necesita. Así, el teorema φ pasaría a formularse '(axioma de infinitud $\Rightarrow \varphi$)', lo cual complicaba la matemática y dificultaba la compren-

sión de su aplicabilidad. Actualmente pocos filósofos o matemáticos aceptan la tesis logicista. Por lo pronto, el TEOREMA DE INCOMPLETUD de Gödel afirma la imposibilidad de formalizar completamente la aritmética en un sistema consistente de axiomas y reglas de inferencia. Con ello, la tesis logicista fuerte quedaba arruinada. Pero incluso renunciando a la completud, lo que habían hecho los logicistas era reducir la matemática a la lógica más la teoría de conjuntos, no a la lógica sola, como habían anunciado.

Russell pretendió eliminar las clases o conjuntos en favor de las "funciones proposicionales" o fórmulas abiertas que las definen, lo cual no es viable, ya que hay muchas más clases que fórmulas, mientras que solo hay tantas funciones proposicionales como fórmulas (o proposiciones). Si en la primera edición de *Principia* pretendía hacer una teoría sin clases, pero con conceptos (o "funciones proposicionales"), en la segunda pretendía prescindir también de los conceptos de tipos superiores, aunque solo lo conseguía a costa de admitir sentencias de longitud infinita, incluso innumerable. El intento russelliano de prescindir de las clases se saldó en un fracaso. Pero ello no fue óbice para que *Principia Mathematica* se convirtiera en un punto de referencia obligado de toda la investigación posterior. El mismo Gödel probó el teorema de incompletud antes mencionado en un artículo titulado "Sobre sentencias formalmente indecidibles en *Principia Mathematica* y sistemas afines" (1931). Hoy en día casi todo el mundo acepta que hay un continuo entre la lógica y la matemática y que el lugar exacto donde se trace la frontera entre ambas tiene bastante de convencional. Esto en sí mismo constituye un tributo a Frege, Russell y el resto de los logicistas, pues antes de ellos siempre se había considerado que la lógica y la matemática eran cosas totalmente separadas y que no tenían nada que ver entre sí.

longitud de onda (A. *Wellenlänge*, F. *longueur d'onde*, I. *wavelength*). Distancia entre dos crestas sucesivas o dos senos sucesivos de la ONDA. Esta definición conviene al caso de una onda plana. Si la onda tiene un frente curvo, consideramos una recta perpendicular al mismo. La *longitud de onda* λ se define entonces por la distancia entre dos puntos del medio vibrante situados sobre esa recta, que están simultáneamente en el mismo estado de vibración, sin que haya entre ellos, sobre esa recta y en ese instante, otro punto en ese mismo estado.

luz (A. *Licht*, F. *lumière*, I. *light*). Radiación electromagnética, particularmente la visible para el ojo humano, con frecuencias comprendidas aproximadamente entre $3{,}8 \times 10^{14}$ Hz y $7{,}7 \times 10^{14}$ Hz. ↗ABERRACIÓN DE LA LUZ, DESVIACIÓN GRAVITACIONAL DE LA LUZ, EFECTO DOPPLER, PRINCIPIO DEL TIEMPO MÍNIMO DE FERMAT, REFRACCIÓN, VELOCIDAD DE LA LUZ.

M

máquina de Carnot (A. *Carnotsche Maschine*, F. *machine de Carnot*, I. *Carnot engine*). La *máquina de Carnot* es una máquina térmica ideal concebida por Sadi Carnot (1824) para demostrar sus importantes hallazgos sobre la "potencia motriz del fuego". Una máquina térmica es un aparato que extrae de una fuente de energía A cierta cantidad de calor Q_A y entrega una cantidad menor de calor Q_B a un medio B más frío que A, después de convertir en TRABAJO mecánico la diferencia $W = Q_A - Q_B$. Por definición, la *eficiencia* de la máquina es igual a $W/Q_A = 1 - (Q_B/Q_A)$. La máquina de Carnot puede imaginarse como un pistón P que interactúa con una sustancia S. Esta pasa por cuatro etapas sucesivas, que forman el llamado *ciclo de Carnot*, cumplido el cual S retorna a su estado inicial. La *primera* etapa es un proceso reversible adiabático (esto es, un proceso durante el cual el sistema formado por P y S no adquiere ni pierde calor), en virtud del cual la TEMPERATURA de S aumenta bajo la acción de P hasta alcanzar la temperatura T_A de la fuente A; durante esta etapa P efectúa sobre S el trabajo W_1. En la *segunda* etapa, S recibe de A el calor Q_A, sin que varíe su temperatura T_A; durante esta etapa S efectúa sobre P el trabajo W_2. La *tercera* etapa es un proceso reversible adiabático, contrario al primero, en virtud del cual la temperatura de S disminuye en interacción con P hasta alcanzar la temperatura T_B del medio B; durante esta operación S efectúa sobre P el trabajo W_3. En la *cuarta* operación, S entrega a B el calor Q_B, sin que varíe su temperatura T_B; durante esta operación P efectúa sobre S el trabajo W_4. El trabajo total efectuado por la máquina durante el ciclo completo es entonces $W = -W_1 + W_2 + W_3 - W_4$. Carnot pudo demostrar que (1) todas las máquinas de Carnot que trabajan entre dos temperaturas dadas son igualmente eficientes y (2) cualquier otra máquina térmica que trabaje entre esas mismas temperaturas es menos eficiente que las máquinas de Carnot. Ello implica que la eficiencia de una máquina de Carnot depende exclusivamente de las dos temperaturas entre las cuales trabaja; hay una función φ tal que, con el simbolismo utilizado arriba, $Q_B/Q_A = \varphi(T_A,T_B)$. Fijando una temperatura cualquiera T_0 (por ejemplo, el punto triple del agua), es posible introducir una función de la temperatura $\theta(T) = k\varphi(T_0,T)$,

donde k es una constante arbitraria, igual a un número real positivo. Entonces, $Q_B/Q_A = \theta(T_B)/\theta(T_A)$ y la eficiencia de una máquina de Carnot alcanza el valor 1 (rendimiento del 100%) si y solo si entrega calor a la temperatura T tal que $\theta(T) = 0$.

máquina de Turing (A. *Turingmaschine*, F. *machine de Turing*, I. *Turing machine*). Hilbert había planteado en 1928 la pregunta de si la matemática es decidible, es decir, si puede haber algún procedimiento automático capaz de decidir cualquier cuestión matemática. La solución de este *Entscheidungsproblem* (problema de la decisión) requería una definición precisa del concepto de método automático o algoritmo. Lo que caracteriza a un método automático es que se aplica "mecánicamente", siguiendo las instrucciones al pie de la letra, sin intervención de ningún tipo de intuición, espabilamiento o experiencia, procediendo como una máquina. Alan Turing se tomó en serio la metáfora de la máquina. Percibió una similaridad estructural entre las operaciones de la mente, las series de instrucciones lógicas y las máquinas computadoras abstractas (las concretas todavía no existían en 1936). Así llegó en 1937 a la caracterización de su máquina como precisión de la noción intuitiva de procedimiento automático o algoritmo.

La noción de máquina de Turing es una idealización matemática útil para probar que ciertas tareas no son automatizables o que ciertas funciones no son computables. Una máquina de Turing no es una computadora física, real, construida de metal, plástico y silicio; en todo caso, sería una especie de programa. Se trata de una noción matemática, de un esquema formal que representa cualquier conjunto de instrucciones unívocas. Una máquina de Turing es como una computadora digital ideal, que trabaja paso a paso, pero sin limitaciones de memoria (con una memoria finita, pero tan amplia como se quiera) y sin limitaciones de tiempo (no trabaja en tiempo real, sino en el tiempo ideal de la matemática, y puede tomarse para sus cálculos cualquier cantidad finita de tiempo). La máquina puede estar en diversos estados y, en un momento dado, "lee" o escanea un solo cuadro de su cinta (en la que se inscriben los datos iniciales, los cálculos intermedios y el resultado final). Cada paso que da la máquina depende exclusivamente del estado en el que está y de lo que lee en el cuadro que escanea en ese momento. La máquina de Turing es el autómata determinista por excelencia.

Una función es Turing-computable si y solo si hay una máquina de Turing que la computa: si le damos uno o varios argumentos como *input*, la máquina ejecuta una serie finita de pasos programados e imprime como *output* el valor de la función para esos argumentos. Un conjunto es decidible si la correspondiente FUNCIÓN CARACTERÍSTICA (que asigna el número 1 a los objetos que pertenecen al conjunto y 0 a los que no le pertenecen) es Turing-

computable. Y un conjunto es recursivamente ENUMERABLE si y solo si hay una máquina de Turing que lo genera sucesivamente, es decir, si es el recorrido de una función numérica Turing-computable.

Representemos cada número natural n por una secuencia de $n+1$ palotes, por ejemplo 3 por ||||. Un algoritmo de computación para una función numérica unaria f es un conjunto finito de instrucciones que nos indica cómo hemos de manipular la expresión de partida, el argumento n (representado por $n+1$ palotes), para llegar, en un número finito de pasos y siguiendo al pie de la letra las instrucciones, al valor $f(n)$, representado por $f(n)+1$ palotes. Imaginemos una máquina que procesa una cinta dividida en cuadros. En cada cuadro de la cinta solo puede haber o bien un palote, |, o nada, que representaremos con un asterisco: *. En un momento dado la máquina ve un solo cuadro de la cinta (el cuadro de trabajo) y se encuentra en un estado particular. El estado de la máquina y la inscripción del cuadro de trabajo determinan unívocamente el siguiente paso de la máquina, que consiste necesariamente en una de estas cinco cosas: marcar o inscribir un palote en el cuadro de trabajo (|), marcar el signo vacío, borrando el palote, si es que lo había, y dejando el cuadro como estaba, si carecía de palote (*), pasar al cuadro de la derecha (r), pasar al cuadro de la izquierda (l) o pararse (s). La tabla o programa de esa máquina consistirá en la indicación de qué es lo que hará la máquina en cada uno de sus estados, tanto si ve | como si ve * en el cuadro de trabajo, y a qué estado pasará a continuación. He aquí la definición precisa:

Una *máquina de Turing* sobre el alfabeto {|} es una tabla o matriz de 4 columnas y $2m$ filas de la siguiente forma:

1	*	p_{11}	e_{11}
1	|	p_{12}	e_{12}
2	*	p_{21}	e_{21}
2	|	p_{22}	e_{22}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
m	*	p_{m1}	e_{m1}
m	|	p_{m2}	e_{m2}

donde para cada i,j ($1 \leq i \leq m$; $j = 1$ o $j = 2$):

$p_{ij} \in \{*, |, r, l, s\}$

$e_{ij} \in \{1, 2, \ldots m\}$

Interpretemos esta definición abstracta, fijándonos en una fila cualquiera de la tabla. El primer signo de la fila indica un estado en que puede encon-

trarse la máquina. El segundo signo, una inscripción posible en el cuadro de trabajo. El tercero, el paso que deberá dar la máquina cuando, encontrándose en dicho estado, vea tal inscripción en el cuadro de trabajo. El cuarto, el estado en el que se encontrará la máquina después de haber dado ese paso. Los números 1, 2, 3, ... de la primera columna se interpretan como los distintos estados "internos" de la máquina. El 1 representa el estado inicial. La máquina empieza a funcionar en el estado inicial y con la cinta vacía excepto una secuencia de palotes (o secuencia de secuencias de palotes, separadas unas de otras por cuadros vacíos, en el caso de una función n-aria para $n \geq 2$) que representa al argumento, y escaneando el primer cuadro vacío a la derecha del argumento. La máquina procede según las instrucciones incorporadas en su tabla, paso a paso, escribiendo sobre la cinta cuantos resultados intermedios precise. Si todo sale bien (es decir, si la máquina efectivamente computa la función de que se trate), al final la máquina se para, quedándose mirando el primer cuadrado vacío a la derecha de una secuencia de palotes, que representa el valor de la función computada para el argumento inicial.

máquina universal de Turing (A. *universelle Turingmaschine*, F. *machine universelle de Turing*, I. *universal Turing machine*). Una máquina universal de Turing es una máquina de Turing capaz de simular a cualquier otra máquina de Turing, es decir, una máquina de Turing U, tal que, para cualquier máquina de Turing T, convenientemente codificada (por ejemplo, mediante una GÖDELIZACIÓN), y para cada *input* o argumento x, U, aplicada a T y x, produce el mismo *output* o resultado que T, aplicada a x: $U(T,x) = T(x)$. De hecho, una máquina de Turing corresponde más a lo que ahora llamamos un programa, mientras que la computadora misma, capaz de ejecutar cualquier programa, es como una máquina universal de Turing. Con esto Turing definía a nivel abstracto la separación de máquina y programa, como un precedente de la arquitectura de von Neumann, posteriormente adoptada por la moderna computación. Además, la máquina universal de Turing le permitía probar rigurosamente que hay problemas matemáticos indecidibles, como el problema de determinar si una máquina de Turing dada, empezando a funcionar con una cierta inscripción en la cinta como *input*, se para alguna vez (tras dar un número finito de pasos) o bien si sigue funcionando sin llegar a pararse nunca.

marco de referencia (A. *Bezugsystem*, F. *référentiel*, I. *reference frame*). La aplicación de la física matemática a la descripción y explicación de los fenómenos depende de la asignación de coordenadas espaciales y temporales a los eventos correspondientes. Para que tenga valor informativo, la coordinatización tiene que estar atada a un sistema físico conocido y estable, que in-

cluya procesos que puedan servir como relojes para coordenatizar el tiempo. Se llama *marco de referencia*, en el sentido más general, a cualquier sistema físico que cumple esta función de ancla para fijar la denotación de un sistema de coordenadas. De un sistema de coordenadas espaciales que refleje distancias relativas a un marco de referencia dado se dice que está *adaptado* a ese marco. Otro tanto puede decirse de una coordenada temporal que refleje el tiempo registrado por relojes fijos en ese marco y sincronizados entre sí por un procedimiento convenido practicable en él.

El marco de referencia más antiguo que se conoce es la bóveda celeste, utilizada por la astronomía matemática griega para describir los movimientos en el cielo. Como las distancias entre las estrellas fijas, observadas con el ojo desnudo, no varían perceptiblemente, este marco de referencia constituye un CUERPO RÍGIDO cuya rotación diurna aparentemente uniforme y eterna marca el paso del tiempo universal.

La astronomía moderna no admite la existencia de una bóveda en el cielo, pero usa como marco de referencia un conjunto selecto de estrellas fijas que realiza con aproximación aceptable la idea de cuerpo rígido. La física, en cambio, atenta a su vocación experimental, usa generalmente como marco de referencia el cuerpo rígido que forman el suelo y las paredes del laboratorio, o tres aristas concurrentes de un instrumento u otro objeto de metal. Conforme a la MECÁNICA CLÁSICA, el tiempo universal —cuyos instantes, según Newton, se difunden indivisos por todo el espacio— puede leerse en el movimiento de rotación de un trompo rígido que no gane ni pierda MOMENTO ANGULAR. Aunque la rotación de la Tierra no cumple exactamente estas condiciones, se les acerca bastante, y por eso, en una representación idealizada, sirvió como estándar del tiempo hasta pasada la mitad del siglo XX, cuando se redefinió el SEGUNDO, refiriéndolo primero a la traslación de la Tierra (1956) y luego a un reloj atómico (1967).

Aunque en la mecánica clásica cualquier cuerpo rígido sirve como marco de referencia, el PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE NEWTON privilegia los *marcos de referencia inerciales*, constituidos por cuerpos rígidos sobre los que no actúa ninguna fuerza externa y que se mueven, sin rotación, con movimiento uniforme y rectilíneo relativamente a los demás marcos de esta clase. Las ecuaciones de la mecánica toman invariablemente la misma forma de máxima sencillez cuando se las expresa en términos del tiempo universal de Newton (arriba descrito) y de COORDENADAS CARTESIANAS adaptadas a un marco de esta clase.

La condición privilegiada de los marcos de referencia inerciales se acentúa en la teoría especial de la RELATIVIDAD, debido a que, de acuerdo con ella, no es fácil ni razonable anclar en un sólido acelerado un sistema de coordenadas espaciales (↗CUERPO RÍGIDO, último párrafo), y ni siquiera es posible

definir coherentemente una coordenada temporal mediante relojes fijos en tal sólido (por ejemplo, en un disco en rotación). En la interpretación geométrica de esa teoría debida a Minkowski, cada marco de referencia inercial puede representarse como una CONGRUENCIA de geodésicas temporaloides paralelas entre sí. Dos marcos representados por la misma congruencia están relativamente en reposo y pueden verse como partes —posiblemente separadas— de un marco único.

La teoría general de la relatividad liberaliza completamente el concepto de marco de referencia. Puede adjudicarse este título a cualquier ente o proceso físico capaz de servir de ancla a un sistema de coordenadas. Un marco de referencia no tiene que ser rígido, ni tampoco global. Como señaló Einstein, un paso decisivo y también uno de los más difíciles en el desarrollo de esta teoría consistió en reconocer que las coordenadas en física no tenían que reflejar inmediatamente los resultados de mediciones practicadas con relojes y varas de medir ideales.

marco de referencia inercial instantáneo (A. *augenblickliches Inertialbezugsystem*, F. *référentiel inertiel instantané*, I. *momentary inertial rest frame*). En el contexto de la RELATIVIDAD especial conviene a veces referir las propiedades de una PARTÍCULA al marco inercial de referencia relativamente al cual la partícula está en reposo en un instante dado. Generalmente, este *marco de referencia inercial instantáneo* de una partícula cambia a cada instante. En la formulación geométrica de la teoría especial, si la COSMOLÍNEA es la curva γ, el marco de referencia inercial instantáneo correspondiente al evento E debe representarse por la CONGRUENCIA de geodésicas temporaloides paralelas a la COSMOVELOCIDAD $\dot{\gamma}_E$.

marco de referencia inercial local (A. *lokales Inertialbezugsystem*, F. *référentiel inertiel locale*, I. *local inertial rest frame*). En la literatura de la RELATIVIDAD general se designa con esta expresión un objeto en caída libre —por ejemplo, una cápsula espacial— al cual está referida una carta local del espaciotiempo (esto es, un sistema de coordenadas definido en torno a un evento), cuando el campo gravitacional es lo bastante uniforme y el dominio de la carta lo bastante pequeño como para que la gravitación no someta al objeto a deformaciones significativas (análogas a las mareas) (↗PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA).

masa (A. *Masse*, F. *masse*, I. *mass*). En la MECÁNICA CLÁSICA, cantidad física invariable asociada indeleblemente a cada partícula de materia. Newton la nombra con la expresión escolástica *quantitas materiae* ('cantidad de materia'). Conforme a la segunda LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON, la masa de un

cuerpo es la medida de su inercia, esto es, de su resistencia a la aceleración o deceleración por fuerzas impresas: una FUERZA **F** que actúa sobre un cuerpo de masa m le imprime una ACELERACIÓN $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$. Conforme a la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON, la masa de un cuerpo mide asimismo su "carga" gravitacional activa y pasiva, esto es, su capacidad de atraer gravitacionalmente a otros cuerpos y su susceptibilidad a la atracción ejercida por estos. En la física newtoniana esta doble función —inercial y gravitacional— de la masa explica el hecho, señalado por Galileo, de que todos los cuerpos experimentan en un sitio dado de la superficie terrestre exactamente la misma aceleración de gravedad, cualquiera que sea su masa.

El concepto clásico de *masa* es incompatible con la teoría especial de la RELATIVIDAD. De acuerdo con esta teoría, la aceleración que una fuerza dada imprime a un cuerpo en un instante dado depende de la velocidad con que el cuerpo se mueve en ese instante relativamente al marco inercial a que está referida la fuerza: a mayor velocidad, menor aceleración. La medida más apropiada de la inercia es la *masa relativista* $m(v)$ definida por Planck (1906):

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

donde v es la velocidad del cuerpo en el marco elegido y c es la VELOCIDAD DE LA LUZ. La cantidad $m(0)$ que figura al lado derecho de esta ecuación, esto es, la inercia del cuerpo en el marco de referencia inercial en que su presente velocidad es 0 (esto es, en su propio MARCO DE REFERENCIA INERCIAL INSTANTÁNEO), es, por cierto, invariable por definición. Designada con m_0 o simplemente con m, se la llama *masa* a secas ("masa en reposo" en la literatura más antigua). Cuando se indican las masas de las partículas elementales se trata justamente de esta cantidad. Aunque es legítimo considerarla como heredera y continuadora del concepto clásico de masa en la teoría de la relatividad, la masa m_0 de Einstein y Planck difiere de la cantidad de materia de Newton en un respecto importante. En virtud de la equivalencia relativista entre masa y ENERGÍA, m_0 es igual a la energía contenida actualmente en el cuerpo (referida a su marco inercial instantáneo), y, por lo tanto, aumenta y disminuye cuando éste se calienta o enfría, y también es transferida de un cuerpo a otro por radiación. Asimismo, la masa de cada molécula de un compuesto químico excede típicamente en una cantidad Δm a la de los átomos que la forman, donde Δm es igual a c^{-2} veces la energía necesaria para reunir estos átomos en esa combinación; cuando estos son separados, digamos, por combustión, retornan a su masa anterior y entregan la diferencia al entorno en la

forma de calor, electricidad, energía cinética, etc. Otro tanto ocurre a muchísima mayor escala en las explosiones nucleares, en que un átomo pesado que se fisiona pierde la masa equivalente a la energía que era necesaria para mantener unidas las partes en que el núcleo se divide, o en que varios átomos livianos que se fusionan pierden la masa equivalente a la energía que sería necesaria para volver a separarlos. También las reacciones entre partículas elementales envuelven a veces pérdida de masa en la forma de energía radiante, o, a la inversa, conversión de energía radiante en partículas dotadas de masa. En particular, si una partícula choca con su antipartícula, ambas se aniquilan, convirtiéndose en radiación.

Cuando, con el advenimiento de la relatividad especial, el concepto clásico de masa se desmorona, muchos pensaron que la *masa inercial* debía separarse de la *masa gravitacional*. La estricta proporcionalidad entre ambas —comprobada por Newton hasta 1 parte en 1,000 y confirmada en el siglo XX hasta 5 partes en 10^9 por Eötvös, Pekar y Fekete (1922), hasta 1 parte en 10^{11} por Roll, Krotkov y Dicke (1964) y hasta 1 parte en 10^{12} por Braginsky y Panov (1972)— no era para ellos sino una curiosa coincidencia. Einstein, en cambio, insistió en entenderla como la manifestación de una genuina identidad, que Einstein adopta como guía en su búsqueda de una nueva teoría de la gravitación, formulada finalmente en 1915 bajo el título de *teoría general de la relatividad*. Esta teoría equipara el movimiento inercial con la CAÍDA LIBRE en un campo gravitacional uniforme; de este modo, ni siquiera es procedente distinguir en ella, como en la teoría de Newton, entre dos papeles *diferentes* —inercial y gravitacional— desempeñados por la *misma* masa; pues toda la diferencia entre la caída libre y el movimiento inercial rectilíneo y uniforme radica ahora en que, mientras que aquella puede ocurrir en cualquier lugar del universo, donde el espaciotiempo por lo general es curvo, el movimiento inercial queda confinado a regiones muy alejadas de toda fuente gravitacional, donde el espaciotiempo sea plano.

masa atómica (A. *atomische Masse*, F. *masse atomique*, I. *atomic mass*). La *masa atómica* de un elemento es el número de gramos de masa contenido en un MOL de ese elemento. Salvo en el caso del carbono-12, cuya masa atómica es igual a 12 por definición, la masa atómica de un elemento es un número real muy próximo al número total de protones y neutrones en un átomo del mismo (un poco menor en el caso de los elementos de NÚMERO ATÓMICO superior a 7; un poco mayor en los otros casos).

masa crítica (A. *kritische Masse*, F. *masse critique*, I. *critical mass*). Masa de una esfera de material fisionable del tamaño mínimo indispensable para que ocurra y se sostenga un proceso de fisión en cadena (↗ENERGÍA NUCLEAR).

En el caso del uranio-235 una esfera como la descrita tiene 0,18 m de diámetro; la correspondiente masa crítica es de 53 kg.

materia oscura (A. *dunkle Materie*, F. *matière obscure*, I. *dark matter*). El análisis de la rotación de las galaxias indica que la masa contenida en ellas es bastante mayor que la que correspondería a la luz que emiten sus estrellas. No cabe duda, pues, de que hay en el Universo una cantidad significativa de materia no radiante o *materia oscura*; pero no se sabe cuál es su orden de magnitud. Los partidarios de la INFLACIÓN cósmica conjeturan que la materia oscura es tanta cuanta haría falta para que el PARÁMETRO DE DENSIDAD Ω sea igual a 1 y el Universo en que vivimos sea, por lo tanto, plano. Ante la dificultad de completar esta cantidad con las formas de materia conocida —incluso si se admite que los neutrinos tienen masa—, se ha sugerido últimamente que existe un tipo desconocido de materia que algunos han dado en llamar *quintesencia*.

matriz (A. *Matrix*, F. *matrice*, I. *matrix*). Una *matriz* es una colección de $(m \times n)$ objetos tomados de un conjunto M y dispuestos rectangularmente en m líneas y n columnas:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Llamaremos elemento (i,j)-ésimo de la matriz (1) al elemento A_{ij} que está en la i-ésima línea y en la j-ésima columna.

Más formalmente, la *matriz* (1) puede definirse como una FAMILIA de elementos de M parametrizada por el producto cartesiano $\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$. Si $m = n$ decimos que la matriz (1) es una *matriz cuadrada*. Una *matriz infinita* es una familia parametrizada por el producto cartesiano $\omega \times \omega$.

En el resto de este artículo nos referimos a matrices cuyos elementos proceden de un ANILLO $\mathbb{A} = \langle M,\oplus,0,\otimes,1\rangle$, llamadas *matrices sobre* $\mathbb{A}$. En vez de $a \oplus b$, escribimos $a + b$ y en vez de $a \otimes b$ escribimos ab. Si A y B son dos matrices sobre $\mathbb{A}$ con (i,j)-ésimo elemento a_{ij} y b_{ij}, respectivamente, y ambas tienen m líneas y n columnas, la *suma* $A + B$ de las matrices A y B es la matriz con m líneas y n columnas, cuyo (i,j)-ésimo elemento es $a_{ij} + b_{ij}$. Si A tiene m líneas y n columnas y B tiene n líneas y k columnas, es posible definir el *producto* de las matrices A y B como la matriz AB, con m líneas y k columnas, cuyo (i,j)-ésimo elemento está dado por $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Por ejemplo,

si $m \geq 5$, $n = 3$ y $k \geq 7$, el elemento (5,7)-ésimo de AB es igual a $a_{51}b_{17} + a_{52}b_{27} + a_{53}b_{37}$. Con las operaciones de adición y multiplicación así definidas, el conjunto de las matrices sobre $\mathbb{A}$ con el mismo número n de líneas y de columnas (matrices cuadradas $n \times n$) es evidentemente un anillo. Llámase *matriz diagonal* a una matriz cuadrada cuyos elementos A_{jk}, con $k \neq j$, son todos iguales a 0; los elementos A_{kk} se sitúan todos en la diagonal del cuadrado, que baja de izquierda a derecha; para referirse a una matriz diagonal basta dar la lista. El elemento neutro de la adición es la matriz cuyos elementos son todos iguales al 0 de $\mathbb{A}$, y el elemento neutro de la multiplicación es la matriz diagonal cuyo (k,k)-ésimo elemento es el 1 de $\mathbb{A}$ ($1 \leq k \leq n$). El anillo de las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{A}$ es un anillo asociativo si $\mathbb{A}$ es asociativo, pero evidentemente no es conmutativo aunque $\mathbb{A}$ lo sea.

Atendamos al caso de las matrices cuadradas ($n \times n$) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si A es una de ellas cabe preguntarse si existe o no una matriz B tal que AB sea igual al elemento neutro de la multiplicación de matrices. Tal matriz, si existe, es la *matriz inversa* de A y se designa con A^{-1}. En tal caso, se dice que A es una *matriz invertible.* Si A es invertible, $A^{-1}A = AA^{-1}$, de modo que A^{-1} también es invertible y su inversa es A. Si tomamos como operación de grupo la multiplicación de matrices, las matrices $n \times n$ invertibles sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ forman, para cada entero positivo n, un GRUPO isomorfo al grupo de los AUTOMORFISMOS de cualquier espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Este grupo se conoce como el *grupo lineal general* GL(n,$\mathbb{K}$).

matriz disciplinaria (I. *disciplinary matrix*). Respondiendo a quienes le reprochaban la vaguedad del término PARADIGMA, utilizado por él en 1962 para referirse al modelo ejemplar que supuestamente inspira y orienta las actividades de una CIENCIA NORMAL, Kuhn (1970) propuso reemplazarlo por *matriz disciplinaria.* Junto con el cambio de nombre ofreció una caracterización bastante detallada —aunque declaradamente incompleta— de lo que una matriz disciplinaria comprende:

1° "Generalizaciones simbólicas", vale decir, aquellas expresiones esgrimidas sin cuestionamiento por los practicantes de la ciencia normal, como F = *m*a o $I = V/R$, que funcionan en parte como leyes pero en parte también como definiciones de algunos de los símbolos que despliegan.

2° Ideas metafísicas con que el grupo está más o menos comprometido, ya sea que profese creer en ellas o que las use como guía heurística. (Kuhn cita como ejemplo la creencia en que todos los fenómenos perceptibles resultan de la interacción de átomos cualitativamente neutros en el vacío, que el calor es la energía cinética de las partes pequeñas

de los cuerpos, que la corriente eléctrica puede concebirse como un sistema hidrodinámico estacionario.)

3° Valores compartidos.

4° Ejemplos de problemas y soluciones, como los ofrecidos a los estudiantes desde el comienzo de su educación científica, en laboratorios, exámenes y libros de texto. (Kuhn los llama *exemplars*, o sea, propiamente, *paradigmas*; comenta: "Todos los físicos [...] empiezan por aprender los mismos *exemplars*: problemas tales como el plano inclinado, el péndulo cónico y las órbitas keplerianas; instrumentos tales como el vernier, el calorímetro y el puente de Wheatstone; pero según su entrenamiento progresa, las generalizaciones simbólicas que comparten son ilustradas en grado creciènte por distintos *exemplars* [en las diferentes especialidades]".)

El nuevo término no ha tenido el mismo éxito que el anterior, quizás porque la misma precisión que Kuhn le impuso inhibe o cohíbe a los usuarios.

mecánica clásica (A. *klassische Mechanik*, F. *mécanique classique*, I. *classical mechanics*). Teoría del movimiento de los cuerpos fundada por Newton y perfeccionada por Euler, Lagrange, Hamilton y Jacobi, entre otros. Para Newton la tarea de la física consistía en hallar las fuerzas de la naturaleza investigando los fenómenos del movimiento para luego inferir de ellas todos los demás fenómenos. Durante dos siglos la *mecánica clásica* brindó el marco necesario para la progresiva ejecución de esta tarea y fue considerada el dechado de las ciencias, hasta que, a principios del siglo XX, la creciente riqueza y precisión de los resultados experimentales puso de manifiesto sus insuficiencias y la MECÁNICA RELATIVISTA y la MECÁNICA CUÁNTICA la desplazaron de su sitial. Con todo, la mecánica clásica ofrece todavía un ejemplo de claridad intelectual no superado en la física y las otras ciencias empíricas y sigue siendo —especialmente ahora que las computadoras permiten resolver con excelente aproximación complejos sistemas de ecuaciones diferenciales— un instrumento inmejorable para tratar situaciones en que la CONSTANTE DE PLANCK es desdeñable y la VELOCIDAD DE LA LUZ puede tratarse como infinita.

En la concepción de Newton, los cuerpos subsisten en el tiempo absoluto, que fluye parejamente, sin relación con nada fuera de él, y cada instante se difunde por todo el espacio; la primer axioma o LEY DEL MOVIMIENTO y el teorema de la conservación del MOMENTO ANGULAR permiten señalar procesos que se desarrollan uniformemente en el tiempo absoluto y por tanto pueden usarse como relojes. Los cuerpos están localizados en un espacio tridimensional euclídeo, en el cual reposan o se mueven conforme a las tres LEYES DEL

MOVIMIENTO. Newton declara que este espacio es absoluto y único, tal como el tiempo; pero su mecánica no respalda esta posición. En efecto, si A_0 es un cuerpo que se mueve inercialmente, esto es, sin aceleración ni rotación, y $A_1, \ldots, A_n$ son cuerpos que se mueven uniformemente y en línea recta en distintas direcciones respecto a A_0, el corolario v de las leyes del movimiento excluye la posibilidad de distinguir mediante alguna diferencia física cuál de todos ellos —si alguno— reposa en el espacio absoluto. Por lo tanto, cualquiera de los espacios relativos en que respectivamente reposan estos cuerpos —en otras palabras, cualquier espacio determinado por un MARCO DE REFERENCIA inercial— puede desempeñar en la mecánica clásica la función que Newton atribuye al quimérico espacio absoluto único (↗PRINCIPIO DE RELATIVIDAD).

Los sucesores de Newton erigieron el edificio de la mecánica en torno a varios MODELOS (IDEALIZACIONES) aptos para representar distintos tipos de cuerpos en movimiento. La *mecánica de partículas* considera sistemas finitos de PARTÍCULAS carentes de volumen pero dotadas de una MASA constante y que a veces son sede de FUERZAS CENTRALES. Cuatro o más partículas cuyas distancias mutuas no varían determinan un *cuerpo rígido*, el modelo clásico del sólido cuyas deformaciones no entran en consideración. La *mecánica de continuos* representa los cuerpos como continuos deformables: sólidos elásticos y fluidos incompresibles o compresibles. La mecánica de los fluidos se ha solido llamar *hidrodinámica*, aunque sería preferible restringir esta denominación al estudio de los fluidos incompresibles —esto es, de volumen constante— que generalmente se emplean como modelos del comportamiento del agua. Aplicando el mismo criterio, la mecánica de los fluidos compresibles —cuyo volumen varía con la temperatura y la presión— puede llamarse *aerodinámica*.

A continuación explicamos algunas ideas básicas de la mecánica clásica de partículas y los términos pertinentes. Consideramos un sistema de n partículas $a_1, \ldots, a_n$, referido a un marco de referencia inercial. Sea m_k la masa de a_k y $\mathbf{r}_k$ el vector que marca su posición relativa al origen de ese marco de referencia. Designamos con $\mathbf{F}_{ki}$ la fuerza que ejerce a_k sobre a_i y con $\mathbf{F}_i^e$ la resultante de todas las fuerzas externas al sistema que actúan sobre a_i $(1 \leq i,k \leq n)$. Conforme a las leyes del movimiento de Newton, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden describe completamente los movimientos del sistema, por lo cual se las llama *ecuaciones del movimiento*:

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^e + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

(donde los puntos sobre la **r** indican el número de veces que se toma la derivada del vector **r** con respecto al tiempo). Aunque conceptualmente muy

simples, estas ecuaciones fácilmente resultan inmanejables si n es grande y, como es usual, la interacción entre los componentes del sistema no se conoce en detalle. Sin embargo, como vio Lagrange, tal conocimiento resulta innecesario si, como ocurre en casi todos los casos de interés, la libertad de movimiento de las partículas del sistema está restringida por *ligaduras* (o *vínculos*); por ejemplo, las que unen las partes de un cuerpo sólido, manteniéndolas a distancias mutuas casi invariables. Tales ligaduras son, sin duda, una consecuencia de la interacción entre las partículas, pero es posible describirlas y tenerlas en cuenta cuando estudiamos los movimientos del sistema aunque no tengamos ni la más remota idea de cómo opera dicha interacción. Las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas pueden clasificarse en dos grupos: *fuerzas de ligadura* (que sostienen los vínculos) y *fuerzas externas* (o *impresas*). Si designamos con x_{3k-2}, x_{3k-1} y x_{3k} el primer, segundo y tercer componentes del vector $\mathbf{r}_k$ respecto a una base ortonormal de nuestra elección, la posición de todas las partículas en un momento dado está descrita por las coordenadas $x_1,\ldots, x_N$ ($N = 3n$). Si x_h es una de las tres coordenadas de una determinada partícula, llamamos, respectivamente, X_h y Ξ_h al componente, relativo a esa coordenada, de la fuerza externa y de la fuerza de ligadura que actúan sobre esa partícula. Con este simbolismo, las ecuaciones (1) pueden reescribirse así:

$$m_h\ddot{x}_h = X_h + \Xi_h \qquad (1 \leq h \leq N) \qquad (2)$$

Un *desplazamiento virtual* es cualquier desplazamiento infinitesimal del sistema que —en el instante considerado— sería compatible con las ligaduras si estas no cambiasen durante ese desplazamiento. Suponemos, con Lagrange, que *las fuerzas de ligadura no trabajan en los desplazamientos virtuales*; esto es, que para cualquier desplazamiento virtual $x_h \mapsto x_h + \delta x_h$ ($1 \leq h \leq N$), tenemos que

$$\sum_{k=1}^{N} \Xi_k \delta x_k = 0 \qquad (3)$$

Multiplicando por δx_h ambos lados de cada ecuación (2), sumando todas las ecuaciones resultantes y reemplazando los valores suministrados por (3), obtenemos una ecuación única —llamada a veces un tanto impropiamente *principio de d'Alembert*— que proporciona un marco general para la formulación y solución de todos los problemas mecánicos concernientes a sistemas que cumplen la condición (3):

$$\sum_{k=1}^{N} (m_k\ddot{x}_k - X_k)\delta x_k = 0 \qquad (4)$$

Si las ligaduras no dependen del tiempo, cualquier desplazamiento infinitesimal posible del sistema es un desplazamiento virtual, y también, por tanto, el que efectivamente resulta de su velocidad actual. En tal caso es posible reemplazar δx_h con $\dot{x}_h$ en (4) y obtener así

$$\sum_{k=1}^{N} X_k \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k \ddot{x}_k = \frac{dT}{dt} \tag{5}$$

donde T designa la ENERGÍA cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k^2 \tag{6}$$

Supongamos ahora que existe una función V, dependiente únicamente de las coordenadas de posición $x_1, \ldots, x_n$, tal que

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_k}\dot{x}_k = -\sum_{k=1}^{N} X_k \dot{x}_k \tag{7}$$

En tal caso se dice que las fuerzas externas son *derivables del potencial V*. $T + V$ es el HAMILTONIANO del sistema, igual en cada momento a su *energía total*. Sumando las ecuaciones (5) y (7) se obtiene la *ecuación de la energía*:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \tag{8}$$

Por lo tanto, $T + V$ = const.: *la energía total se conserva*. Un sistema que cumple con esta condición se llama *conservador*. Se dice asimismo que son *conservadoras* las fuerzas externas que actúan sobre él.

Si las restricciones impuestas a las coordenadas de posición por las ligaduras pueden describirse mediante K ecuaciones de la forma $f_r(x_1,\ldots,x_N,t)$ = const. ($1 \leq r \leq K$), el sistema se dice *holonómico*. Mediante estas ecuaciones es posible entonces expresar K coordenadas de posición en términos de las restantes $N - K$. Más generalmente, la N coordenadas $x_1, \ldots, x_N$, ligadas entre sí, pueden expresarse —de diversos modos— como funciones diferenciables de $N - K = m$ variables independientes $q_1, \ldots, q_m$. m es el número de *grados de libertad* del sistema. Las q_j se llaman *coordenadas generalizadas*; en contraste con las x_h, normalmente no representan distancias. El segundo término de las ecuación (7) puede entonces reescribirse así:

$$\sum_{k=1}^{N} X_k \delta x_k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j$$

Las cantidades Q_j se llaman *componentes de la fuerza generalizada.* No es preciso que tengan las dimensiones de la fuerza, pero cada término $Q_j \delta q_j$ tiene la dimensión del TRABAJO: *masa* × (*espacio/tiempo*)². Si existe una función U, dependiente de las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_m$ y sus primeras derivadas respecto al tiempo $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$, tal que

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) \qquad (1 \leq k \leq m)$$

U se llama *potencial generalizado* y se dice que las fuerzas externas son derivables de un potencial generalizado (↗ECUACIONES DE EULER Y LAGRANGE, ECUACIONES DE HAMILTON, ENERGÍA, ESPACIO DE CONFIGURACIÓN, ESPACIO DE LAS FASES, FUERZA, HAMILTONIANO, LAGRANGIANO, LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON, MASA, MOMENTO ANGULAR, MOMENTO CINÉTICO, PRINCIPIO DE HAMILTON, TRABAJO).

mecánica cuántica (A. *Quantenmechanik*, F. *mécanique quantique*, I. *quantum mechanics*). La expresión *mecánica cuántica* fue acuñada por Einstein (1922), pero Born (1924) fue el primero que instó a crear una teoría física con este nombre, que diera cuenta de los fenómenos que Bohr y sus seguidores en vano trataban de encuadrar en modelos basados parcialmente en la MECÁNICA CLÁSICA (↗ÁTOMO). Heisenberg y Schrödinger respondieron a esa demanda, aquél con su "mecánica de matrices" (1925), éste con su "mecánica ondulatoria" (1926), ambas aptas para superar los escollos en que naufragaba la "vieja teoría cuántica". Después que Schrödinger (1926b) sostuvo que estas dos teorías son equivalentes, Dirac, Jordan y von Neumann construyeron en torno a ellas el edificio espléndido de la "teoría de transformaciones", en cuyo seno la "mecánica de matrices" y la "mecánica ondulatoria" se reconciben de tal modo que efectivamente se equivalen. Lo que hoy se llama *mecánica cuántica* es el fruto de esta construcción. Aunque sus innovaciones siguen dando dolores de cabeza a los filósofos y algunos físicos muy eminentes han declarado que no acaban de entenderla, esta es la teoría que todos usan para concebir y predecir los fenómenos cuánticos que no dependen significativamente de la velocidad de la luz (la teoría no es compatible con la RELATIVIDAD especial). Abrumadoramente confirmada en su campo de aplicación, la *mecánica cuántica* es el punto de partida obligado de la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS —nombre genérico de

las teorías relativistas de fenómenos cuánticos— y comparte con ellas sus conceptos centrales.

La mecánica cuántica asocia a cada sistema cuántico *S* un ESPACIO DE HILBERT $\mathcal{H}_S$, generalmente de infinitas dimensiones. En la llamada "imagen de Schrödinger" (I. *Schrödinger picture*), el estado del sistema en un momento dado *t* se representa mediante un vector $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_S$; cualquier múltiplo de $|\psi(t)\rangle$ representa el mismo estado; generalmente se elige como representativo un vector "normalizado", esto es, cuyo cuadrado sea igual a 1. El vector de estado $|\psi(t)\rangle$ evoluciona en el tiempo conforme a la ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER. Esta es una ECUACIÓN DIFERENCIAL que admite una y solo una solución para cada especificación de condiciones iniciales y de frontera. Por lo tanto, la evolución temporal del estado del sistema cuántico *S* es estrictamente determinista. Por otra parte, el conocimiento del estado $|\psi(t)\rangle$ solo excepcionalmente suministra información inequívoca sobre las cantidades físicas observables en el sistema *S*. La mecánica cuántica representa estas cantidades mediante OPERADORES LINEALES autoadjuntos sobre $\mathcal{H}_S$, que, por metonimia, también suelen llamarse observables. Si el operador Q representa la cantidad *Q* que va a medirse en el sistema *S* cuando este se halle en el estado $|\psi(t)\rangle$, puede ocurrir excepcionalmente que $\mathrm{Q}|\psi(t)\rangle = q|\psi(t)\rangle$; decimos entonces que $|\psi(t)\rangle$ es un *vector propio* de Q, correspondiente al *valor propio* *q* y representativo de un *estado propio* del observable que se medirá. En este caso, la mecánica cuántica predice con probabilidad 1 que el valor observado de *Q* será *q*. Por regla general, un sistema *S* no se encuentra en un estado propio del observable en cuestión. Sin embargo, si pasamos por alto ciertas complicaciones matemáticas en que no es oportuno entrar aquí, podemos afirmar que los vectores propios de cualquier observable forman una base ortogonal del espacio $\mathcal{H}_S$, de modo que cualquier vector de estado $|\psi\rangle$ es igual a una combinación lineal de ellos. Por ejemplo, si Q tiene un espectro finito de valores propios $q_1, \ldots, q_n$, correspondientes a diferentes vectores propios $|\varphi_1\rangle, \ldots, |\varphi_n\rangle$, tenemos que

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\psi\rangle$$

La mecánica cuántica predice entonces que la medición de *Q* en *S* cuando *S* está en el estado $|\psi\rangle$ arrojará el resultado q_k con probabilidad igual a $|\langle\varphi_k|\psi\rangle|^2$ (si $|\psi\rangle$ es un vector normalizado).

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ los espacios de Hilbert asociados a dos sistemas S_1 y S_2. Entonces, los estados del sistema combinado $S_1 + S_2$ se representan mediante vectores pertenecientes al PRODUCTO TENSORIAL de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. Si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son respectivamente los estados de S_1 y S_2, el estado de $S_1 + S_2$ debe representarse con el vector $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ (o por otro vector perteneciente al subespacio uni-

dimensional de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ generado por él). Pero después que S_1 y S_2 interactúen, el estado de $S_1 + S_2$ tendrá que representarse con un vector de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ que, por regla general, no será simplemente el producto tensorial de dos vectores, pertenecientes el uno a S_1 y el otro a S_2, sino más bien una combinación lineal de tales productos: la interacción de dos sistemas cuánticos S_1 y S_2 puede entrelazarlos de manera inextricable.

En la llamada "imagen de Heisenberg" (I. *Heisenberg picture*) el estado de un sistema cuántico S se representa mediante un vector invariable en el respectivo espacio de Hilbert $\mathcal{H}_S$, y las cantidades observables en S se representan mediante operadores autoadjuntos en $\mathcal{H}_S$ que evolucionan con el tiempo en su espacio de funciones de acuerdo con una ecuación apropiada, homóloga a la de Schrödinger.

La mecánica cuántica tiene otros modos de representar los estados de un sistema S. Por ejemplo, si el estado de S puede representarse mediante el vector normalizado $|\psi\rangle$, también se lo puede representar mediante el subespacio unidimensional de $\mathcal{H}_S$ generado por $|\psi\rangle$ o por el proyector $|\psi\rangle\langle\psi|$ que aplica todo el espacio $\mathcal{H}_S$ en el subespacio generado por $|\psi\rangle$ (↗OPERADOR LINEAL). Especial mención merece la representación de los estados cuánticos mediante el llamado *operador estadístico* u *operador de densidad*, que hace posible un trato uniforme de los estados "puros", realizados en colecciones de sistemas preparados *exactamente* de la misma manera, y del caso más realista de los estados "mixtos", resultantes ya sea de la imprecisión del proceso experimental de preparación o de la consideración separada de subsistemas de un sistema mayor. En la representación mediante vectores de estado, estos corresponden a estados "puros"; un estado "mixto" se concibe como una mezcla estadística de estados "puros" (de donde su nombre) y se representa mediante una suma de tales vectores, ponderada por la frecuencia relativa —conocida o conjeturada— de los respectivos estados "puros" en la mezcla. Cuando los estados "puros" y "mixtos" se representan mediante operadores de densidad, toda la diferencia estriba en que la TRAZA del operador que representa un estado "puro" es igual a 1, mientras que la traza de un operador que representa un estado "mixto" es menor que 1. Desde este punto de vista, ni siquiera es necesario suponer que el estado "mixto" es una mezcla estadística de estados "puros"; más bien, los estados "mixtos" pasan a ser los estados generales de los sistemas cuánticos, mientras que los estados "puros" son casos límite.

Las predicciones probabilísticas de la mecánica cuántica solo pueden ponerse a prueba en colecciones muy grandes de sistemas iguales (idealmente, en un número infinito de ellos). Se compara el valor medio o expectativa de una cantidad con el promedio registrado en una larga serie de mediciones. Se compara asimismo la dispersión predicha en torno al valor medio con la dis-

persión efectiva de los resultados en torno al promedio registrado. Una consecuencia importante e insoslayable de la mecánica cuántica es el llamado PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG, en virtud del cual el producto de las dispersiones de dos OBSERVABLES incompatibles —por ejemplo, la posición y el momento cinético de una partícula— tiene una cota inferior mayor que 0.

Los rompecabezas filosóficos de la mecánica cuántica provienen en parte de la resistencia a asumir el azar, muy arraigada en nuestra tradición judeocristiana, pero sobre todo de las consecuencias del entrelazamiento cuántico arriba aludido, cuya confirmación experimental (↗TEOREMA DE BELL) socava radicalmente las ideas recibidas sobre la realidad física. Ambos factores pesan en los debates sobre el PROBLEMA CUÁNTICO DE LA MEDICIÓN y la PARADOJA DE EINSTEIN, PODOLSKY Y ROSEN y han conferido a la mecánica cuántica un carácter único, sin precedentes en la historia de la física, a saber, que su estructura matemática se interpreta, por así decir, a dos niveles. Por un lado está la interpretación pedestre implícita en cualquier exposición de la mecánica cuántica como teoría física, comprobable en un laboratorio. Según ella, el llamado estado de un sistema cuántico encierra información probabilística sobre las cantidades observables en él, la cual puede extraerse aplicando al representante del estado el operador autoadjunto representativo de la cantidad que interesa observar. Aunque se la suele llamar peyorativamente "interpretación minimalista" y hasta se ha dicho que es "aburrida" (Sudbery, 1986), esta es de hecho la única interpretación que ponen a prueba y respaldan los tests experimentales de la teoría. Por otro lado, hay un espectro de interpretaciones suplementarias más o menos sofisticadas, incompatibles entre sí, con las que se ha buscado disipar las perplejidades producidas por la mecánica cuántica, ya sea aclarando y precisando la relación de esta teoría con el quehacer físico en general (Bohr, 1928, 1935, 1949), ya sea rearticulando sus conceptos (van Fraassen, 1972; Healey, 1989; Bub, 1997) o redefiniendo los conectores lógicos que determinan el alcance de sus aseveraciones (Putnam, 1969), ya sea incrustando el devenir cuántico manifiesto en trasfondos metafísicos de diverso jaez, sin asidero en la observación y la experimentación (Bohm, 1952; Everett, 1957; DeWitt, 1971; Lockwood, 1996). Para referencias someras a algunas de estas interpretaciones, ↗COMPLEMENTARIEDAD, LÓGICA CUÁNTICA, PROBLEMA CUÁNTICO DE LA MEDICIÓN.

mecánica estadística (A. *statistiche Mechanik*, F. *mécanique statistique*, I. *statistical mechanics*). La *mecánica estadística* aplica los métodos del CÁLCULO DE PROBABILIDADES y la INFERENCIA ESTADÍSTICA al estudio de sistemas mecánicos clásicos o cuánticos cuyo número de grados de libertad es tan grande que es imposible conocer su estado con precisión.

Un MOL de cualquier gas contiene más de 6 × 10^{23} moléculas. La representación clásica de este sistema en el ESPACIO DE LAS FASES envuelve n coordenadas generalizadas de posición $q_1,..., q_n$ y las correspondientes coordenadas conjugadas de momento $p_1,..., p_n$, donde $n > 3 \times 6 \times 10^{23}$. Es evidentemente imposible siquiera conjeturar el valor preciso de tantos números. Ocurre, sin embargo, que lo que observamos en el gas como un estado discernible por nosotros —como un solo *macroestado*— puede corresponder a muchísimos estados diferentes —muchísimos *microestados*— del sistema mecánico de sus moléculas. Para aplicar la mecánica clásica al estudio de un sistema con muchos grados de libertad y del que solo conocemos y nos interesan los macroestados bastaría, pues, considerar una colección ideal de sistemas representables en un mismo espacio de las fases $\mathcal{S}$, cualquiera de los cuales podría ser —por su macroestado— el sistema real investigado; tales colecciones se llaman *ensembles* en inglés, francés y alemán, pero aquí las llamaremos *colectivos*. El estado instantáneo de cada sistema corresponde a un solo punto de $\mathcal{S}$, pero el estado instantáneo del colectivo corresponde a una nube de puntos que llenan una región de $\mathcal{S}$. Por la unicidad de las soluciones de las ECUACIONES DE HAMILTON, dos sistemas del colectivo, que ocupen puntos diferentes en un momento dado, nunca podrán ocupar el mismo punto a la vez. El volumen que ocupan en $\mathcal{S}$ los puntos representativos del colectivo en cada instante no varía en el tiempo (teorema de Liouville). La mecánica estadística especifica la condición del colectivo en cualquier momento mediante la *densidad* ρ con que los puntos representativos del mismo están distribuidos en $\mathcal{S}$ en ese momento. La función ρ depende del tiempo t y de las coordenadas de posición y momento y se normaliza de modo que

$$\int_{\mathcal{S}} \rho(q, p, t)dq_1 ...dq_n dp_1 ...dp_n = 1 \qquad (1)$$

donde hemos escrito q por $\langle q_1,..., q_n \rangle$ y p por $\langle p_1,..., p_n \rangle$. Si se cumple la condición (1), ρ mide la probabilidad por unidad de volumen de que el estado de un miembro del colectivo elegido al azar se halle en tal o cual región del espacio de las fases. Si $F(q,p)$ es cualquier función de las coordenadas de posición y momento, su valor medio $\langle F(q, p) \rangle$ está dado por

$$\langle F(q, p) \rangle = \int_{\mathcal{S}} F(q, p)\rho(q, p, t)dq_1 ...dq_n dp_1 ...dp_n \qquad (2)$$

El problema fundamental de la mecánica estadística clásica consiste, obviamente, en hallar la función ρ para el sistema considerado y sus subsistemas. Para ello se postulan probabilidades a priori, de las que se deduzcan predicciones constatables. Aunque todos los autores fundamentan sus hipótesis

probabilísticas con argumentos racionales o razonables, en último término —como señaló Tolman (1938)— ellas solo pueden justificarse por la correspondencia entre las conclusiones que permiten y las regularidades en el comportamiento de los sistemas reales que se encuentran en la experiencia. Entre las hipótesis probabilísticas más generales se encuentra la adoptada por el mismo Tolman, según la cual el punto representativo del sistema considerado tiene la misma probabilidad de hallarse en el espacio de las fases en cualquier región de igual volumen que satisfaga igualmente las condiciones que, según lo que se sabe, cumple el sistema. Otra, aceptada por algunos pero muy disputada por otros, postula que la probabilidad de que el sistema considerado se encuentre en cierto estado en un momento cualquiera del tiempo es igual a la probabilidad de que un sistema elegido al azar en el colectivo se encuentre en ese momento en ese estado. Esto se deduce de la llamada *hipótesis ergódica*, introducida originalmente por Boltzmann, según la cual el punto representativo de cualquier sistema aislado pasará sucesivamente por todos los puntos compatibles con la energía del sistema antes de retornar a su posición inicial en el espacio de las fases.

La mecánica estadística clásica fue fundada por Maxwell (1860) y perfeccionada en las décadas siguientes por Boltzmann, con miras a deducir las leyes de la termodinámica y el comportamiento observado de los gases del movimiento de las moléculas que los forman (de acuerdo con la hipótesis atómico-molecular adoptada por estos autores; ↗ÁTOMO). Sus métodos dieron lugar a predicciones correctas, de gran utilidad para la química, pero también a dos grandes fracasos: los calores específicos asignados a los distintos elementos concuerdan bien con los valores observados solo a temperaturas corrientes; además, con arreglo a la mecánica estadística clásica, la intensidad de la RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO crece con la frecuencia de la radiación más allá de todo límite asignable ("catástrofe ultravioleta"). El segundo problema se superó con el descubrimiento de la ley y la CONSTANTE DE PLANCK y el nacimiento de la física cuántica, en el marco de la cual Debye (1912) resolvió el primero. Con la fundación de la MECÁNICA CUÁNTICA en 1925 se hizo posible el desarrollo de una mecánica estadística cuántica, que incorpora además la nueva ESTADÍSTICA DE PARTÍCULAS iniciada por Bose (1924). En el marco de la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS, Pauli (1940) estableció la relación entre el SPIN integral o medio-integral de las partículas elementales y su respectiva clasificación como BOSONES y FERMIONES, de la que depende su tratamiento por la mecánica estadística.

mecánica relativista (A. *relativistische Mechanik*, F. *mécanique relativiste*, I. *relativistic mechanics*). Mientras la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA se aviene de suyo con la teoría especial de la RELATIVIDAD, que incluso la liberó de la pe-

nuria de tener que imaginar un ÉTER para la transmisión de las ondas electromagnéticas, la MECÁNICA CLÁSICA solo es compatible con la relatividad especial en situaciones en que la mayor velocidad relativa v de alguno de los cuerpos en juego es tanto menor que la de la VELOCIDAD DE LA LUZ c que el cociente v^2/c^2 se deja igualar a 0. Para el caso —común en los experimentos con electrones y otras partículas elementales— en que v^2/c^2 es una cantidad significativa, Einstein y sus seguidores tuvieron que desarrollar una nueva *mecánica relativista*, con ecuaciones invariantes bajo las TRANSFORMACIONES DE LORENTZ.

Ante todo, hubo que reformar la cinemática. En la mecánica clásica, si un cuerpo A se mueve libremente con velocidad uniforme $\mathbf{v}_{AB}$ con respecto a otro cuerpo B, que a su vez se mueve con velocidad uniforme $\mathbf{v}_{BC}$ relativamente a un tercer cuerpo C, la velocidad $\mathbf{v}_{AC}$ con que A se mueve respecto a C es simplemente la suma vectorial de las otras dos:

$$\mathbf{v}_{AC} = \mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BC} \tag{1}$$

La ecuación (1) supone que las tres velocidades están referidas al mismo tiempo universal newtoniano único. En la mecánica relativista, el tiempo adaptado al MARCO DE REFERENCIA inercial en que reposa B no coincide con el tiempo adaptado al marco inercial en que reposa C, y la transformación de Lorentz que lleva de uno al otro implica que

$$\mathbf{v}_{AC} = \frac{1}{1+\frac{\mathbf{v}_{AB}\cdot\mathbf{v}_{BC}}{c^2}}\left\{\mathbf{v}_{BC}\left[1-\frac{\mathbf{v}_{AB}\cdot\mathbf{v}_{BC}}{v_{BC}^{\;2}}\left(\sqrt{1-\frac{v_{BC}^{\;2}}{c^2}}\right)-1\right]+\mathbf{v}_{AB}\sqrt{1-\frac{v_{BC}^{\;2}}{c^2}}\right\} \tag{2}$$

donde v_{BC} es la magnitud del vector $\mathbf{v}_{BC}$. Si las velocidades $\mathbf{v}_{AB}$ y $\mathbf{v}_{BC}$ son paralelas, de magnitud v_{AB} y v_{BC}, respectivamente, $\mathbf{v}_{AC}$ es paralela a ambas y su magnitud está dada por la sencilla fórmula siguiente:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB}+v_{BC}}{1+\frac{v_{AB}v_{BC}}{c^2}} \tag{3}$$

Por analogía con (1) y con notorio abuso de lenguaje, la fórmula (2) suele llamarse la *regla relativista de la adición de velocidades*, aunque propiamente se trata, en ambos casos, de una *transformación de velocidades* que nos lleva de la velocidad de A relativa al MARCO DE REFERENCIA inercial en que B reposa a la velocidad de A referida al marco inercial en que reposa C.

La principal novedad de la dinámica relativista es la variación de la inercia con la velocidad. Si una partícula se mueve en un marco de referencia inercial con velocidad de magnitud v, su MASA relativista es

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{4}$$

donde m_0 es la masa a secas o "masa en reposo" de la partícula, que mide su inercia en su propio MARCO DE REFERENCIA INERCIAL INSTANTÁNEO. Otra novedad estrechamente relacionada con la anterior, y que Pauli (1921) considera el resultado más importante de la mecánica relativista, es la equivalencia de masa y ENERGÍA:

$$E = mc^2 \tag{5}$$

La ecuación (5), referida al marco de referencia inercial instantáneo de la partícula, dice que su contenido energético E_0 de la partícula en reposo, medido en joules, es igual a su "masa en reposo" m_0, medida en kilógramos, multiplicada por el cuadrado de la velocidad de la luz, medida en metros por segundo. Referida a un marco de referencia inercial en que la partícula se mueve con velocidad $v > 0$, la ecuación (5) iguala, en los términos indicados, la energía total de la partícula —la suma de E_0 y la energía cinética— con su masa relativista $m(v)$. Una consecuencia inmediata de esto es que los incrementos sucesivos de velocidad relativa un marco dado demandan una cantidad de energía cada vez mayor, que converge a infinito en el límite $v \rightarrow c$.

medición y metrización (A. *Messung und Metrisierung*, F. *mesure et métrization*, I. *measurement and metrization*). *Medir* es determinar el valor numérico de una propiedad de un objeto individual (se trata generalmente de propiedades relacionales). Medimos el área de un solar, la temperatura de un enfermo, la presión de una caldera. Se puede medir asimismo, sobre una muestra numerosa de objetos individuales de una misma clase, el valor de una propiedad característica de esa clase: el punto de ebullición del nitrógeno, la conductividad eléctrica del aluminio, el momento magnético del electrón. También, por cierto, el valor medio de una propiedad cuyo valor difiere de un individuo a otro. Toda *medición* presupone un CONCEPTO MÉTRICO de aquello que se mide. La formación de un concepto métrico de una determinada propiedad o relación se llama *metrización*. Hay propiedades como el *volumen* y el *peso* cuya metrización —implícita— data de la prehistoria; otras, como la *temperatura* y la *probabilidad*, que fueron expresa y deliberadamente me-

trizadas en una época reciente; otras, por último, que fueron concebidas métricamente desde su invención (o descubrimiento).

Sea P una propiedad y Σ_p el espectro de sus casos posibles. La metrización de P supone concebir una función $f_p : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{S}$, donde $\mathbb{S}$ es un sistema numérico. Si $\mathbb{S}$ es $\mathbb{R}$ o un intervalo $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$, decimos que P ha sido concebida como una *magnitud* o *cantidad continua*. Si $\mathbb{S}$ es $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o un subconjunto propio de estos sistemas numéricos, P es una *cantidad discreta*. En principio nada impide que que $\mathbb{S}$ sea $\mathbb{Q}$ o un subconjunto de $\mathbb{Q}$, y así ocurre con propiedades que estudia la economía, como el producto per cápita de un país o la productividad de sus trabajadores. Pero parece ser que, históricamente, se ha considerado continua toda propiedad física que toma valores no enteros en el dominio de los racionales. En la práctica, por cierto, la medición de una propiedad supuestamente continua nunca puede arrojar un valor irracional.

La función metrizadora f_p induce naturalmente en Σ_p las propiedades y relaciones estructurales características de $\mathbb{S}$; la pieza clave de una metrización consiste en decidir cuáles de estas propiedades y relaciones son significativas y cuáles no son más que un efecto desechable del procedimiento. Por ejemplo, la metrización del tiempo, que asigna a la duración de cada fenómeno un valor real, permite, bajo ciertas condiciones, caracterizar una duración como la "suma" o la "diferencia" de dos duraciones; pero no reconoce ninguna duración como el "producto" o el "cociente" de dos duraciones. La metrización de las temperaturas (escala absoluta) confiere a éstas un orden isomorfo al orden de los reales no negativos, pero la suma de temperaturas no tiene sentido. En los casos más familiares, la decisión es obvia y responde a una percepción de la estructura de Σ_p que motiva y preside la metrización de P; pero en otros casos, requiere tacto, y puede ocurrir que la estructura inducida por f_p en Σ_p, heredada del sistema numérico $\mathbb{S}$, abra los ojos para caracteres de Σ_p que habían pasado desapercibidos. Es común asimismo que una función cuyos argumentos son n-tuplos ($n \geq 1$) de valores numéricos de una propiedad metrizada, pero cuyos valores no representan esa propiedad, metrice otra cantidad física significativa; por ejemplo, si usamos la variable t para representar duraciones, t^2 no representa una duración, pero sí una cantidad que figura en muchas relaciones físicas importantes (vgr. la tercera LEY DE KEPLER). En general, la representación numérica de las propiedades físicas es la clave del uso heurístico de las matemáticas en la ciencia moderna: todos los teoremas referentes a los sistemas numéricos pueden, en principio, revelar un rasgo insospechado de la realidad física representada con ellos o inspirar y guiar los experimentos que lo revelen.

En la física moderna, algunas propiedades se representan mediante vectores, tensores, espinores u otros objetos que no son números, aunque cada uno de ellos puede especificarse completamente mediante una lista apropia-

da de números. *Medir* una de estas propiedades consiste siempre en determinar los valores de estos números. Considérese, por ejemplo, la CURVATURA del ESPACIOTIEMPO, representada por el tensor de Riemann; propiamente lo que mide el gravímetro no es ella, sino cada uno de sus componentes relativos al sistema de coordenadas adoptado. Los objetos matemáticos usados en tales representaciones no poseen las relaciones de ORDEN que tradicionalmente se consideran como una característica común a todos los conceptos métricos. Por eso, no nos parece recomendable hablar en estos casos de *metrización* ni de *conceptos métricos*. Lo mismo vale, por cierto, para las propiedades representadas mediante números complejos y cuya medición en cada caso consiste en determinar la parte real y el factor real de la parte imaginaria del número complejo correspondiente.

La literatura en inglés cubre ordinariamente bajo el término *measurement* las dos operaciones aquí distinguidas como *metrización* y *medición*. Ello puede inducir a confusión cuando se distingue entre formas *fundamentales* y *derivadas* de cada operación. La *metrización fundamental* consiste en establecer directamente una representación numérica del espectro Σ_P de una propiedad P, decidiendo qué relaciones en Σ_P son representadas por cuáles aspectos estructurales del sistema numérico y fijando una escala y unidad de medida (↗CONCEPTO MÉTRICO). La *metrización derivada* consiste en definir la función f_P con que se metriza una propiedad P en términos de otras funciones metrizadoras ya establecidas. Por ejemplo, la mecánica clásica propone una metrización fundamental de distancia, tiempo y masa; y metrizaciones derivadas de velocidad inercial ($v = s/t$, donde s es la distancia recorrida y t el tiempo invertido en recorrerla), volumen, densidad y muchas otras cantidades. Análogamente, debe entenderse por *medición fundamental* una operación física que redunda directamente en la determinación del valor de la propiedad medida, y por *medición derivada* una operación que mide fundamentalmente otras propiedades de cuyo valor se infiere el de la cantidad medida. Por ejemplo, las masas se miden, fundamentalmente, con una balanza; la intensidad de la corriente eléctrica se mide derivadamente con un amperímetro que mide el desplazamiento de una aguja y, por este medio, la fuerza ejercida por la corriente cuya intensidad se quiere determinar.

medida (A. *Mass*, F. *mesure*, I. *measure*). Una función μ definida en una σ-ÁLGEBRA $\mathfrak{B}$ sobre un conjunto cualquiera K es una *medida* si cumple las condiciones siguientes:

(i) μ toma sus valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, esto es, en el cuerpo de los reales, extendido con los dos símbolos $+\infty$ y $-\infty$.

(ii) μ es *no negativa*; específicamente $\mu(\varnothing) = 0$ y $\mu(A) > 0$, si $\varnothing \neq A \in \mathfrak{B}$.

(iii) μ es *aditiva:* para cualesquiera A, $B \in \mathcal{B}$ tales que $A \cap B = \varnothing$, $\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(iv) μ es σ-aditiva: si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia de elementos de $\mathcal{B}$ tales que, para cualquier par de índices diferentes h y k, $A_h \cap A_k = \varnothing$,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

En el siglo XX se definieron varios tipos de *medidas* en este sentido, como la medida de Lebesgue, definida sobre el cuerpo de Borel que forman los subconjuntos medibles-según-Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ (para cualquier entero positivo n); las medidas de Borel, de Baire, de Haar, etc.

mereología (A. *Mereologie*, F. méréologie, I. *mereology*). La palabra 'mereología' procede del griego μέρος, que significa 'parte'. La mereología es el estudio formal o abstracto de la relación de las partes con el todo. La mereología extensional clásica fue introducida por Leśniewski en 1916 y desarrollada por él en los años siguientes. Fue reformulada por Leonard y Goodman como cálculo de individuos en 1940.

Unas cosas son partes de otras. Los dedos son partes de las manos y el tejado es parte de la casa. Si una cosa es parte de otra, la otra es un todo del que la primera es una parte. Lo que es un todo en un contexto puede ser una parte en otro, y a la inversa. Así, las mitocondrias son partes de la célula, pero el todo de la célula es a su vez parte del tejido, y el tejido es parte del órgano y el órgano es parte del cuerpo, etc. La relación de parte a todo es transitiva. Las partes de las partes de un todo son también partes de ese todo. Las células son también partes del cuerpo. La mereología trata de la relación en que están las partes con el todo, la relación en que unos objetos están con otros cuando los primeros son partes de los segundos. Cualquier todo es parte (impropia) de sí mismo. Y el objeto vacío (si se admite) es parte de cada todo. Una parte propia de un todo es una parte de ese todo distinta de la parte vacía y del todo mismo. La suma o fusión mereológica de dos objetos es el objeto constituido por la consideración de los dos objetos como un único objeto, que contiene como sus partes a ambos y a las partes de ambos. El producto mereológico o solapamiento de dos objetos está constituido por las partes que ambos objetos comparten.

La mereología clásica es equivalente (isomorfa) al ÁLGEBRA DE BOOLE completa —con o sin 0, según el gusto de los autores. Leśniewski, Leonard, Goodman, Simons y Lewis excluyen el individuo vacío, mientras que Martin, Carnap, Bunge y Bunt lo aceptan en sus sistemas mereológicos. Es cierto que la noción de individuo vacío no es nada natural, está alejada de nuestra ma-

nera habitual de pensar y carece de otra motivación que la de simplificar la teoría mereológica, pero lo mismo se puede decir de las clases impropias o de la noción de suma o fusión arbitraria de cualesquiera partes o individuos para formar un nuevo individuo, que sin embargo todos los autores aceptan.

Los axiomas de la mereología (con individuo vacío) son los del álgebra de Boole completa, donde los parámetros $\sqsubseteq$, $\sqsubset$, $\sqcup$, $\sqcap$, $\complement$, 0, 1 reciben la siguiente interpretación:

$x \sqsubseteq y$:	x es una parte de y
$x \sqsubset y$:	x es una parte propia de y
$x \sqcup y$:	suma mereológica o unión de x e y
$x \sqcap y$:	producto mereológico o solapamiento de x e y
0 :	el individuo vacío
1 :	el individuo universal
$\complement x$:	el complemento de x, es decir, el individuo universal menos x

La suma o fusión mereológica corresponde a la unión del álgebra de Boole, que es el supremo (o mínima cota superior) de dos miembros del álgebra. La mereología clásica acepta la suma mereológica de un número cualquiera de objetos, sin restricción alguna. Esta generosidad la convierte en un álgebra de Boole completa. Esta exigencia es muy fuerte y ha atraído muchas críticas, pues parece ir contra nuestras intuiciones de lo que es un individuo natural.

Un átomo (en el sentido mereológico) es un objeto sin partes propias. La mereología clásica puede ser atomista o sin átomos. En la mereología atomista cada objeto se compone de átomos, un objeto es parte de otro si y sólo si todos los átomos del primero son átomos del segundo, y dos objetos son idénticos si y sólo si tienen los mismos átomos. La teoría resultante es muy simple y fluida. Por transposición del teorema de representación para álgebras de Boole, cada (realización de la) mereología atomista es isomorfa al álgebra de los subconjuntos del conjunto de sus átomos (excluyendo sólo al conjunto vacío, caso de que trabajemos con una mereología sin objeto vacío). Las masas o materiales (en el sentido de las cosas a las que se refieren los nombres masivos como 'agua', 'aire' o 'mantequilla') son realizaciones perfectas de la mereología clásica.

Hay una correspondencia entre las clases de individuos y los todos enteros compuestos de partes. Para cada clase de individuos hay una nueva cosa concreta, que es la suma mereológica de todos esos individuos, considerados como partes de la nueva cosa. A la clase $B \doteq \{b_1,...,b_n\}$ corresponde la cosa entera o todo $\sqcup B = b_1 \sqcup ... \sqcup b_n$. Para cada todo o cosa concreta compuesta de partes hay una clase que tiene a esas partes como miembros. Al todo o

cosa entera $b_1 \sqcup ... \sqcup b_n$ corresponde la clase $B = \{b_1,..., b_n\}$. Si identificamos un individuo concreto arbitrario con la región del espaciotiempo que ocupa, y esta región con el conjunto de sus puntos, a cada individuo concreto x le corresponde el conjunto de sus puntos $pn(x)$. Entonces para cada clase A de individuos concretos existe la cosa concreta $\sqcup A$, que ocupa la región del espaciotiempo $\sqcup\{pn(x)|x \in A\}$.

La teoría de conjuntos trata de clases arbitrarias; establece los constreñimientos que cualquier clase arbitraria debe satisfacer. La mayoría de las clases arbitrarias no son tipos naturales. Los individuos de los que trata la mereología son también individuos arbitrarios. Cada individuo natural tiene que satisfacer los constreñimientos de la mereología y, además, otras condiciones suplementarias. La mayoría de los individuos arbitrarios no son individuos naturales. Los subconjuntos arbitrarios de los tipos naturales o las intersecciones, uniones o diferencias arbitrarias de tipos naturales tampoco son, en general, tipos naturales. Lo mismo ocurre con los todos mereológicos y sus partes. Las partes mereológicas arbitrarias de un individuo natural no son, en general, individuos naturales. Y tampoco lo son las sumas, productos y diferencias mereológicas arbitrarias de individuos naturales.

Las partes arbitrarias de un individuo pueden ser más o menos naturales. Una parte natural de un todo natural es una parte arbitraria de ese todo que es ella misma una entidad natural o entera (algo como una célula, o un órgano, o un organismo, o una población, o una molécula, o un lago, o una estrella).

En la teoría de conjuntos decimos que un conjunto A es un subconjunto propio de B (y, por tanto, en la lectura mereológica, una clase propia de B) si A es distinto de B y está incluido en B, si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. El principio clásico de que el todo es mayor que sus partes propias vale para los conjuntos finitos, pero falla para los infinitos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares es un subconjunto propio del conjunto de los números naturales; sin embargo, hay tantos números naturales como pares. En efecto, la función $f : n \mapsto 2n$ es una biyección del conjunto de los números naturales en el de los números pares. Por tanto, ambos tienen la misma cardinalidad o tamaño. Bunt (1985) y D. Lewis (1991) mostraron cómo gran parte de la teoría de conjuntos podía reducirse a la mereología con el añadido de la noción primitiva del *singleton* $\{x\}$ o clase unitaria de un solo elemento.

mesón (A. *Meson*, F. *méson*, I. *meson*). Partícula con spin entero que siente la interacción nuclear fuerte. Por tanto, los mesones son bosones y hadrones. Cada mesón es una partícula compuesta de un quark y un antiquark, unidos por la interacción nuclear fuerte. Tienen "vidas" cortas. Ejemplos de mesones son los piones y los kaones.

metalenguaje (A. *Metasprache*, F. *métalangage*, I. *metalanguage*). Lenguaje desde el que hablamos de otro lenguaje, al que en este contexto llamamos el *lenguaje-objeto*. Por ejemplo, si escribimos en inglés un libro acerca de la lengua china, el inglés es el metalenguaje del chino y el chino es el lenguaje-objeto. Si hablamos en el lenguaje ordinario acerca de cierto lenguaje formal, el lenguaje ordinario es el metalenguaje de ese lenguaje formal, que es el lenguaje-objeto. Desde luego, las categorías de metalenguaje y lenguaje-objeto son relativas y dependen del contexto. También se puede escribir en chino un libro acerca de la gramática inglesa, en cuyo caso el chino es el metalenguaje y el inglés el lenguaje-objeto. Hilbert introdujo la distinción entre lenguaje y metalenguaje en el curso de sus investigaciones metamatemáticas (formuladas en el metalenguaje constituido por la lengua alemana ampliada con ciertas expresiones técnicas) sobre las teorías matemáticas formalizadas en el lenguaje-objeto de la lógica de primer orden. Tarski incorporó esencialmente la distinción entre lenguaje y metalenguaje a su teoría de la VERDAD, evitando así las paradojas semánticas que surgen cuando hablamos de la verdad de las expresiones de un lenguaje en ese mismo lenguaje.

método diagonal (A. *Diagonalverfahren*, F. *méthode diagonale*, I. *diagonal method*). Método de prueba introducido por Paul du Bois-Reymond (1875), utilizado por Cantor para demostrar que el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ es innumerable. El método sirvió luego para demostrar el TEOREMA DE CANTOR y el TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL, y también desempeña un papel en la formulación de la PARADOJA DE RUSSELL.

Para mostrar cómo opera y explicar su nombre, probaremos con él el siguiente teorema: *el conjunto* $\wp\omega$ *de todos los subconjuntos del conjunto* ω *de los ordinales finitos no es numerable*. Para ello, suponemos dada una inyección cualquiera $f : \omega \rightarrow \wp\omega$, $k \mapsto C_k$ y demostramos que existe un conjunto $C \in \wp\omega$ tal que $C \neq C_k$ para todo $k \in \omega$, de modo que el recorrido de f no es igual a su codominio $\wp\omega$. Cada conjunto $C_k \in f[\omega]$ puede representarse mediante una secuencia infinita $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3},\ldots$, donde $a_{kh} = 1$ si el número $h \in C_k$ y $a_{kh} = 0$ si $h \notin C_k$. (Esta secuencia en efecto despliega la FUNCIÓN CARACTERÍSTICA del conjunto C_k.) Definimos el conjunto C por la condición siguiente: $\forall x \in \omega, x \in C \Leftrightarrow x \notin C_x$. C puede entonces representarse mediante la secuencia infinita de ceros y unos $a_1, a_2, a_3,\ldots$, donde $a_k = 1$ si $a_{kk} = 0$ y $a_k = 0$ si $a_{kk} = 1$. Obviamente, C difiere de cada conjunto C_k en al menos un elemento: para cada $k \in \omega$, $k \notin C \cap C_k$. Si escribimos las secuencias representativas de los C_k en líneas sucesivas, como una matriz infinita, la secuencia representativa de C se obtiene reemplazando 1 con 0 y 0 con 1 a lo largo de la diagonal de la matriz. De ahí el nombre *método diagonal* con que se conoce este método de prueba.

metodología de los programas de investigación científica (A. *Methodologie der wissenschaftlichen Forschungsprogramme*, F. *méthodologie des programmes de recherche scientifique*, I. *methodology of scientific research programmes*). Expresión acuñada por Lakatos (1970) para referirse a su principal aporte a la filosofía de la historia de la ciencia. Según Lakatos, la historia de la ciencia se articula en *programas de investigación*, cuyo respectivo desarrollo genera una secuencia de teorías. Cada nueva teoría resulta de agregar cláusulas auxiliares o reinterpretar algunos de los términos de la teoría precedente a fin de acomodar una ANOMALÍA. Cada programa se caracteriza por un *núcleo duro* (*hard core*) intocable, un conjunto de proposiciones que la *heurística negativa* del programa prohíbe eliminar por *MODUS TOLLENS*. (Por ejemplo, el núcleo duro del programa newtoniano comprende, según Lakatos, las tres LEYES DEL MOVIMIENTO y la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL.) En cambio, los científicos deben emplear su ingenio para inventar y formular *hipótesis auxiliares* que formen una *faja protectora* en torno a dicho núcleo. Esta faja ha de sobrellevar el impacto de los tests experimentales y ajustarse y reajustarse, e incluso ser completamente reemplazada, para defender el núcleo. La *heurística positiva* del programa consiste en un conjunto de sugerencias e indicaciones, no siempre explícitas, para desarrollar tales hipótesis auxiliares, para modificar y refinar la faja protectora refutable. Combinadas, las dos heurísticas determinan lo que suele llamarse el "tinglado conceptual" (*conceptual framework*) del programa. La secuencia de teorías generada por el desarrollo del programa es *teóricamente progresiva* si cada nueva teoría predice un hecho novedoso, inesperado hasta entonces; es *empíricamente progresiva* si la novedad prevista es corroborada por la experiencia, esto es, si cada nueva teoría conduce al descubrimiento de un hecho nuevo. La secuencia es *progresiva* si es a la vez teórica y empíricamente progresiva; de lo contrario, se dice que *degenera*. Según Lakatos, para que un programa de investigación sea reconocido como *científico* tiene que dar lugar a una secuencia que sea al menos teóricamente progresiva; de otro modo, debe rechazárselo como pseudocientífico. La degeneración persistente de un programa de investigación invita y generalmente conduce a su reemplazo, pero puede ocurrir que un programa que ha sido desplazado por otro reviva y vuelva a ser progresivo (como ocurrió a principios del siglo XIX con la óptica ondulatoria, fundada por Huygens en el siglo XVII y desplazada por la óptica corpuscular de Newton en el siglo XVIII).

La filosofía de la historia de la ciencia de Lakatos basada en una erudición histórica más amplia que la de Popper y en una educación filosófica más completa que la de Kuhn, tuvo gran influencia por diez o doce años, hasta 1975, cuando Lakatos falleció repentinamente a los 50 años de edad. Aparte de la desaparición de su pujante personalidad, contribuyeron al eclipse de su

filosofía: 1° la dificultad en determinar efectiva e inequívocamente si un programa de investigación determinado está progresando o degenerando; 2° la incomodidad con el uso, a menudo abusivo, en los estudios históricos salidos de la escuela de Lakatos, de la llamada *reconstrucción racional*, o reconfiguración de los hechos de la historia de la ciencia para hacerlos calzar con el esquema lakatosiano, un procedimiento inaceptable para los historiadores profesionales y también para la sensibilidad de hoy, en mejor sintonía con la variedad de lo real y contraria a las simplificaciones unificantes; 3° la creciente tendencia a no entender la ciencia como un mero acervo de asertos —la visión que Popper y Lakatos compartían con el positivismo lógico— sino como praxis social (en la cual, entre otras cosas, también ocurre que se habla).

métrica (A. *Metrik*, F. *métrique*, I. *metric*). Si S es un conjunto cualquiera, una *métrica* en S —en el sentido corriente del término— es una función δ: $S \times S \to \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones, para cualesquiera objetos $a, b, c \in S$:

M1 $\delta(a,b) \geq 0$.
M2 $\delta(a,b) = 0$ si y solo si $a = b$.
M3 $\delta(a,b) = \delta(b,a)$.
M4 $\delta(a,b) + \delta(b,c) \geq \delta(a,c)$.

El número real $\delta(a,b)$ se llama *la distancia* entre a y b.

Hay otra acepción de 'métrica' que se explica bajo MÉTRICA RIEMANNIANA. Toda métrica riemanniana —en el sentido estrecho empleado por el propio Riemann— determina en la variedad respectiva una métrica en el sentido corriente. Pero el concepto generalizado de métrica en esta segunda acepción —que corresponde a las "métricas" de la cosmología relativista— no cumple con esta condición. Por eso, se las llama *métricas semi-riemannianas* o aun *pseudoriemannianas*; aunque sería más justo llamarlas *pseudométricas*.

métrica de Minkowski (A. *Minkowskische Metrik*, F. *métrique de Minkowski*, I. *Minkowski metric*). Según la interpretación geométrica propuesta por Minkowski (1907, 1909), la teoría especial de la RELATIVIDAD concibe el ESPACIOTIEMPO como una VARIEDAD DIFERENCIABLE $\mathcal{M}$ de cuatro dimensiones provista de una MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA, la *métrica de Minkowski* η, que puede caracterizarse así: la variedad $\langle \mathcal{M}, \eta \rangle$ admite una CARTA global x, con coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3, tal que los componentes de η relativos a x son constantes y están dados por:

$$\begin{aligned} \eta_{ik} &= \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = 0 \quad \text{si } i \neq k \\ \eta_{00} &= \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^0}\right) = -1 \\ \eta_{kk} &= \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = 1 \quad \text{si } k > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(Esta caracterización se ajusta a la convención de SIGNATURA adoptada en este diccionario; algunos autores siguen la convención opuesta, en cuyo caso $\eta_{00} = 1$ y $\eta_{kk} = -1$ si $k > 0$.) En la teoría especial de la relatividad, una carta x del espaciotiempo que cumpla esta condición tiene el siguiente significado físico: (i) el origen de x es un evento (punto espaciotemporal) cualquiera; (ii) las curvas paramétricas de la coordenada x^0 constituyen (determinan, representan) un marco referencial inercial $\mathfrak{R}$; (iii) las coordenadas x^1, x^2, x^3 constituyen un sistema de coordenadas espaciales cartesianas adaptado a $\mathfrak{R}$; (iv) la coordenada x^0 es igual a una coordenada temporal definida sobre $\mathfrak{R}$ por el método de Einstein (↗SIMULTANEIDAD); (v) las coordenadas reflejan distancias espaciales e intervalos temporales medidos en unidades tales que la velocidad de la luz $c = 1$. En términos de la carta x, el ELEMENTO DE LÍNEA ds de la métrica de Minkowski está dado por:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{2}$$

métrica estándar de $\mathbb{R}^n$. El producto cartesiano de n copias del CUERPO $\mathbb{R}$ de los NÚMEROS REALES es un ESPACIO MÉTRICO si la distancia $\delta(\mathrm{x},\mathrm{y})$ entre dos puntos cualesquiera $\mathrm{x} = \langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ y $\mathrm{y} = \langle y_1,\ldots,y_n\rangle$ está dada por

$$\delta(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2$$

Es fácil comprobar que, si $n = 2$, esta condición es equivalente al TEOREMA DE PITÁGORAS. Se la ve por eso como una extensión de este teorema a n dimensiones y esta métrica $\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suele llamarse *métrica euclídea* o *métrica pitagórica*.

métrica lorentziana (A. *Lorentzsche Metrik*, F. *métrique de Lorentz*, I. *Lorentz metric*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFENCIABLE real de cuatro dimensiones provista de la MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA g. Se dice que g es una *métrica lorentziana* si tiene SIGNATURA 2, como la MÉTRICA DE MINKOWSKI. Como consecuencia de ello, si $T_p\mathcal{M}$ es el espacio tangente a cualquier punto p de $\mathcal{M}$, la partición de

$T_p\mathcal{M}$ en vectores espacialoides, temporaloides y nulos inducida por g no se distingue de la que induciría en $T_p\mathcal{M}$ cierta métrica de Minkowski definida en un entorno de *p*; en dicho entorno la métrica g es aproximada linealmente por esta métrica de Minkowski. (Bajo la convención de signatura opuesta a la preferida en este diccionario, las métricas lorentzianas tienen signatura –2.)

métrica riemanniana (A. *Riemannsche Metrik*, F. *métrique de Riemann*, I. *Riemannian metric*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFENCIABLE real. Sea g un CAMPO TENSORIAL de tipo (0,2) sobre $\mathcal{M}$. g es una ***métrica riemanniana*** sobre $\mathcal{M}$ si y solo si g es ***simétrico***, ***no degenerado*** y ***positivo definido***. Para una explicación de estos términos, ↗MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA.

La métrica riemanniana g definida en la variedad $\mathcal{M}$ permite asignar a todo arco de CURVA en $\mathcal{M}$ una longitud invariante bajo reparametrizaciones. La *distancia* $\delta_g(p,q)$ entre los puntos *p* y *q* en $\mathcal{M}$ se define entonces como la longitud del arco de curva más corto que va de *p* a *q*. La función $\delta_g : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ es una MÉTRICA en el sentido corriente. (Es por esto, y no por otra razón, por lo que se llama ***métrica*** al campo tensorial g.)

métrica semi-riemanniana (A. *semi-Riemannsche Metrik*, F. *métrique pseudo-Riemanienne*, I. *semi-Riemannian metric*). Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFENCIABLE real. Sea g un CAMPO TENSORIAL de tipo (0,2) sobre $\mathcal{M}$. g es una *métrica semi-riemanniana* sobre $\mathcal{M}$ si y solo si

M1 g es *simétrico*; y
M2 g es *no degenerado*.

g es una MÉTRICA RIEMANNIANA propiamente tal y determina en $\mathcal{M}$ una MÉTRICA en sentido corriente si, además de las condiciones anteriores, cumple también con esta:

M3 g es *positivo definido*.

La condición M1 significa que, para cualesquiera campos vectoriales *V* y *W*, definidos en abiertos de $\mathcal{M}$, $g(V,W) = g(W,V)$ en la intersección de los dominios de *V* y *W*. La condición M2 significa que, para todo campo vectorial *W* definido en un abierto de $\mathcal{M}$, $g(V,W) = 0$ en la intersección de los dominios de *V* y *W*, si y solo si *V* es un campo vectorial igual a 0 en todo $\mathcal{M}$ (en otras palabras, si y solo si *V* le asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ el vector $0 \in T_p\mathcal{M}$). La condición M3 significa que, en el dominio de cualquier campo vectorial *V* definido en un abierto de $\mathcal{M}$, $g(V,V) \geq 0$, siendo idéntico a 0 si y solo si *V* es idéntico a 0.

Conforme a esta definición, el tensor g_p asignado por la métrica semi-riemanniana g a cada punto $p \in \mathcal{M}$ es un PRODUCTO ESCALAR en el ESPACIO TANGENTE $T_p\mathcal{M}$. Si g es positivo definido, g_p es un PRODUCTO INTERNO. (Compárense las condiciones **M1**, **M2** y **M3** con las condiciones **PE1** y **PE2** del artículo PRODUCTO ESCALAR y con las condiciones **PI1**, **PI2** y **PI3** del artículo PRODUCTO INTERNO.)

La métrica semi-riemanniana **g** determina una PARTICIÓN de los vectores tangentes en cualquier punto $p \in \mathcal{M}$; cada vector $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ se dice *espacialoide*, *temporaloide* o *nulo* según que $g_p(\mathbf{v},\mathbf{v})$ sea un número real positivo, negativo o igual a 0, respectivamente. (Si se adopta la convención de SIGNATURA opuesta a la preferida en la presente obra, hay que intercambiar *espacialoide* y *temporaloide* en la definición precedente; sobre la motivación física de esta nomenclatura, ↗MÉTRICA DE MINKOWSKI; la nomenclatura no se aplica si g es positivo definido, en cuyo caso la partición es trivial.) Una curva γ en $(\mathcal{M},g)$ se dice *espacialoide*, *temporaloide* o *nula* si, en cada punto p por el que pasa γ, el vector tangente $\dot{\gamma}_p$ es, respectivamente, *espacialoide*, *temporaloide* o *nulo*. La métrica semi-riemanniana g permite asignar significativamente una longitud a las curvas espacialoides de $\mathcal{M}$ y otra, incomparable con la anterior, a las curvas temporaloides. Si $\mathcal{S}$ es una subvariedad de $\mathcal{M}$ en que todas las curvas son espacialoides, la restricción de g a $\mathcal{S}$ es obviamente una métrica riemanniana que determina una función $\delta_g : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ que es una métrica en sentido ordinario.

métricas de Friedmann-Robertson-Walker (A. *Metriken von Friedmann-Robertson-Walker*, F. *métriques de Friedmann-Robertson-Walker*, I. *Friedmann-Robertson-Walker metrics*, FRW *metrics*). Familia de métricas del espaciotiempo que cumplen ciertas condiciones de simetría analizadas independientemente por Robertson (1935/1936) y Walker (1935), y que Friedmann había anticipado en sus escritos cosmológicos (1922, 1924). El ELEMENTO LINEAL característico de una *métrica de Friedmann-Robertson-Walker* (métrica FRW) se expresa habitualmente en términos de un sistema de coordenadas (t,r,θ,φ) tal que las CURVAS PARAMÉTRICAS de la coordenada temporal t concuerdan con las COSMOLÍNEAS de la materia y el valor de las coordenadas espaciales r, θ y φ es constante a lo largo de cada cosmolínea. Bajo estas condiciones, las coordenadas espaciales pueden elegirse de modo que el ELEMENTO LINEAL de la métrica esté dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

donde (i) k es una constante que se pone igual a 1, −1 o 0, según que sea positiva, negativa o plana la curvatura del espacio (esto es, la curvatura de cual-

quier hipersuperficie t = const.) y (ii) $a(t)$ es una función dependiente solamente de t que constituye un factor de proporcionalidad entre las métricas del espacio en momentos sucesivos y mide, por lo tanto, la expansión (o contracción) del Universo (↗FACTOR DE ESCALA).

metro (A. *Meter*, F. *mètre*, I. *meter*). Unidad de longitud en el SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES de medida. En 1791 se definió el metro como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por Dunkerque y Barcelona. Para obviar las dificultades de medir el meridiano con suficiente precisión, en 1798 se redefinió el metro como la longitud de una barra de platino fabricada al efecto. En 1889 esa barra fue sustituida por otra más estable. Sin embargo, hacia 1950 todo el mundo era consciente de que ninguna barra metálica era completamente estable. En 1960, la Conferencia General de Pesas y Medidas decidió cambiar el estándar de longitud, redefiniendo el metro como una longitud igual a 1 650 763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del isótopo kriptón-86. Esta definición supone que la frecuencia de dicha transición y la velocidad (unidireccional) de la luz en el vacío son constantes. Con la definición del metro adoptada en 1983 y todavía vigente este último supuesto pasó a ser una convención internacional. En virtud de ella, un *metro* es la longitud del camino recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo igual a 1/299 792 458 de un segundo.

modalidad (A. *Modalität*, F. *modalité*, I. *modality*). Un operador proposicional (que, aplicado a una proposición, produce otra proposición) *O* se llama extensional o verifuncional si y solo si expresa una función veritativa, es decir, si para cada proposición *A* la verdad o falsedad de *O*(*A*) depende exclusivamente de la verdad o falsedad de *A*. Los CONECTORES de la lógica proposicional son ejemplos de operadores verifuncionales. En el caso contrario, es decir, si el operador proposicional *O* no es verifuncional, si la verdad o falsedad de *O*(*A*) no depende exclusivamente de la verdad o falsedad de *A*, hablamos de modalidad en sentido amplio.

Con frecuencia hablamos de modalidad sin más para referirnos al tipo especial de modalidad llamada *modalidad alética*, que indica si algo es verdad meramente de hecho (contingencia) o si algo tiene que ser verdad (necesidad) o si algo puede ser verdad (posibilidad). Estas modalidades se expresan mediante los operadores unarios "es NECESARIO que", "es POSIBLE que" y "es CONTINGENTE que" y sus correpondientes negaciones, como "es imposible que", así como mediante el operador binario de implicación estricta "necesariamente implica que". Todas estas modalidades son lo que los lógicos medievales llamaban modalidades *de dicto*, es decir, modalidades referidas a pro-

posiciones enteras y no a sus componentes, en contraposición a las presuntas modalidades *de re*, que se aplicarían a las cosas mismas o a sus propiedades. Aristóteles ya analizó y formuló las interrelaciones lógicas entre estas nociones; por ejemplo, 'es necesario que *Q*' equivale a 'no es posible que no *Q*'. La formalización de nuestras intuiciones sobre las modalidades ha dado lugar a diversos sistemas de LÓGICA MODAL, como los famosos S4 y S5 de Lewis.

Von Wright se dio cuenta de que otras modalidades no aléticas, como las *deónticas*, obedecen leyes paralelas a las estudiadas por la lógica modal para las modalidades aléticas. Así, si en vez de 'es necesario que' decimos 'es obligatorio que' y en vez de 'es posible que' decimos 'está permitido que', también 'es obligatorio que *Q*' equivale a 'no está permitido que no *Q*'. La formalización de estas intuiciones ha dado lugar a la *lógica deóntica*, que ha encontrado ciertas aplicaciones jurídicas. Un paralelismo similar se da con las modalidades *epistémicas*. Si en vez de 'es necesario que' decimos 'se sabe que' y formalizamos las correpondientes interrelaciones lógicas, obtenemos un sistema de *lógica epistémica*, como los desarrollados por von Wright o Hintikka.

modelo (A. *Modell*, F. *modèle*, I. *model*). Término central en la lógica y la filosofía de la ciencia de hoy, donde se lo emplea en dos acepciones muy diferentes y en cierto modo opuestas.
a. En el sentido propio de la TEORÍA DE MODELOS, una INTERPRETACIÓN $\mathfrak{S}$ de una teoría T es un *modelo* de T si y solo si todos los enunciados de T son verdaderos en $\mathfrak{S}$. En vez de *modelo* en esta acepción se puede decir REALIZACIÓN; pero la palabra 'modelo' está tan arraigada que no es fácil prescindir de ella.
b. En la práctica científica ordinaria, se llama *modelo* a una representación simplificada de una situación o proceso concreto que es objeto de estudio. Tales modelos consisten en otros objetos concretos —dibujos, maquetas, mecanismos— que reproducen esquemáticamente la idea que un científico se hace del objeto estudiado, o en estructuras matemáticas que reflejan esa idea con precisión en una forma IDEALIZADA. Mayo (1996) ha mostrado que en cualquier investigación experimental interviene una panoplia de modelos: (i) un *modelo primario* de la teoría física puesta a prueba; (ii) el *modelo del experimento*, el cual, por una parte, precisa los rasgos esenciales de éste y las preguntas que está llamado a contestar y especifica, por otra, las técnicas analíticas para vincular los datos con esas preguntas; (iii) los *modelos de datos* que articulan los datos crudos que aporta la observación, elaborándolos en la forma requerida para la aplicación de las técnicas analíticas del experimento.

Como los modelos matemáticos en el sentido b normalmente son realizaciones de teorías, esto es, modelos en el sentido a, el término se emplea muy a menudo en ambos sentidos a la vez.

modelo estándar de la física de partículas (A. *Standardmodell der Teilchenphysik*, F. *modèle standard de la physique de particules*, I. *standard model of particle physics*). Esquema teórico que resume nuestro conocimiento actual de las estructura última de la materia. Según él, las partículas elementales materiales son los leptones y los quarks, a su vez divididos en tres "generaciones" distintas. La primera "generación" contiene los quarks *u* y *d* (*up* y *down*) y los leptones electrón y neutrino electrónico. Todas las cosas que nos rodean están hechas de esas cuatro partículas. El resto (los quarks y leptones de la segunda y tercera generaciones) solo aparecen en situaciones extrañas, como los experimentos a altas energías que los físicos llevan a cabo en los colisionadores de partículas.

Las partículas elementales interaccionan mediante el intercambio de bosones *gauge*, partículas elementales que transmiten las fuerzas. Estas interacciones están descritas por dos teorías cuánticas de campos basadas en simetrías *gauge*: la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica. La electrodinámica cuántica, basada en la simetría *gauge* U(1), que describe la interacción electromagnética, ha quedado englobada en la teoría unificada electrodébil (debida a Glashow, Salam y Weinberg), basada en la simetría *gauge* $SU(2) \times U(1)$. Los bosones *gauge* que transmiten la fuerza electromagnética son los fotones; los que median la interacción nuclear débil son las partículas W^+, W^- y Z. La cromodinámica cuántica (debida a Gell-Mann y otros), basada en la simetría *gauge* SU(3), describe la interacción nuclear fuerte. Los bosones *gauge* que transmiten esa interacción son los ocho gluones. El modelo estándar, en su conjunto, se basa en la simetría *gauge* $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

La interacción gravitatoria es ignorada en el modelo estándar de la física de partículas, lo cual no tiene importancia, pues, a las cortas distancias de la escala subatómica, la fuerza gravitatoria es (en comparación con las otras fuerzas) completamente despreciable. Por ejemplo, la atracción electrostática entre un electrón y un protón en un átomo de hidrógeno es $2{,}27 \times 10^{39}$ veces más poderosa que la correspondiente atracción gravitatoria. De todos modos, la integración de la gravedad en la física de partículas mediante la construcción de una teoría cuántica de la gravedad es una de las aspiraciones de los físicos teóricos actuales, aunque su consecución desbordaría claramente el actual modelo estándar de la física de partículas.

módulo (A. *Modul*, F. *module*, I. *module*). Esta palabra se usa en matemáticas con distintas acepciones.

a. *Módulo sobre un anillo*. Estructura definida del mismo modo que un ESPACIO VECTORIAL, pero reemplazando el CUERPO de escalares por un ANILLO de escalares. Como todo cuerpo es un anillo, todo espacio vectorial es un módulo (ejemplos bajo CAMPO, B.2 y B.3).

b. *Módulo de un número complejo.* El *módulo* |z| del número complejo $z = a + bi$ es el número real

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

donde $z^* = a - bi$ es el conjugado complejo de z. Obviamente, $|z| = |z^*|$.
c. *Módulo de una congruencia.* Sean a, b, n enteros, con $n > 0$. Se dice que a es congruente con b *módulo* n —simbólicamente: $a \equiv b \pmod{n}$— si la división de a por n deja el mismo resto que la división de b por n. Así, por ejemplo, $28 \equiv 3 \pmod{5}$, $39 \equiv 0 \pmod{13}$, $68 \equiv 1 \pmod{67}$. (N.B. La palabra castellana 'módulo', en esta acepción, se traduce al alemán, francés e inglés con el latinismo *modulo*, ablativo singular del sustantivo *modulus*.)

modus ponens. Regla de inferencia que permite pasar de un condicional y su antecedente a su consecuente; se la simboliza así:

$$\frac{\begin{array}{l}(\alpha \Rightarrow \beta)\\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

Esta regla aparece ya explícitamente como el primero de los modos indemostrables de inferencia en Crisipo y otros estoicos. Los lógicos medievales le dieron el nombre mnemotécnico de *modus ponendo ponens*, luego abreviado por el de *modus ponens*, con el que ahora se la conoce. La regla del *modus ponens* está presente en todos los cálculos deductivos.

modus tollens. Regla de inferencia que permite pasar de un condicional y la negación de su consecuente a la negación de su antecedente; se la simboliza así:

$$\frac{\begin{array}{l}(\alpha \Rightarrow \beta)\\ \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

Esta regla aparece ya explícitamente como el segundo de los modos indemostrables de inferencia en Crisipo y otros estoicos. Los lógicos medievales le dieron el nombre mnemotécnico de *modus tollendo tollens*, luego abreviado por el de *modus tollens*, con el que ahora se la conoce.

mol (A. *Mol*, F. *mole*, I. *mole*). Según la definición adoptada en la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1967, 1 *mol* es "la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como hay átomos en 0,012 kilógramos de carbono-12" (esto es, 6,022 141 99(47) × 10^{23}). Para aplicar este concepto hay que especificar el tipo de entidades elementales de que se trata, las cuales pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos bien determinados de partículas (↗NÚMERO DE AVOGADRO). De esta definición se desprende que la *masa atómica* de un elemento, expresada en gramos, es precisamente la masa de un mol de ese elemento. Lo mismo puede decirse de la *masa molecular* de un compuesto molecular.

momento angular (A. *Drehimpuls*, F. *moment angulaire*, I. *angular momentum*). En la mecánica clásica, el *momento angular* L de una partícula en torno a un determinado punto *O* es el PRODUCTO VECTORIAL del vector r que va de *O* a la partícula y el momento cinético p de la misma:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

momento cinético (A. *Impuls*, F. *moment cinétique*, I. *momentum*, *linear momentum*). En la mecánica clásica, el *momento cinético* p de una partícula de masa *m* que se mueve con la velocidad v se define así:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Es claro, entonces, que la FUERZA (newtoniana) F ejercida sobre la partícula en un instante dado es igual a la derivada del momento cinético con respecto al tiempo (en ese instante):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}}$$

donde hemos escrito $\dot{\mathbf{v}}$ y $\dot{\mathbf{p}}$ (a la manera de Newton) en vez de $d\mathbf{v}/dt$ y $d\mathbf{p}/dt$ (a la manera de Leibniz).

En castellano suele decirse *impulso* en vez de *momento cinético*. Otros dicen *momento lineal*.

monopolo magnético (A. *Magnetischer Monopol*, F. *monopole magnétique*, I. *magnetic monopole*). Partícula hipotética con un solo polo magnético, que constituiría una fuente puntual del campo magnético, es decir, una "carga magnética". Los imanes conocidos son todos dipolos magnéticos (con un polo "norte" y otro "sur"). Si los partimos en trozos, cada trozo sigue siendo un dipolo. Nunca se ha encontrado un monopolo en la realidad. Los hipotéticos monopolos están excluidos por las ecuaciones de Maxwell y son por tanto incompatibles con la teoría electromagnética clásica; tampoco aparecen en la

electrodinámica cuántica, aunque Dirac encontró la manera de acomodarlos. Sin embargo, son requeridos por las teorías de gran unificación (de las interacciones nuclear fuerte y electrodébil), como mostraron t'Hooft y Polyakov. Cuando la simetría del grupo *gauge* simplemente conectado de las teorías de gran unificación, como SU(4) × SU(4) o SU(5), se rompe espontáneamente para dar lugar a la del grupo *gauge* SU(3) × SU(2) × U(1) del modelo estándar de la física de partículas, se producen monopolos magnéticos, que son las configuraciones clásicas topológicamente no triviales y tridimensionales del campo que induce la ruptura de simetría.

Las teorías de gran unificación implican que a una temperatura de unos 10^{29} K, que corresponde a una energía térmica media por partícula de unos 10^{15} GeV, tiene lugar una ruptura espontánea de la simetría de gran unificación. Según el modelo del *Big Bang* esa temperatura fue alcanzada por el Universo unos 10^{-36} s después de la singularidad. En esa época tan temprana, el horizonte (la distancia máxima que la luz podría haber viajado desde la singularidad) era minúsculo y el Universo estaba dividido en múltiples dominios de horizonte en los que la transición desde la simetría de gran unificación hasta el estado de simetría rota se habría producido de modo diferente y desconectado en cada dominio, lo que habría provocado defectos topológicos en los bordes entre los dominios. Los defectos topológicos unidimensionales serían las cuerdas cósmicas (que no tienen nada que ver con las cuerdas de la teoría de supercuerdas); los bidimensionales serían las paredes de dominio; los tridimensionales, comparables a puntos, serían los monopolos magnéticos. Los monopolos magnéticos tendrían una masa de unos 10^{15} GeV y habría mil monopolos por cada nucleón (protón o neutrón). Por tanto, en el Universo actual los monopolos tendrían una masa 10^{18} veces mayor que la de todos los átomos juntos. Todo estaría lleno de monopolos supermasivos, que hace tiempo habrían provocado ya el colapso gravitatorio del Universo y su implosión en un *Big Crunch*. Pero nada de eso ha ocurrido. Tampoco se han detectado las desintegraciones de protones predichas por las teorías de gran unificación. Todo ello parece razón suficiente para rechazar tales teorías. De todos modos, si uno se aferra a ellas, los monopolos son un problema. ¿Cómo es que no se encuentran, cuando hay tantos y son tan masivos? ¿Cómo es que el Universo se expande en vez de contraerse? Solucionar este "problema de los monopolos" fue una de las motivaciones esenciales en el desarrollo inicial de los modelos inflacionarios en cosmología. La INFLACIÓN soluciona el problema construyendo todo el Universo observable a partir de un único dominio de horizonte y expulsando los presuntos monopolos más allá de nuestro horizonte actual.

movimiento armónico simple (A. *einfache harmonische Schwingungen*, F. *mouvement harmonique simple*, I. *simple harmonic motion*). Sea P una par-

tícula que se mueve periódicamente a lo largo del eje de las x, de un lado a otro del punto $x = 0$. Sea $x(t)$ la coordenada de P en el momento t. Decimos que P se mueve con *movimiento armónico simple* si

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{1}$$

donde las constantes A, ω y δ son números reales (parámetros característicos del movimiento). Es claro que el movimiento se repite idéntico tras un lapso de tiempo o *período* $T = 2\pi/\omega$. Como T se mide en segundos, ω se mide en radianes por segundo y se llama por eso *frecuencia angular*. El movimiento ejecutado en cada periodo constituye un *ciclo*. El número de ciclos que P completa en un segundo es la *frecuencia* ν, dada por

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2}$$

La frecuencia se mide en HERTZ. En términos de la frecuencia, la ecuación (1) puede escribirse así:

$$x(t) = A\cos(2\pi\nu t + \delta) \tag{3}$$

La constante A se llama la *amplitud* del movimiento y es fácil comprobar que este cambia de dirección cuando la partícula alcanza los puntos $x = A$ y $x = -A$. El número $2\pi\nu t + \delta$ (el argumento del coseno) es la *fase* del movimiento; el parámetro δ es la *constante de fase*. δ determina el momento en que P alcanza el punto $x = A$. En efecto, según la ecuación (1), $x(t) = A$ cuando $\cos(\omega t + \delta) = 1$, esto es, en el momento $t_A = -(\delta/\omega)$. Nótese que al sustituir una constante de fase por otra, sin cambiar la amplitud ni la frecuencia, no se altera en nada la índole ni el orden de sucesión de los eventos constitutivos de cada ciclo, sino solo el momento en que ocurre cada uno.

La expresión *movimiento armónico simple* (u *oscilación armónica simple*) puede y suele emplearse también, como es natural, para referirse a cualquier fenómeno periódico caracterizable mediante una función del tiempo $x(t)$ que satisfaga la ecuación (1). Desde ya, comprobamos que la velocidad y la aceleración de nuestra partícula P también varían periódicamente con movimiento armónico simple. En efecto,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) = \omega A\cos(\omega t + \delta + \tfrac{1}{2}\pi)$$

y (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = \omega^2 A\cos(\omega t + \delta + \pi)$$

La gran importancia del movimiento armónico simple estriba en el descubrimiento, debido a Joseph Fourier, de que cualquier función periódica $\psi(t)$ apta para representar un fenómeno natural repetitivo puede expresarse como una serie de funciones periódicas de la forma (1), con amplitudes y constantes de fase diferentes y frecuencias angulares que son múltiplos sucesivos de una misma frecuencia angular fundamental:

$$\psi(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \delta_n) \qquad (5)$$

mundo exterior (A. *äussere Welt*, F. *monde extérieur*, I. *external world*). Esta expresión, aunque común en la literatura filosófica, no deja de ser desconcertante. Si P es una persona, la epidermis de P y las mucosas que la prolongan en la boca y otros puntos dividen el mundo en dos regiones, que podemos llamar *el mundo exterior* y *el mundo interior*, aunque el tráfico entre ambas es tan continuo e intenso que prácticamente no se justifica distinguirlas de este modo. Pero el *mundo exterior* del filósofo incluye también el interior de su cuerpo y coincide, a fin de cuentas, con lo que las personas sin instrucción filosófica llaman sencillamente *el mundo*. La existencia del *mundo exterior* y, sobre todo, la aparente insuficiencia de todos los intentos por demostrarla fueron cuestiones muy debatidas en el siglo XIX y todavía hoy se las menciona con respeto. Pero no es fácil interesarse por este problema —y siquiera entenderlo— si uno no profesa el DUALISMO de Descartes.

mundos posibles (A. *mögliche Welten*, F. *mondes possibles*, I. *possible worlds*). Término de la metafísica de Leibniz, quien distinguía entre el único mundo real, que existe por un acto de la voluntad de Dios, y los infinitos *mundos posibles* que el intelecto divino es capaz de concebir. Cada *mundo posible* es un conjunto de sustancias cuya coexistencia no sería contradictoria y que, por lo mismo, son compatibles entre ellas. Dios contempla estos mundos, compara las bondades de cada uno y elige el mejor de todos para crearlo. *Cum Deus calculat, fit mundus...*

La noción de *mundos posibles* reaparece, purgada de sus connotaciones específicamente leibnizianas, en los escritos lógicos de Ramsey (1931) y Carnap (1947), de donde pasa a la SEMÁNTICA propuesta por Kripke (1959) para la LÓGICA MODAL y la literatura metafísica inspirada en ella. En cuanto se trata de LÓGICA PROPOSICIONAL modal, un *mundo posible* no es más que un conjunto de proposiciones en que cada variable proposicional figura una sola vez, sola o precedida por un signo de negación, y no figuran otros conectivos. Tratándose de LÓGICA modal DE PRIMER ORDEN o de orden superior, un *mundo posible* es un universo del discurso en el sentido de la semántica de Tarski,

esto es, un conjunto de objetos individuales que tienen ciertas propiedades y relaciones. En ambos casos, un enunciado es *necesario* si es verdadero en todos los mundos posibles; *posible*, si lo es en por lo menos uno de ellos. (En el caso de ciertos sistemas de lógica modal estas definiciones se subordinan además a una supuesta relación de "accesibilidad" entre mundos.) La interpretación metafísica identifica uno de estos mundos posibles de la lógica modal predicativa con el mundo en que actualmente vivimos. Los demás comprenderían, según algunos autores, los mismos individuos que éste, pero dotados de otras propiedades y relaciones. Otros autores consideran absurda la idea de una "identificación transmundana" de los individuos, y se contentan con que haya una semejanza —graduable— entre los mundos. Entre estos, David Lewis ha sostenido persistentemente que todos los mundos posibles existen por igual, y que el adjetivo 'actual' con que distinguimos al nuestro es un INDÉXICO (que designa precisamente al mundo en que vive el hablante). En cuarenta años de estudios filosóficos sobre los *mundos posibles* nadie ha diseñado un telescopio transmundano que permita escudriñar las semejanzas y diferencias que supuestamente existen entre ellos.

N

***n*-ada** (A. *n-Bein*, F. *repère*, I. *n-ad*, *frame*). Sea $\mathcal{V}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE *n*-dimensional. Una *n-ada* en un punto $p \in \mathcal{V}$ es una BASE *ordenada* del ESPACIO TANGENTE $T_p\mathcal{V}$. Las *n*-adas asociadas a todos los puntos de $\mathcal{V}$ pueden reunirse en un espacio fibrado por un procedimiento similar al utilizado para construir el FIBRADO TANGENTE. El fibrado de las *n*-adas sobre $\mathcal{V}$ es un FIBRADO PRINCIPAL cuyo grupo de estructura es el grupo lineal general $GL(n,\mathbb{R})$ si $\mathcal{V}$ es una variedad real, o $GL(n,\mathbb{C})$ si $\mathcal{V}$ es una variedad compleja (↗MATRIZ). Un campo de *n*-adas (F. *repère mobile*, I. *moving frame*) sobre $\mathcal{V}$ es una SECCIÓN del fibrado principal de las *n*-adas. La variedad $\mathcal{V}$ se dice *paralelizable* si existe un campo de *n*-adas sobre $\mathcal{V}$. El término refleja el hecho de que un campo de *n*-adas ofrece un criterio para comparar vectores tangentes a $\mathcal{V}$ en distintos puntos y determinar si tienen o no la misma dirección. No toda variedad diferenciable *n*-dimensional es paralelizable. Desde luego, no lo es ninguna variedad 2-dimensional homeomorfa a la esfera. Pero, obviamente, si U es el dominio de una CARTA x, U es siempre paralelizable, y la función que asigna a cada $p \in U$ el k-tuplo de vectores $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p$ es una sección del fibrado principal de las *n*-adas sobre U. Por otra parte, una variedad puede ser paralelizable aunque no sea el dominio de una carta, esto es, aunque no sea homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, para un entero n. Tal es el caso, por ejemplo, de las variedades 2-dimensionales homeomorfas al toro.

***n*-tuplo** (A. *n-tupel*, F. *n-tuple*, I. *ordered n-tuple*). Sea M un conjunto cualquiera. Sea a_k un elemento cualquiera de M (admitiéndose que un mismo elemento puede ser designado con más de un índice). Usando la definición conjuntista de PAR ORDENADO, un *n*-tuplo de elementos de M suele definirse recursivamente como sigue: (1) si $n = 2$, el 2-tuplo o *duplo* $\langle a_1,a_2\rangle$ es el par ordenado $\langle a_1,a_2\rangle = \{\{a_1\},\{a_1,a_2\}\}$; (2) si $n > 2$, el *n*-tuplo $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ es el par ordenado $\langle\langle a_1,\ldots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle$, cuyo primer término es el $(n-1)$-tuplo $\langle a_1,\ldots,a_{n-1}\rangle$ y cuyo segundo término es a_n. Con todo, parece

tanto más natural definir a un n-tuplo simplemente como una SECUENCIA de n objetos.

nabla. Operador diferencial del cálculo vectorial en tres dimensiones, representado con el símbolo ∇, parecido al arpa fenicia (νάβλα, en griego). Como todos los ESPACIOS VECTORIALES de tres dimensiones son isomorfos, basta definirlo para $\mathbb{R}^3$, el espacio vectorial real formado por los triplos $\langle x,y,z\rangle$ de números reales. Sea $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0,0,1\rangle$. Entonces, el operador *nabla* se define así:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Usando esta notación se expresan cómodamente las definiciones del *gradiente* (abreviado: grad) de un campo escalar $f(x,y,z)$ y de la *divergencia* (div) y la *rotación* (rot; en inglés: curl) de un campo vectorial $\mathbf{V}(x,y,z) = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$:

$$\text{grad } f = \nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}\right) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}\right) \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Este uso del signo ∇ no debe confundirse con su empleo como símbolo de la CONEXIÓN LINEAL sobre una VARIEDAD DIFERENCIABLE (aunque hay alguna analogía entre ambos usos).

navaja de Ockam (I. *Ockam's razor*). Llámase así al principio metódico atribuido a Ockam, según el cual *No hay que multiplicar los entes sin necesidad*

(*entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*). Los filósofos han solido invocar este principio para eliminar objetos o tipos de objetos que sus predecesores han juzgado oportuno admitir como existentes. Por ejemplo, los nominalistas niegan la realidad de los universales (clases, esencias), pues esta no cambiaría en nada las particularidades efectivas de las cosas y sucesos individuales existentes; los darwinistas niegan que la evolución de los organismos vivos tenga un propósito, pues los mecanismos de la selección natural bastan para explicarla; Einstein niega la existencia del éter, pues no ha menester esa hipótesis para dar cuenta de los fenómenos electromagnéticos.

necesario (A. *notwendig*, F. *nécessaire*, I. *necessary*). Si algo es necesario, seguro que ocurre. No es POSIBLE que lo necesario no ocurra. La necesidad es una modalidad que afecta a proposiciones y puede definirse en función de la posibilidad. Sea *P* una proposición. Es *necesario* que *P* si y solo si no es posible que no *P*, es decir, si es imposible que no *P*. En la LÓGICA MODAL la necesidad se representa mediante un operador □ que, aplicado a cualquier fórmula, produce una nueva fórmula. Así, □φ se lee: es necesario que φ. Lo que no es necesario es innecesario. Es innecesario que *P* si y solo si no es necesario que *P*. Es innecesario que *P* si y solo si es contingente que *P* o es imposible que *P*.

Todo el mundo está de acuerdo en aceptar una necesidad lógica o matemática. Es necesario que un grupo cualquiera tenga todas las propiedades implicadas por los axiomas de la teoría de grupos. Si no las tiene, no es un grupo. Algunos filósofos piensan que, además de esta necesidad trivial, hay otra necesidad más profunda, física o metafísica. La necesidad física se derivaría de unas presuntas leyes necesarias de la naturaleza. La necesidad metafísica, según la idea de Leibniz resucitada por Kripke, consistiría en la verdad en todos los mundos posibles. Otros filósofos, como Hume y Quine, han rechazado ese tipo de necesidad. La cuestión sigue siendo debatida y estamos lejos de un consenso.

negación (A. *Negation*, F. *négation*, I. *negation*). En el lenguaje ordinario mostramos nuestro desacuerdo con un enunciado *A* negándolo. En el lenguaje formal de la lógica la función de negar la desempeña el conector unario '¬', que, antepuesto a una fórmula α, forma una nueva fórmula ¬α, llamada la negación de α. El conector ¬ de negación representa la FUNCIÓN VERITATIVA unaria tal que ¬(0) = 1 y ¬(1) = 0, donde 1 es la verdad y 0 la falsedad. Por tanto, para cualquier fórmula α y cualquier interpretación $\mathfrak{I}$, α es verdadera en $\mathfrak{I}$ si y solo si ¬α es falsa en $\mathfrak{I}$, y a la inversa, α es falsa en $\mathfrak{I}$ si y solo si ¬α es verdadera en $\mathfrak{I}$. De la definición que hemos dado se sigue que la doble negación equivale a la afirmación, es decir, $\models(\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha)$. Esto vale

en la lógica clásica, pero no siempre vale para el lenguaje ordinario, donde a veces una doble negación (con 'no' y otra palabra negativa) sirve para dar énfasis a la negación: "no tengo ninguna prisa". Tampoco vale en la lógica intuicionista de Brouwer y Heyting, donde la 'negación' tiene un sentido distinto, que equipara lo negado con lo refutable o absurdo.

En el simbolismo habitual de las matemáticas la negación se expresa también informalmente mediante una barra que atraviesa el relator negado: $\neq$, $\notin$, $\not\subset$, etc.

neutrino (A. *Neutrino*, F. *neutrino*, I. *neutrino*). Partícula elemental de carga eléctrica 0, spin ½ y con masa en reposo minúscula o nula. Los neutrinos, como los electrones, son leptones, inasequibles a las interacciones fuertes. Los neutrinos fueron postulados teóricamente por Pauli en 1930 para asegurar la conservación de la energía en la desintegración beta, pero no fueron detectados experimentalmente hasta 1956, por Cowan y Reines. A diferencia de los electrones, los neutrinos son eléctricamente neutros (de ahí les viene el nombre de 'neutrino', diminutivo italiano de 'neutro', que les dio Enrico Fermi). Los leptones, como los quarks, se dividen en tres "generaciones" (a las que pertenecen el electrón, el muón y el tauón), cada una de las cuales incluye un tipo de neutrino: el neutrino electrónico, el neutrino muónico y el neutrino tauónico. Se pensaba que estos tipos eran estables, pero hay síntomas de que, en determinadas circunstancias, los neutrinos podrían oscilar entre tipos, es decir, transformarse de un tipo a otro.

El problema para estudiar los neutrinos consiste en que apenas interactúan con otras partículas, por lo que son difíciles de detectar. Se puede calcular el número de neutrinos que produce el Sol cada segundo, 10^{38}, así como los neutrinos solares que alcanzan la superficie terrestre: unos $6{,}5 \times 10^{14}$ por metro cuadrado cada segundo. El problema estriba en que los diversos experimentos de detección de neutrinos solares en la Tierra solo logran detectar entre un tercio y la mitad de los neutrinos calculados. Tal vez los neutrinos electrónicos se transformen por el camino en neutrinos muónicos. De todos modos, esta hipótesis implica que los neutrinos tienen alguna masa y su aceptación nos obligaría a revisar el actual MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS, cuyas simetrías requieren un neutrino de masa cero.

neutrón (A. *Neutron*, F. *neutron*, I. *neutron*). Partícula de carga eléctrica 0, de spin ½ y que siente la interacción nuclear fuerte, compuesta de un quark *up* y dos quarks *down*, n = (d,u,d). Por tanto, es un hadrón, fermión y barión. Al carecer de carga eléctrica, es eléctricamente neutral; de ahí su nombre. Su masa es de $1{,}674\,927\,16(13) \times 10^{-27}$ kg, esto es, 939,565 330(38) MeV, una pizca mayor que la del PROTÓN. El neutrón es uno de los constituyentes (jun-

to al protón) de los núcleos atómicos. También constituye las estrellas de neutrones. El núcleo de un átomo de un elemento químico dado siempre tiene el mismo número de protones, pero puede tener diverso número de neutrones, según el isótopo de que se trate. Debido al PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI, los neutrones solo pueden permanecer estables en el interior de un núcleo atómico o de una estrella de neutrones. Aislado, un neutrón es inestable y se desintegra rápidamente por DESINTEGRACIÓN BETA: su vida media es de 636 segundos.

newton. Unidad internacional de FUERZA. 1 *newton* (1 N) es la fuerza capaz de imprimir a una MASA de 1 kilogramo una ACELERACIÓN de 1 metro por segundo por segundo (1 N = 1 kg·m/s²).

nombre propio (A. *Eigenname*, F. *nom propre*, I. *proper name*). Según J. S. Mill un *nombre propio* es una palabra que denota y no connota, con la cual se designa un objeto singular sin asociarle ningún atributo general. Según esto, en rigor, solo puede haber nombres propios de objetos elementales y fugaces (vgr. de una sensación simple, vivida ahora), pues toda referencia a un objeto complejo y durable supone criterios generales para identificarlo. Cuando, señalando al recién llegado, digo a mis amigos "Les presento a Fulano", se sobreentiende que me refiero a una persona, la misma que hace un momento cruzó la puerta, y no al color de su vestido, ni a la silueta que su cuerpo recorta en mi campo visual, ni al espacio topológico bidimensional múltiplemente conectado que en este preciso instante separa a Fulano del resto del mundo. Frege sostuvo, por eso, que las palabras ordinariamente llamadas *nombres propios* tienen, además de denotación, una connotación o sentido, un "modo de presentar" aquello que designan. Por otra parte, un nombre propio puede usarse con éxito para hacer referencia a un objeto sin conocer las condiciones necesarias y suficientes que identifican a este. De ahí que los nombres propios no se empleen normalmente para informar sobre las propiedades del objeto que designan. Como advirtió Searle (1958), la gran utilidad de los nombres propios reside justamente en que, con ellos, podemos "referirnos públicamente a objetos sin vernos forzados a suscitar debates y llegar a un acuerdo sobre los caracteres descriptivos que constituyen exactamente la identidad de estos". Ello no obstante, según Searle, para que un nombre propio pueda usarse para denotar algo o a alguien, tiene que estar asociado de un modo laxo a un puñado de atributos de aquello que denota.

Esta tesis de Searle es rechazada por los partidarios de la llamada *teoría causal de los nombres propios*, propuesta por Kripke (1972) y Putnam (1975). Según esta, el hablante *H* denota efectivamente un objeto singular *O* con el nombre *N* si el nombre *N* fue impuesto a *O* en un acto o proceso de nomi-

nación apropiado, y el uso de N por H está ligado a ese acto o proceso por una serie de eslabones, cada uno de los cuales preserva la referencia. (Por ejemplo: los padres de un recién nacido acuerdan llamarlo 'Eurípides' y este nombre luego se trasmite, oralmente o por escrito, de generación en generación.) Según Kripke, esta tesis garantiza que los nombres propios funcionen como "designadores rígidos", que denotan al objeto nombrado tanto en las situaciones reales en que de hecho está inserto como en situaciones contrafácticas en que es posible imaginarlo. Es claro, con todo, que la institución y la trasmisión de un nombre propio suponen una tipificación del objeto a que este se aplica (por ejemplo: esta *persona*, no el *punto* en que la toco con mi dedo índice). Este detalle esencial, que Kripke calla, está registrado en la exigencia de Putnam de que todo nombre tenga un "marcador semántico" (vgr. *animal*, *época histórica*). Menos formalmente, figura también en la doctrina de Evans (1982), según la cual el uso de un nombre propio normalmente forma parte de una práctica social en que esa palabra se emplea con tales o cuales propiedades semánticas (por ejemplo, 'Jesús' y 'Roberto' se usan en castellano casi exclusivamente como nombres de personas, muy rara vez de animales domésticos, nunca de vértices de triángulos).

norma (A. *Norm*, F. *norme*, I. *norm*). Sea $\mathcal{V}$ un ESPACIO VECTORIAL real o complejo. Una *norma* sobre $\mathcal{V}$ es una función $\rho: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ con las propiedades siguientes: para todo escalar a y cualesquiera vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$,

N1 $\rho(\mathbf{u}) = 0$ si y solo si $\mathbf{u}$ es el vector cero ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$).
N2 $\rho(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq \rho(\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{v})$.
N3 $\rho(a\mathbf{u}) = |a|\rho(\mathbf{u})$.

El espacio vectorial $\mathcal{V}$ provisto de la norma ρ se dice *normalizado*. En vez de $\rho(\mathbf{u})$, escribimos $\|\mathbf{u}\|$. La norma ρ determina en $\mathcal{V}$ la topología generada por la base que forman todos los conjuntos $\{\mathbf{u}: \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ y } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < r\}$, para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y cada $r \in \mathbb{R}$.

La función $\delta : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definida por $\delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ es una MÉTRICA en el sentido corriente. (Escribimos $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ por $\mathbf{u} + -1(\mathbf{v})$, esto es, la suma del vector $\mathbf{u}$ con el producto del vector $\mathbf{v}$ por el escalar -1.)

notación polaca (A. *polnische Schreibweise*, F. *notation polonaise*, I. *Polish notation*). Manera de escribir las fórmulas del lenguaje formal de la lógica o del álgebra sin usar paréntesis, basada en la convención de escribir siempre los functores (incluidos los conectores, considerados como functores veritativos o proposicionales) delante de sus respectivos argumentos. Así, en vez de escribir '$a \times (b+c)$', escribiríamos '$\times a + bc$'; en vez de escribir '$\neg(\varphi \Rightarrow \psi)$', es-

cribiríamos '$\neg\Rightarrow\varphi\psi$'. El nombre de polaca le viene a esta notación de su inventor, el lógico polaco Łukasiewicz, que la introdujo hacia 1920. Łukasiewicz usaba letras latinas mayúsculas para los conectores (N, K, A, C y E para los signos de negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional, respectivamente) y, siguiendo a Peirce, letras griegas mayúsculas para los cuantificadores (Σ para el cuantificador existencial y Π para el universal). He aquí tres ejemplos de fórmulas escritas (1) en la notación habitual, (2) en la notación sin paréntesis con signos habituales y (3) en la notación polaca con signos de Łukasiewicz:

(1)	$\neg(\varphi\Rightarrow\psi)$	$(\neg(\varphi\Rightarrow\psi) \Leftrightarrow (\varphi\vee\neg\psi))$	$(((\psi\Rightarrow\forall x\varphi) \Rightarrow \exists x\neg\varphi) \Rightarrow (\psi\Rightarrow\exists x\neg\varphi))$
(2)	$\neg\Rightarrow\varphi\psi$	$\Leftrightarrow\neg\Rightarrow\varphi\psi\vee\varphi\neg\psi$	$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\psi\forall x\varphi\exists x\neg\varphi\Rightarrow\psi\exists x\neg\varphi$
(3)	$NC\varphi\psi$	$ENC\varphi\psi A\varphi N\psi$	$CCC\psi\Pi x\varphi\Sigma xN\varphi C\psi\Sigma x\neg\varphi$

Aunque la notación polaca no ha logrado imponerse en la escritura de la lógica y la matemática, debido a la fuerza del hábito, tiene la gran ventaja de que permite prescindir de paréntesis y ahorrarse las complicaciones que generan, por lo que ha encontrado aplicaciones en la informática y los lenguajes de programación.

nucleótido (A. *Nukleotid*, F. *nucléotide*, I. *nucleotide*). Los nucleótidos son los componentes estructurales o monómeros del tipo especial de POLÍMEROS que son los ÁCIDOS NUCLEICOS. Cada nucleótido consta de un azúcar (ribosa en el RNA, desoxirribosa en el DNA) y un fosfato, siempre iguales, y de una base nitrogenada distinta, peculiar de ese nucleótido. Sólo hay cuatro tipos de nucleótidos en el DNA: adenina, timina, guanina y citosina. Cada uno de ellos se caracteriza por su distinta base nitrogenada adherida a su elemento repetitivo. Muchas otras bases diferentes podrían haber sido usadas para formar nucleótidos, pero la vida en la Tierra sólo ha elegido esas cuatro, que constituyen como las letras en que se codifica la información genética. Ese código de cuatro letras fue fijado por nuestro último ancestro común y subsiguientemente ha sido heredado por todos los seres vivos de la Tierra.

En el RNA se usa también un alfabeto de cuatro nucleótidos: adenina, uracilo, guanina y citosina.

nuevo experimentalismo (I. *new experimentalism*). Se llama así, en inglés, a una corriente de pensamiento que ve a las ciencias no ya como acervos de proposiciones verdaderas o sucesiones de teorías, sino como un quehacer social en que la experimentación es por lo menos tan importante como la formulación de teorías y seguramente más decisiva que esta. Cabe destacar las obras de Hacking (1983), Cartwright (1983, 1989), Franklin (1986, 1990), Ga-

lison (1987, 1997), Giere (1988, 1999) y Mayo (1996). Desde esta perspectiva, Galison ha podido superar la dificultad suscitada según Kuhn (1962) por la supuesta INCONMENSURABILIDAD de las teorías científicas. Distingue tres procesos en cierta medida autónomos en la historia de las ciencias: la sucesión de las teorías, la evolución de los instrumentos científicos y el diseño y ejecución de nuevos experimentos. En cada uno de ellos, la innovación genera discontinuidades, pero como los tres no marchan al unísono, no hay ruptura en el desarrollo global. La comunicación efectiva entre los procesos y las sucesivas etapas de cada uno puede efectuarse gracias a los "papiamentos" que se hablan en la "zona de intercambio" (I. *trading zone*) entre las varias subculturas que concurren al quehacer científico.

numerable (A. *höchstens abzählbar*, F. *dénombrable*, I. *countable*). Un conjunto es numerable si y solo si es finito o contiene tantos elementos como hay números naturales. Todos los conjuntos finitos son numerables. De los infinitos, solo son numerables los más pequeños, es decir, los que tienen la mínima cardinalidad transfinita, $\aleph_0$, que es la cardinalidad de $\mathbb{N}$, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Referidas a un conjunto A, las siguientes expresiones son equivalentes entre sí: (1) A es infinito numerable. (2) A es biyectable con $\mathbb{N}$, es decir, hay una biyección o correspondencia biunívoca entre A y $\mathbb{N}$. (3) $|A| = |\mathbb{N}|$. (4) $|A| = \aleph_0$. Un conjunto que no es numerable se llama innumerable. No hay que confundir la noción de lo numerable con la de lo ENUMERABLE; la primera se refiere a la cardinalidad del conjunto; la segunda, a la computabilidad de la función que lo genera. Todo conjunto enumerable es numerable, pero no a la inversa. Cualquier conjunto de fórmulas sobre un alfabeto numerable es numerable, pero no siempre es enumerable. Por ejemplo, el conjunto de las sentencias aritméticas verdaderas es numerable, pero no enumerable; también el conjunto de las fórmulas de primer orden válidas en todo universo finito es numerable, pero no enumerable. Cantor probó que si un conjunto A es numerable, su conjunto potencia $\wp A$ es innumerable, pues $|\wp A| > |A|$. Tanto $\mathbb{N}$ como el conjunto de los números enteros y el de los racionales son numerables. Sin embargo, el conjunto de los números reales y el de los complejos son innumerables.

numeral (A. *Zahlwort*, F. *numéral*, I. *numeral*). Un símbolo o expresión que representa un número. Diversos numerales pueden representar el mismo número. Por ejemplo, el mismo número se representa por el numeral 'siete' en español, por *five* en inglés, por el numeral arábigo 7 en el sistema habitual de numeración de base diez, por el numeral 111 en el sistema binario y por el numeral VII en la numeración romana. Frege insistió en la diferencia entre número y numeral, que otros autores confundían.

número atómico (A. *Atomnummer*, F. *numéro atomique*, *nombre de charge*, I. *atomic number*). Número de protones en el núcleo atómico de un elemento químico.

número bariónico (A. *Baryonenzahl*, F. *nombre baryonique*, I. *baryon number*). Cada barión tiene número bariónico 1; cada antibarión tiene número bariónico −1; las demás partículas tienen número bariónico 0. El número bariónico de un sistema de partículas es el que resulta de sumar los números bariónicos de todas sus partículas. El número bariónico se conserva en todas las reacciones observadas entre partículas.

número complejo (A. *komplexe Zahl*, F. *nombre complexe*, I. *complex number*). Sea $\mathbb{R}$ el CUERPO de los NÚMEROS REALES. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos puede definirse como sigue. Un elemento de $\mathbb{C}$ —un *número complejo*— es un par ordenado de números reales. Es decir, $\langle a,b\rangle \in \mathbb{C}$ si y solo si a, $b \in \mathbb{R}$. La adición y la multiplicación de complejos se definen así:

$A_{\mathbb{C}}$ $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle a+c,b+d\rangle$
$M_{\mathbb{C}}$ $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle = \langle ac-bd,ad+bc\rangle$

donde los signos + y − dentro de los paréntesis angulares designan, respectivamente, la adición y la sustracción en $\mathbb{R}$, mientras que la multiplicación en $\mathbb{R}$ está representada simplemente por la yuxtaposición de los factores. Es fácil comprobar que, con estas operaciones, $\mathbb{C}$ es un cuerpo y que $\langle 0,0\rangle$ es el elemento neutro de la suma y $\langle 1,0\rangle$ es el elemento neutro de la multiplicación.

El número complejo $\langle 0,1\rangle$ se designa con la letra i. Si $z = \langle a,b\rangle \in \mathbb{C}$, es claro que $z = \langle a,0\rangle + (\langle b,0\rangle \times \langle 0,1\rangle)$. En la práctica, esto se escribe así: $z = a + bi$. De este modo, el complejo z se presenta como la suma de un número real a y el producto de un número real b por i. Usando esta notación, tenemos que $i^2 = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle = \langle -1,0\rangle = -1$. Como la ecuación $x^2 = -1$ no admite una solución entre los números llamados "reales", se adoptó la costumbre de asignarle la solución "imaginaria" i. Siguiendo esta costumbre, todavía se dice que a es la "parte real" y b la "parte imaginaria" del número complejo z. Si $z = \langle a,b\rangle = a + bi$, el *complejo conjugado* de z es el número $a - bi = \langle a,-b\rangle$; se lo denota con z^*. Obsérvese que, en virtud de la regla $M_{\mathbb{C}}$, $z \times z^* = \langle a^2 + b^2,0\rangle$. La magnitud o *módulo* $|z|$ del número complejo $z = a + bi$ está dada por

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Obviamente, $|z| = |z^*|$. Si ponemos $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y φ = arc tan b/a, es claro que

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \text{ sen } \varphi)$$

Entonces, el módulo $|z| = r$. La cantidad φ se llama el *argumento* de z (φ = arg z).

número de Avogadro (A. *Loschmidt-Zahl*, F. *nombre d'Avogadro*, I. *Avogadro's number*). Número de átomos contenido en 0,012 kg de carbono-12 (el isótopo más corriente del carbono). Este número es igual a $6{,}02214199(47) \times 10^{23}$ y coincide, por definición, con el número de moléculas en un MOL de gas. Conforme a la *hipótesis* —hoy ley— *de Avogadro*, un mol de gas a presión y temperatura dadas ocupa siempre un volumen dado, cualquiera que sea su naturaleza química. En particular, a la presión "normal" de una atmósfera y la temperatura "normal" de 0°C un mol de gas ocupa 0,022 413 996(39) m^3.

número de onda (A. *Wellenzahl*, F. *nombre d'onde*, I. *wave number*). Sea λ la LONGITUD DE ONDA de un movimiento ondulatorio. Entonces, su *número de onda* $k = 2\pi\lambda^{-1}$. Algunos autores llaman a k el *número de onda angular*, y reservan el término *número de onda* para $\sigma = \lambda^{-1}$, esto es, el valor recíproco de la longitud de onda.

número entero (A. *ganze Zahl*, F. *nombre entier*, I. *integer*). El uso de números negativos como intermediarios en cómputos numéricos está documentado en textos babilonios y chinos anteriores a nuestra era, y ya el indio Brahmagupta (s. VI a.C.) dio reglas explícitas para operar con ellos. Por otra parte, solo hacia fines de la Edad Media europea se llegó a admitirlos como *soluciones* de problemas aritméticos (Chuquet, 1484), y todavía Descartes los llamaba "números falsos".

Informalmente, llamamos *números enteros* a la unión del conjunto de los NÚMEROS NATURALES $\{0,1,2,\ldots\}$ con el de los negativos $\{-1,-2,-3,\ldots\}$. Más formalmente, se le da a esta idea un sentido preciso del modo que se explica a continuación.

Sea $\mathbb{N}$ el sistema de los números naturales $\{0,1,2,\ldots\}$, provisto de las operaciones de adición (+) y multiplicación (×). Definiremos la adición ($\oplus$) y multiplicación ($\otimes$) en el sistema $\mathbb{N}^2$ formado por todos los PARES ORDENADOS de números naturales. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Entonces, por definición,

$$\langle a,b\rangle \oplus \langle c,d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle$$

y

$$\langle a,b\rangle \otimes \langle c,d\rangle = \langle (a \times c) + (b \times d), (a \times d) + (b \times c)\rangle$$

Diremos que el par $\langle a,b\rangle$ equivale al par $\langle c,d\rangle$ (simbólicamente: $\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle$), si y solo si $a + d = b + c$. Es fácil ver que la relación $\sim$ es en efecto un EQUIVALENCIA, o sea, una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Como tal, determina una PARTICIÓN de $\mathbb{N}^2$ en clases mutuamente exclusivas. Si $u \in \mathbb{N}^2$, denotamos con $[u]$ la clase $\{w : w \sim u\}$ de todos los w equivalentes a u; pero, en aras de la simplicidad, escribimos $[a,b]$ por $[\langle a,b\rangle]$; esto es,

$$[a,b] = \{\langle x,y\rangle : \langle x,y\rangle \sim \langle a,b\rangle\}$$

Llamamos $\mathbb{N}^2/\sim$ al conjunto $\{[x,y] : \langle x,y\rangle \in \mathbb{N}^2\}$ de todas las clases de equivalencia determinadas por la relación $\sim$. Un *número entero* es un elemento de este conjunto.

La función $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2/\sim$, $\langle x,y\rangle \mapsto [x,y]$ preserva la adición ($\oplus$), en el sentido siguiente: si $\langle a,b\rangle \sim \langle a',b'\rangle$ y $\langle c,d\rangle \sim \langle c',d'\rangle$, esto es, si $a + b' = b + a'$ y $c + d' = d + c'$, entonces $a + c + b' + d' = b + d + a' + c'$, vale decir, $\langle a + c, b + d\rangle \sim \langle a' + c', b' + d'\rangle$. Por lo tanto, la definición siguiente de adición (+) en $\mathbb{N}^2/\sim$ es inequívoca:

$$[a,b] + [c,d] = [\langle a,b\rangle \oplus \langle c,d\rangle]$$

En el mismo sentido, puede demostrarse que f preserva la multiplicación ($\otimes$). Es posible, entonces, definir inequívocamente la multiplicación (x) en $\mathbb{N}^2/\sim$ así:

$$[a,b] \times [c,d] = [\langle a,b\rangle \otimes \langle c,d\rangle]$$

Es fácil ver que la ESTRUCTURA $\langle \mathbb{N}^2/\sim,+,\times\rangle$ es un ANILLO conmutativo, en el cual el elemento neutro de la adición es $[0,0]$, en tanto que $[1,0]$ es el elemento neutro de la multiplicación. Esta estructura se llama el *anillo de los enteros*, y se designa con $\mathbb{Z}$. Si a es un número natural distinto de 0, el entero α se dice *positivo* si $\alpha = [a,0]$ y *negativo* si $\alpha = [0,a]$. En la vida real, se escribe $-a$ por $[0,a]$; por $[a,0]$ se escribe simplemente a. Normalmente se entiende que la inyección canónica $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto [n,0]$ identifica cada $n \in \mathbb{N}$ con el valor respectivo $\iota(n) \in \mathbb{Z}$. La adición y la multiplicación de números enteros y de números naturales se simbolizan con los mismos signos + y $\times$, respectivamente.

El anillo $\mathbb{Z}$ puede caracterizarse también por sí mismo, independientemente de $\mathbb{N}$. Sea $\langle Z,<\rangle$ un ORDEN LINEAL con las siguientes propiedades (las variables u, w, x, y, z toman valores en Z).

Z1 Z no tiene un último elemento: $\neg\exists x\forall y(y < x \vee y = x)$.

Z2 Para cada $z \in Z$, el conjunto $\{x : z < x\}$ es un BUEN ORDEN.

Z3 Cada elemento de **Z** tiene un y solo un predecesor inmediato:

$$\forall x\exists y(y < x \wedge \neg\exists z(y < z < x) \wedge \forall u((u < x \wedge \neg\exists w(u < w < x)) \Rightarrow u = y))$$

Distinguimos en **Z** un elemento cualquiera que llamaremos 0_Z. En virtud de la condición Z2, el conjunto $\{x : 0_Z < x\}$ tiene un primer elemento, que llamaremos 1_Z.

Definimos una función injectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ como sigue: $f(0) = 0_Z$; si $n' \in \mathbb{N}$ es el sucesor del número natural n, $f(n')$ es el primer elemento del conjunto $\{x : f(n) < x\}$. Es claro que $f(\mathbb{N}) = \{0_Z\} \cup \{x : 0 < x\}$ y que $1_Z = f(1)$. Escribamos n_Z por $f(n)$. A cada $n_Z \in f[\mathbb{N}]$ le asignamos un *inverso* $-n_Z$ según la estipulación siguiente: $-0_Z = 0_Z$; si $m_Z \in f[\mathbb{N}]$ y n_Z es el primer elemento del conjunto $\{x : m_Z < x\}$, $-n_Z$ es el predecesor inmediato de $-m_Z$. Con estos ingredientes es fácil construir (i) una función asociativa y conmutativa $+ : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$, $\langle x,y \rangle \mapsto x + y$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m_Z + n_Z = (m + n)_Z$ y $-n_Z + n_Z = 0_Z$; y (ii) una función asociativa y conmutativa $\mathbf{x} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$, $\langle x,y \rangle \mapsto x \mathbf{x} y$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m_Z \mathbf{x}\, n_Z = (m \times n)_Z = -m_Z \mathbf{x} -n_Z$, y $-m_Z \mathbf{x}\, n_Z = -(m \times n)_Z$. Puede demostrarse entonces que $\langle \mathbf{Z},+,0_Z,\mathbf{x} \rangle$ es un anillo, que llamamos $\mathbb{Z}$ por ser isomorfo al anillo $\langle \mathbb{N}^2/\sim,+,\mathbf{x} \rangle$ definido arriba. En la vida real escribimos n y $-n$ en vez de n_Z y $-n_Z$, + en vez de + y × en vez de **x**.

número leptónico (A. *leptonische Zahl*, F. *nombre leptonique*, I. *lepton number*). Cada leptón tiene número leptónico 1; cada antileptón tiene número leptónico −1; las demás partículas tienen número leptónico 0. El número leptónico de un sistema de partículas es el que resulta de sumar los números leptónicos de todas sus partículas. El número leptónico se conserva en todas las reacciones observadas entre partículas.

número natural (A. *natürliche Zahl*, F. *nombre naturel*, I. *natural number*). Los matemáticos llaman 'naturales' a los números que utilizamos para contar: uno, dos, tres... Para este propósito sirve cualquier colección N de objetos que cumpla con las condiciones siguientes: (i) hay una FUNCIÓN inyectiva $\sigma : N \rightarrow N$ cuyo recorrido comprende todo el conjunto N con excepción de un solo objeto, que llamaremos 1 (*uno*); (ii) cada $x \in N$, diferente de 1, satisface la ecuación $x = f(1)$ para alguna función f compuesta por iteración de σ (donde $f : N \rightarrow N$ es una *función compuesta por iteración de* σ si $f = \sigma$ o si hay una función σ^* compuesta por iteración de σ y $f = \sigma \circ \sigma^*$). Bajo estas condiciones, es claro que todos los elementos de N comparten con 1 cada propiedad poseída por éste que sea preservada por la función σ; esto es, cada propiedad tal que (i) 1 la posee y (ii) si x la posee, también la posee

$\sigma(x)$. Si $x \in N$, decimos que $\sigma(x)$ es el *sucesor* de x. Dada una colección N que cumpla las condiciones (i) y (ii), es natural llamar 2 (*dos*) al sucesor de 1, 3 (*tres*) al sucesor de 2, etc.

Esta caracterización de los números naturales, descubierta por Richard Dedekind (1888), fue redescubierta independientemente por Giuseppe Peano (1889), quien la expresó en su recién inventado lenguaje simbólico mediante cinco axiomas en los que usa sólo dos términos primitivos, a saber, *uno* (1) y *sucesor* (que aquí representaremos con σ). La versión original de los *axiomas de Peano* puede parafrasearse así, empleando el simbolismo lógico actual:

P1 $1 \in N$.
P2 $\forall x(x \in N \Rightarrow \exists y(y = \sigma x))$.
P3 $\neg\exists x(x \in N \wedge 1 = \sigma x)$.
P4 $\forall x \forall y(x \in N \wedge y \in N \wedge \sigma x = \sigma y \Rightarrow x = y)$.
P5 $\forall \mathrm{P} \forall x(x \in N \Rightarrow ((\mathrm{P}1 \wedge (\mathrm{P}x \Rightarrow \mathrm{P}\sigma x)) \Rightarrow \mathrm{P}x))$.

Basándonos en estos axiomas podemos dar una DEFINICIÓN INDUCTIVA de las operaciones aritméticas de *adición* y *multiplicación*. (Las variables u, v representan elementos arbitrarios de N.)

A1 $u + 1 = \sigma u$.
A2 $u + \sigma v = \sigma(u + v)$.

M1 $u \times 1 = u$.
M2 $u \times \sigma v = (u \times v) + u$.

En la tradición conjuntista se acostumbra a identificar los números naturales con el conjunto ω de los ordinales finitos, determinado por las condiciones siguientes: (i) Todo ordinal finito α tiene un sucesor único y exclusivo $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$; (ii) $\varnothing \in \omega$; (iii) $\varnothing$ no es el sucesor de ningún ordinal finito. Con esta identificación, el elemento distinguido que Dedekind y Peano llamaron 1 (*uno*) pasa a ser el conjunto vacío $\varnothing$, y parece natural llamarlo 0 (*cero*). Cuando se adopta esta práctica hay que definir de otro modo la adición y la multiplicación si se desea preservar el significado ordinario de estas operaciones y su familiar extensión a sistemas numéricos más amplios (números enteros, racionales, etc.). Ponemos:

$A_0 1$ $u + 0 = u$.
$A_0 2$ $u + \sigma v = \sigma(u + v)$.

$M_0 1$ $u \times 0 = 0$.
$M_0 2$ $u \times \sigma v = (u \times v) + u$.

Por cierto, nada se opone a que contemos "cero, uno, dos...", en vez de "uno, dos, tres..." Por otra parte, el cero, inventado en la India hace menos de veinte siglos, no es lo que normalmente llamaríamos "natural"; y tampoco lo es que, contando hasta once, completemos una docena.

número primo (A. *Primzahl*, F. *nombre premier*, I. *prime number*). Un *número primo* es un NÚMERO NATURAL mayor que 1 que es divisible exactamente solo por sí mismo y por 1. Dado un número primo n, siempre hay un número primo $m > n$. Sin embargo, según se avanza en la secuencia de los naturales, la abundancia de primos decrece indefinidamente y su frecuencia relativa converge al límite 0. Los diez primos más pequeños son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Si el número natural $r > 1$ no es primo, se lo llama *compuesto*. Cada número compuesto se descompone en factores primos de una y solo una manera. (Por ejemplo, $377.055 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 19 = 3^4 \times 5 \times 7^2 \times 19$.)

número racional (A. *rationale Zahl*, F. *nombre rationnel*, I. *rational number*). El quebrado, esto es, la proporción o *razón* (Lat. *ratio*, Gr. λόγος) entre números naturales, figura ya en los más antiguos textos matemáticos. Cuando los pitagóricos dicen que "todo es número", están pensando en un mundo ordenado por relaciones expresables como proporciones entre enteros positivos. Los quebrados negativos hacen su aparición al mismo tiempo que los enteros negativos. Diofanto enuncia las "reglas del signo" de la multiplicación —"menos por menos da más, menos por más da menos"— de las que se deduce que la proporción entre números de signo diferente es negativa, y aquella entre números del mismo signo es positiva.

Formalmente, el sistema $\mathbb{Q}$ de los quebrados o *números racionales* se define como el cociente $\mathbb{Z}^2/\sim$ del sistema de los pares ordenados de enteros por una determinada relación de EQUIVALENCIA. Esta definición es análoga a la definición de $\mathbb{Z}$ en el artículo NÚMERO ENTERO; pero utiliza una relación de equivalencia muy distinta.

Sea, pues, $\mathbb{Z} = \langle \mathrm{Z},+,0,\times\rangle$ el anillo de los enteros y $\mathbb{Z}^2 = \{\langle x,y\rangle : x \in \mathrm{Z} \wedge y \in \mathrm{Z}\}$. Escribamos xy en vez de $x \times y$. Definiremos la adición ($\oplus$) y la multiplicación ($\otimes$) en $\mathbb{Z}^2$. Sean $a, b, c, d \in \mathrm{Z}$. Entonces, por definición,

$$\langle a,b\rangle \oplus \langle c,d\rangle = \langle ad + bc, bd\rangle$$

y

$$\langle a,b\rangle \otimes \langle c,d\rangle = \langle ac, bd\rangle$$

Diremos que el par $\langle a,b\rangle$ equivale al par $\langle c,d\rangle$ (simbólicamente: $\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle$), si y solo si $ad = bc$. Es fácil ver que la relación $\sim$ es en efec-

to una equivalencia. Como tal, determina una PARTICIÓN de $\mathbb{Z}^2$ en clases mutuamente exclusivas. Si $u \in \mathbb{Z}^2$ denotamos con $[u]$ la clase $\{w : w \sim u\}$ de todos los w equivalentes a u; pero, en aras de la simplicidad, escribimos a/b por $[\langle a,b\rangle]$; esto es,

$$a/b = \{\langle x,y\rangle : \langle x,y\rangle \sim \langle a,b\rangle\}$$

Llamamos $\mathbb{Z}^2/\sim$ al conjunto $\{x/y : \langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}^2\}$ de todas las clases de equivalencia determinadas por la relación $\sim$. Un *número racional* es un elemento de este conjunto.

La función $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2/\sim$, $\langle x,y\rangle \mapsto x/y$ preserva la adición ($\oplus$), en el sentido siguiente: si $\langle a,b\rangle \sim \langle a',b'\rangle$ y $\langle c,d\rangle \sim \langle c',d'\rangle$, esto es, si $ab' = ba'$ y $cd' = dc'$, entonces $b'd'(ad + bc) = ab'd'd + cd'b'b = ba'd'd + dc'b'b = bd(a'd' + dc')$, vale decir, $\langle a,b\rangle \oplus \langle c,d\rangle \sim \langle a',b'\rangle \oplus \langle c',d'\rangle$. Por lo tanto, la definición siguiente de adición (+) en $\mathbb{Z}^2/\sim$ es inequívoca:

$$(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/bd = [\langle a,b\rangle \oplus \langle c,d\rangle]$$

f preserva asimismo la multiplicación ($\otimes$): si $\langle a,b\rangle \sim \langle a',b'\rangle$ y $\langle c,d\rangle \sim \langle c',d'\rangle$, esto es, si $ab' = ba'$ y $cd' = dc'$, entonces $(ac)(b'd') = (ab')(cd') = (ba')(dc') = (bd)(a'c')$, vale decir, $\langle a,b\rangle \otimes \langle c,d\rangle \sim \langle a',b'\rangle \otimes \langle c',d'\rangle$. Por lo tanto, la definición siguiente de multiplicación (x) en $\mathbb{Z}^2/\sim$ es inequívoca:

$$(a/b) \times (c/d) = ac/bd = [\langle a,b\rangle \otimes \langle c,d\rangle]$$

Es fácil ver que la ESTRUCTURA $\langle \mathbb{Z}^2/\sim, +, \times\rangle$ es un CUERPO, en el cual el elemento neutro de la adición es 0/1, en tanto que 1/1 es el elemento neutro de la multiplicación. Esta estructura se llama el *cuerpo de los racionales*, y se designa con $\mathbb{Q}$. Normalmente se entiende que la inyección canónica $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto n/1$ identifica cada $n \in \mathbb{Z}$ con el valor respectivo $\iota(n) \in \mathbb{Q}$. La adición y la multiplicación de números racionales, enteros y naturales se simbolizan con los mismos signos + y ×, respectivamente.

número real (A. *reelle Zahl*, F. *nombre réel*, I. *real number*). Los seguidores de Pitágoras comprobaron que hay proporciones numéricas simples —1/2, 3/2, 4/3— entre las longitudes de las cuerdas en que se pulsan los acordes que los griegos juzgaban armoniosos. Entusiasmados por este descubrimiento, concibieron la idea de que todo el orden de las cosas estribaba en relaciones entre números de los que hoy llamamos "naturales". Esta concepción se vino abajo cuando, a mediados del siglo V a.C., un pitagórico, probablemente Hipaso de Metaponto, demostró que hay magnitudes geométricas cuya

proporción mutua no es igual a ningún cociente entre enteros. (Por ejemplo, la diagonal de un cuadrado es igual a $\sqrt{2}$ veces su base, pero no existen dos enteros a y b tales que $(a/b)^2 = 2$.)

En el siglo IV a.C., Eudoxo de Cnido introdujo un concepto de proporción p/q entre dos magnitudes p y q, que no supone la existencia de números naturales que representen adecuadamente a p y q. Este concepto nos ha sido trasmitido en el libro V de los *Elementos* de Euclides. Dos magnitudes p y q forman la proporción p/q solo si son homogéneas, esto es, si hay un número natural n tal que $np > q$. Sin embargo, dos proporciones p/q y r/s pueden siempre compararse cuantitativamente aunque p y q no pertenezcan a la misma clase de magnitudes homogéneas que r y s. Según las estipulaciones de Eudoxo, $p/q = r/s$ si y solo si, para cualesquiera enteros m y n, $mp > nq$ implica que $mr > ns$, $mp = nq$ implica que $mr = ns$ y $mp < nq$ implica que $mr < ns$; $p/q < r/s$ si y solo si hay dos enteros m y n, tales que $mp < nq$ y $ns < mr$; $p/q > r/s$, si y solo si es falso que $p/q = r/s$ y que $p/q < r/s$. En virtud de ello, es claro que, dadas dos proporciones, o bien ambas son iguales, o una es menor que la otra. Las proporciones eudoxianas pueden sumarse o restarse entre sí y multiplicarse o dividirse por números naturales, para generar nuevas proporciones. En virtud de ello, obviamente, las proporciones eudoxianas son ellas mismas magnitudes homogéneas con las que pueden formarse proporciones, lo cual permite, a fin de cuentas, representar todas las magnitudes naturales en una sola estructura algebraica similar a la de los quebrados.

En el milenio que va de Eudoxo a la fundación de la física moderna esta idea se fue consolidando imperceptiblemente. En su evolución hay que destacar los aportes de Oresme (s. XIV), quien representa toda clase de magnitudes mediante segmentos rectos, y sobre todo de Descartes (1637), quien, además de sumar y restar segmentos, enseña a multiplicar y dividir un segmento por otro y a extraer la raíz cuadrada de un segmento, de modo que el resultado de todas estas operaciones sea siempre un segmento. Heredero de una larga tradición, Newton (1707) adopta sin vacilar el concepto eudoxiano de proporción como sinónimo de *número*: "Por número entendemos no tanto una multitud de unidades como la proporción (*rationem*) abstracta entre cualquier cantidad y otra del mismo género que se toma como unidad. Y es de tres clases [...]: *entero*, si es medido por la unidad; *quebrado*, si es medido por un submúltiplo de la unidad; e *irracional* (*surdus*), si la unidad es inconmensurable con él". La práctica común en las lenguas europeas de llamar "reales" a los números así entendidos se remonta a Descartes (1637), quien, hablando de las ecuaciones polinomiales de n-ésimo grado con coeficientes enteros, dice que "las raíces positivas (*vraies*) y negativas (*fausses*) de una ecuación no siempre son reales (*réelles*), pues a veces son puramente imaginarias (*seulement imaginaires*)"; y cita como ejemplo una ecuación de tercer grado cuya

solución arroja una raíz igual a 2 y otras dos de la forma $a + b\sqrt{-1}$, donde a y b son "números reales".

Antes de 1850, solo Bolzano, desconocido y aislado en Praga, cuestionó la vaguedad de este concepto de "número real" y propuso una elucidación del mismo (publicada póstumamente en 1962). Pero luego, entre 1857 y 1872, Weierstrass, Méray, Cantor y Dedekind proponen independientemente definiciones alternativas de número real, basadas en la construcción —diferente en cada caso— de ciertos conjuntos infinitos de quebrados. Explicaremos la propuesta por Dedekind (1872), que es la más popular y accesible.

Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los NÚMEROS RACIONALES o quebrados. Una *cortadura* en $\mathbb{Q}$ es una PARTICIÓN de $\mathbb{Q}$ en dos partes tales que todos los elementos de una parte son menores que cada elemento de la otra. Simbolizaremos con $(A;B)$ una cortadura con partes A y B, tales que los elementos de A son todos menores que cada elemento de B. Obviamente, hay tres posibilidades: (i) A contiene un SUPREMO $a \in A$ que es también el ÍNFIMO de B, en cuyo caso denotamos $(A;B)$ con $(a|)$; (ii) B contiene un ínfimo $b \in B$ que es también el supremo de A, en cuyo caso denotamos $(A;B)$ con $(|b)$; (iii) ni A contiene un supremo ni B un ínfimo. La suma de dos cortaduras $(A;B)$ y $(C;D)$ es la división de $\mathbb{Q}$ en los conjuntos $A+C = \{x + y : x \in A \wedge y \in C\}$ y $B+D = \{u + v : u \in B \wedge v \in D\}$. El producto de dos cortaduras $(A;B)$ y $(C;D)$ es la división de $\mathbb{Q}$ en los conjuntos $A \times C = \{x \times y : x \in A \wedge y \in C\}$ y $B \times D = \{u \times v : u \in B \wedge v \in D\}$. Es claro que tanto $(A+C;B+D)$ como $(A \times C;B \times D)$ son cortaduras. Además, si $(a|)$ y $(b|)$ son cortaduras del tipo (i), la suma de $(a|)$ y $(b|)$ es la cortadura $(a+b|)$, y su producto es la cortadura $(ab|)$, ambas de tipo (i); y el caso de las cortaduras de tipo (ii) es análogo. Es fácil probar entonces que, con estas operaciones de adición y multiplicación restringidas a cada tipo de cortaduras, las cortaduras de tipo (i) y las de tipo (ii) forman sendos cuerpos isomorfos con $\mathbb{Q}$ y también entre ellos, y que las funciones $x \mapsto (x|)$, $x \mapsto (|x)$ y $(x|) \mapsto (|x)$ son isomorfismos de cuerpos. Utilizamos este último isomorfismo para identificar las cortaduras de tipo (i) y de tipo (ii) y en adelante referirnos sólo a las primeras. El cuerpo de estas cortaduras está ordenado por la relación siguiente:

$$(x|) < (y|) \text{ si y solo si } x < y$$

Por ser isomorfo a $\mathbb{Q}$, éste es un cuerpo *arquimediano* pero no *completo* (↗CUERPO ORDENADO); por ejemplo, el conjunto $\{(a|) : a^2 < 2\}$ es una parte de este cuerpo, acotada arriba, que evidentemente no tiene un supremo. Por otra parte, si R es la unión de las cortaduras de tipo (i) y de tipo (iii), y los símbolos $+$ y $\times$ representan la restricción a R de las operaciones de adición y multiplicación de cortaduras definida al principio, es claro que $\mathbb{R} = \langle R,+,(0|),\times,(1|)\rangle$

es un cuerpo, en que el elemento neutro de la adición es la cortadura $(0|)$, de tipo (i), en que $0 \in \mathbb{Q}$ es el supremo de la primera parte y el ínfimo de la segunda y el elemento neutro de la multiplicación es la cortadura $(1|)$, de tipo (i), en que $1 \in \mathbb{Q}$ es el supremo de la primera parte y el ínfimo de la segunda. Este cuerpo está ordenado por la siguiente relación entre cortaduras:

$$(A;B) < (C;D) \text{ si y solo si } A \subseteq C \text{ y } A \neq C$$

Es un cuerpo a la vez arquimediano y completo, en que cada conjunto de cortaduras acotado arriba tiene un supremo que es una cortadura de tipo (iii), cuando no lo es de tipo (i). De acuerdo con la propuesta de Dedekind, $\mathbb{R}$ es el *cuerpo de los reales* y cualquier elemento de $\mathbb{R}$ es un *número real.*

Las elucidaciones alternativas del concepto de número real propuestas en la segunda mitad del siglo XIX redundan en cada caso en la construcción de un cuerpo ordenado, arquimediano y completo. La diferencia palmaria en la definición de los elementos de este cuerpo ofrecida por cada autor no tiene ninguna importancia desde que Hilbert (1900) demostró que todos los cuerpos ordenados, arquimedianos y completos son isomorfos. Más concretamente, Hilbert probó que si $\langle R,+,0,\times,1\rangle$ y $\langle \mathbf{R},+,\mathbf{0},\mathbf{x},\mathbf{1}\rangle$ son dos cuerpos de esta clase, hay siempre una función biyectiva $f : R \rightarrow \mathbf{R}$, que satisface las condiciones (i) $f(0) = \mathbf{0}$, (ii) $f(1) = \mathbf{1}$ y (iii) $f(x + y) = f(x) \mathbf{+} f(y)$ y $f(x \times y) = f(x) \mathbf{x} f(y)$ para todo $x, y \in R$. La existencia de este ISOMORFISMO canónico permite ver a todos los cuerpos ordenados, arquimedianos y completos como realizaciones completamente equivalentes de una misma estructura y designar a cualquiera de ellos como $\mathbb{R}$ (como hacemos en este diccionario).

La escuela intuicionista fundada por Brouwer a comienzos del siglo XX rechaza de plano la concepción conjuntista de los reales presentada aquí y entiende el concepto de número real de un modo radicalmente distinto.

O

observable (A. *Observable*, F. *observable*, I. *observable*). En la literatura de la MECÁNICA CUÁNTICA las cantidades físicas que la teoría supone que se pueden medir se llaman *observables*. Estas son las variables dinámicas de interés para la teoría. Cada observable de un sistema cuántico está asociado a un OPERADOR LINEAL autoadjunto sobre el respectivo espacio de Hilbert. Es corriente llamar *observables* a los propios operadores autoadjuntos. Por ello, importa tener presente que no cualquier operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert de un sistema cuántico puede asociarse a una cantidad física observable, sino solo aquellos cuyos vectores propios forman una base del espacio. Si los operadores P y Q que representan a las cantidades P y Q son conmutables, esto es, si PQ = QP (en otras palabras, si el *conmutador* [P,Q] = PQ − QP = 0), se dice que los observables P y Q (y los "observables" P y Q) son *compatibles*. De otro modo, se dice que son *incompatibles*.

omega-consistencia (A. *ω-Widerspruchsfreiheit*, F. *ω-compatibilité*, I. *ω-consistency*). Sea T una teoría aritmética cuyo lenguaje $\mathscr{L}$(T) posee numerales o designadores para cada número natural, como, por ejemplo, c para 0, s(c) para 1, s(s(c)) para 2, etc. Sea $\underline{n}$ el numeral que designa al número n. T es ω-consistente si, además de ser consistente, satisface el principio de inducción aritmética. Más formalmente, T es *ω-consistente* si y solo si no existe en $\mathscr{L}$(T) una fórmula $\varphi(x)$ tal que, por un lado, $\varphi(\underline{0}) \in$ T, $\varphi(\underline{1}) \in$ T, $\varphi(\underline{2}) \in$ T, $\varphi(\underline{3}) \in$ T y, en general, $\varphi(\underline{n}) \in$ T para cualquier numeral $\underline{n}$ del lenguaje y, por otro, $\neg\forall x\varphi(x) \in$ T. Si tal fórmula existe, entonces la teoría es ω-inconsistente. La ω-consistencia implica la CONSISTENCIA, pero no a la inversa; una teoría puede ser a la vez consistente y ω-inconsistente. Una teoría ω-inconsistente no es satisfacible por el sistema estándar de los números naturales, pero puede serlo por una realización o modelo no estándar de la aritmética. La noción de ω-consistencia fue introducida por Gödel en 1931.

onda (A. *Welle*, F. *onde*, I. *wave*). Considérese una pequeña laguna en un día sereno. La superficie del agua es recorrida por ligeras ondulaciones. Para des-

cribir exactamente este fenómeno durante un lapso de tiempo τ, fijamos el plano Π correspondiente al nivel medio del agua en ese lapso y definimos una función $h : \Pi \times \tau \to \mathbb{R}$, tal que, para cada punto $p \in \Pi$ y cada instante $t \in \tau$, $h(p,t)$ es igual a la altura —positiva o negativa— de la superficie del agua sobre ese punto en ese instante. Para un punto fijo p_0, la función $h(p_0,t) : \tau \to \mathbb{R}$ describe las oscilaciones del agua en ese punto durante el tiempo τ. Para un instante fijo t_0, la función $h(p,t_0) : \Pi \to \mathbb{R}$ describe la distribución en ese instante, sobre la laguna, de la altura del agua respecto a su nivel medio. Este ejemplo intuitivo motiva e ilustra el concepto físico-matemático de *onda*, el cual se aplica con toda generalidad a cualquier distribución continua de una cantidad física sobre un espacio de una o más dimensiones, que varíe continuamente en el tiempo. Consideremos los casos más sencillos.

(*a*) *Ondas estacionarias*: sea Q una cantidad física distribuida sobre un espacio unidimensional λ representado por la coordenada x en el intervalo $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que la cambiante distribución de Q sobre λ durante un lapso de tiempo τ puede representarse mediante una función $q : \mathbf{I} \times \tau \to \mathbb{R}$ que asigna a cada par $\langle x,t \rangle$ en su dominio el producto $X(x)\Theta(t)$, donde $X : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ y $\Theta : \tau \to \mathbb{R}$ son funciones lisas. El fenómeno descrito por q constituye entonces una *onda estacionaria*.

(*b*) *Ondas armónicas*: Q es como en el párrafo anterior, pero la función q que la representa en $\mathbf{I} \times \tau$ está dada por

$$q(x,t) = a\cos(kx - \omega t + \delta) \qquad (a > 0,\ \omega > 0)$$

donde a, k, ω y ε son parámetros característicos del fenómeno. Este es entonces una *onda armónica* con *fase* $(kx - \omega t + \delta)$, que se propaga en la dirección positiva de las x con velocidad ω/k si $k > 0$. k se llama NÚMERO DE ONDA o *número de propagación*. La LONGITUD DE ONDA es $2\pi k^{-1}$. El fenómeno puede representarse también en el plano complejo por la función $\psi : \mathbf{I} \times \tau \to \mathbb{C}$, dada por

$$\psi(x,t) = Ce^{i(kx - \omega t)}$$

donde la parte real de $\psi(x,t) = u(x,t)$, $|C| = a$ y $\arg C = \delta$. Este concepto se deja extender a espacios de más dimensiones.

(*c*) *Ondas planas*: consideremos ahora una cantidad Q distribuida en un espacio tridimensional $\mathscr{E}$, representado por el sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) en el paralelepípedo $\mathbf{I} \times \mathbf{J} \times \mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^3$. Supongamos que la cambiante distribución de Q sobre $\mathscr{E}$ durante un lapso de tiempo τ puede representarse mediante una función $q : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \times \mathbf{K} \times \tau \to \mathbb{R}$ que asigna a cada par $\langle x,t \rangle$ en su dominio el valor $f(x - ct)$, donde c es una constante positiva y f

es una función lisa definida en $\{y \in \mathbb{R} : y = x - ct, x \in \mathbf{I}, t \in \tau\}$. Como $\partial q/\partial y = \partial q/\partial z = 0$, es claro que en cada momento Q está distribuida uniformemente sobre cada plano x = const. Por ejemplo, en el momento 0, $Q = f(a)$ sobre todo el plano $x = a$. Pero entonces, en el momento t, Q = $f(a)$ sobre todo el plano $x = a + ct$. El fenómeno descrito es una *onda plana* que se propaga en la dirección positiva de las x con la velocidad c. Es fácil probar que todas las ondas planas que se propagan con velocidad c satisfacen la clásica ecuación de ondas en tres dimensiones:

$$c^2\nabla^2 q = \partial^2 q/\partial t^2$$

(donde ∇ es el operador NABLA). Esta ecuación también es satisfecha por cualquier superposición lineal de ondas planas que se propagan con velocidad c, y tiene además otras soluciones, esféricamente simétricas, por ejemplo.

Prácticamente todas las ondas de interés para la física pueden analizarse como superposiciones de ondas armónicas (↗MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE). Esta posibilidad no es solamente teórica, sino eminentemente práctica. Por ejemplo, a cualquier hora del día, mi cuarto es el escenario de una ondulación electromagnética incesante que llamaré $\mathbb{O}$, generada por todas las fuentes de radiación a cuya influencia está expuesto, tales como el Sol, cuya luz entra por la ventana, las estaciones locales de radio y televisión, los trasmisores cercanos de telefonía móvil y mi computadora. Si tengo dos teléfonos móviles en que simultáneamente recibo llamadas de dos amigos, el receptor de cada uno resuena precisamente con los componentes de $\mathbb{O}$ que resultan de la llamada dirigida a ese teléfono; movido por la respectiva resonancia, uno de los teléfonos puede producir entonces una perturbación ondulatoria del aire, equivalente a la causada por la voz de uno de mis amigos en la vecindad del teléfono por el cual me está llamando, mientras que el otro registra en una grabadora la información requerida para producir más tarde una señal acústica similar a la que está emitiendo mi otro amigo.

operacionalismo (A. *Operationalismus*, F. *opérationalisme*, I. *operationalism*). Según Bridgman, el significado de los conceptos de la física depende completa y exclusivamente de las operaciones mediante las cuales se controla su aplicación, y especialmente, cuando se trata de CONCEPTOS MÉTRICOS, de las operaciones mediante las cuales se mide su valor numérico. Esta doctrina se basa expresamente en la crítica de Einstein al concepto de SIMULTANEIDAD (1905a, §1), que Bridgman entiende así: para que tenga sentido decir que dos sucesos son simultáneos hay que indicar un método preciso para constatar esta relación. Aunque significó un valioso aporte a la higiene del pensamien-

to científico, el operacionalismo encuentra graves dificultades, de las que damos enseguida un ejemplo. La distancia se mide con diversos métodos, que no son todos aplicables a los mismos casos; la distancia entre dos bordes paralelos de una mesa se mide típicamente mediante una cinta de medir; la distancia entre las cimas de dos montes se mide por triangulación, con instrumentos ópticos; el mismo método, con mayores complicaciones, permite determinar la distancia a las estrellas que tienen un PARALAJE mensurable; la distancia a las galaxias más próximas se mide considerando el periodo y la magnitud aparente de las variables cefeidas que hay en ellas; la distancia a las galaxias más lejanas se determina por el CORRIMIENTO AL ROJO del espectro respectivo y el valor aceptado de los parámetros cosmológicos pertinentes. Según la concepción operacionalista, tendríamos que habérnoslas con una multitud de conceptos de distancia que debemos reconocer diferentes, pues se los mide con distintos métodos, aunque sus valores efectivamente coinciden en los casos en que dos o más de esos métodos son aplicables a la vez. Pero no podríamos pretender que los 2 millones de años-luz que la galaxia de Andrómeda —a juzgar por sus cefeidas— dista de la Tierra son sencillamente un múltiplo de los 382.000 km —medidos con radar— que en promedio separan a la Tierra de la Luna. Parece claro, sin embargo, que los físicos y astrónomos no trabajan con muchos conceptos de distancia, sino con uno solo, que resulta de la representación del ámbito en que los cuerpos subsisten e *interactúan* como un ESPACIO MÉTRICO, cuya estructura característica autoriza a atribuir una distancia —en un sentido unívoco y bien definido— a cada par de objetos localizados en él. Combinando la teoría y la experimentación ha sido posible establecer distintos métodos, ajustados a las circunstancias de cada caso, para medir los valores de dicha distancia entre diferentes pares de objetos.

operador lineal (A. *linearer Operator*, F. *opérateur lineaire*, I. *linear operator*). Un *operador lineal* en un ESPACIO DE HILBERT $\mathcal{H}$ es una FUNCIÓN LINEAL F : $\mathcal{V} \to \mathcal{H}$, donde $\mathcal{V}$ es una SUBVARIEDAD LINEAL de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{V} = \mathcal{H}$ se dice que F es un operador lineal *sobre* $\mathcal{H}$. En particular, la identidad $I_{\mathcal{H}}$: v $\mapsto$ v es un operador lineal sobre $\mathcal{H}$.

Sea, pues, F : $\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ un operador lineal en $\mathcal{H}$; en vez de F(v) escribimos Fv. Si hay un vector v $\neq$ 0 en $\mathcal{V}$ tal que, para algún escalar a, Fv = av, se dice que v es un *vector propio* de F y que a es el *valor propio* correspondiente. (Estas denominaciones provienen de las alemanas *Eigenvektor* y *Eigenwert*, respectivamente; algunos autores de habla castellana dicen 'autovector' y 'autovalor', pero no lo recomendamos, pues los objetos en cuestión no presentan la reflexividad expresada por el prefijo 'auto-'; *vide infra* la definición de 'operador autoadjunto'.) Un mismo valor propio de F puede co-

rresponder a muchos vectores propios diferentes. Desde luego, si F$\mathbf{v}$ = $a\mathbf{v}$ y b es un escalar distinto de 0 y 1, F$b\mathbf{v}$ = bF$\mathbf{v}$ = $ba\mathbf{v}$ = $a(b\mathbf{v})$, de modo que ($b\mathbf{v}$) es también un vector propio de F al que corresponde el valor propio a. Si F tiene dos o más vectores propios linealmente independientes a los que corresponde el mismo valor propio a, se dice que F es *degenerado*. En este caso, cualquier vector distinto de cero que sea una combinación lineal de esos vectores propios es también un vector propio de F al que corresponde el valor propio a. El número de vectores propios linealmente independientes a los que corresponde a se llama la *multiplicidad* o *grado de degeneración* del valor propio a.

Si F y G son dos operadores lineales en $\mathcal{H}$, la función compuesta F ∘ G también es un operador lineal que se designa con FG. El *conmutador* de F y G, simbolizado con [F,G], es la función FG − GF. Se dice que F y G *conmutan*, o que son operadores *conmutables*, si y solo si [F,G] = 0. El *anticonmutador* de F y G, simbolizado con {F,G}, es la función FG + GF.

Supongamos que existe un operador lineal $F^\dagger$ tal que, para todo v y w en $\mathcal{V}$, $\langle v|Fw\rangle = \langle F^\dagger v|w\rangle$; $F^\dagger$ se llama el *adjunto* de F. Se dice que F es un operador *acotado* si hay un número real $C \geq 0$ tal que, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\|F\mathbf{v}\| \leq C\|\mathbf{v}\|$. El más pequeño de estos números se llama la *norma* de F y se designa con $\|F\|$. Si F es acotado, su adjunto $F^\dagger$ existe y es un operador acotado con la misma norma que F. Si F y $F^\dagger$ existen y están definidos sobre $\mathcal{H}$, son ambos acotados. Los operadores lineales continuos sobre $\mathcal{H}$ son acotados. Si el operador lineal $F : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ es acotado y $\mathcal{V}$ es DENSO en $\mathcal{H}$, hay un y solo un operador lineal sobre $\mathcal{H}$ cuya RESTRICCIÓN a $\mathcal{V}$ es F.

El operador lineal F se dice *unitario* si el operador adjunto $F^\dagger$ existe y satisface la relación $F^\dagger F = FF^\dagger = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ (en otras palabras, si $F^\dagger$ es el operador inverso F^{-1}). Si F es unitario, entonces, para cualesquiera vectores v y w en $\mathcal{H}$, $\langle F\mathbf{v}|F\mathbf{w}\rangle = \langle F^\dagger F\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$: los operadores unitarios preservan el producto interno.

Si $F = F^\dagger$ se dice que F es *autoadjunto*. (En vez de autoadjunto se dice también *hermitiano*; pero evitamos esta última expresión porque algunos autores la definen de tal modo que en un espacio de infinitas dimensiones no tiene la misma extensión que la otra.) Si F es autoadjunto, todos sus valores propios son números reales. En efecto, si $A\mathbf{v} = a\mathbf{v}$ para algún $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, entonces $a\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}|a\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}|A\mathbf{v}\rangle = \langle A\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = \langle a\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = a^*\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle$; de modo que a es igual a su conjugado complejo = a^* y, por ende, a es real. Además, en tal caso todos los vectores propios de F que corresponden a valores propios diferentes son mutuamente ortogonales (↗PRODUCTO INTERNO). En efecto, si $F\mathbf{v} = a\mathbf{v}$, $F\mathbf{w} = b\mathbf{w}$, y $a \neq b$, entonces $a\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}|F\mathbf{v}\rangle = \langle F\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = b^*\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = b\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle$; por lo tanto $(a - b)\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = 0$; como $(a - b) \neq 0$, tenemos que $\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = 0$, de modo que w y v son ortogonales. Estas propiedades de los operado-

res autoadjuntos en un espacio de Hilbert motivan el uso de esta clase de operadores en MECÁNICA CUÁNTICA para representar los OBSERVABLES, esto es, las cantidades físicas que supuestamente se pueden medir.

Especial interés tienen los operadores lineales llamados *proyectores*. El operador lineal P es un proyector si y solo si $P^{\dagger}P = P$; esto implica que $P^{\dagger} = P$ (P es autoadjunto) y que PP = P (P es idempotente). Si P está definido en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, su recorrido $P[\mathcal{H}]$ es un subespacio de $\mathcal{H}$. Este subespacio está asociado en forma exclusiva a P, que no comparte su recorrido con ningún otro proyector definido en $\mathcal{H}$. En particular, si v es un vector normalizado (esto es, si $|\langle v|v\rangle|^2 = 1$), hay un y solo un proyector en $\mathcal{H}$, P_v que aplica todos los vectores de $\mathcal{H}$ en el subespacio generado por v. Para todo $w \in \mathcal{H}$,

$$P_v w = v\langle v|w\rangle$$

Si escribimos, con Dirac, $|v\rangle$ por v, es apropiado entonces poner $P_{|v\rangle} = |v\rangle\langle v|$.

Si A es un operador lineal en el espacio $\mathcal{H}$ y $\{v_1, v_2, \ldots\}$ es una BASE de $\mathcal{H}$, la acción de A sobre cualquier vector $w \in \mathcal{H}$ está determinada por su acción sobre los vectores de la base. En efecto, si $w = \sum_i w_i v_i$ y $Av_i = \sum_k A_{ik} v_k$, es claro que $Aw = \sum_{i,k} w_i A_{ik} v_k$. Decimos que la matriz (A_{ik}) *representa* el operador A relativamente a la base $\{v_1, v_2, \ldots\}$.

orden denso (A. *dichte Ordnung*, F. *ordre dense*, I. *dense ordering*). Un *orden denso* es un orden lineal, tal que entre dos elementos distintos siempre hay otro elemento intermedio. Por tanto, entre ese intermedio y uno de los otros también hay un nuevo intermedio, y así sucesivamente, de tal modo que uno puede pensar que esos elementos son como puntos que ocupan densamente la recta. De aquí se sigue que todo orden denso es infinito. La idea de orden denso se opone al carácter discontinuo o escalonado de ciertos órdenes lineales, como el de los números enteros. Entre el 4 y el 5 no hay ningún número entero intermedio; es como si hubiera un hueco o escalón. En un orden denso no hay saltos o escalones.

$\langle A, <\rangle$ es un *orden denso* si y solo si (1) $\langle A, <\rangle$ es un orden lineal, y (2) $\forall x \in A \forall y \in A(x < y \Rightarrow \exists z \in A(x < z \wedge z < y))$. Si $\langle A, <\rangle$ es un orden denso, entonces el orden dual $\langle A, >\rangle$ también es un orden denso.

Un *orden denso sin extremos* es un orden denso que carece de mínimo y máximo, es decir, un orden denso sin primer ni último elemento. $\langle A, <\rangle$ es un orden denso sin extremos si y solo si (1) $\langle A, <\rangle$ es un orden denso y (2) se cumple que $\forall x \exists y \exists z(y < x \wedge x < z)$. Así, por ejemplo, el orden lineal de los

números racionales $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ es un orden denso sin extremos. También lo es el de los reales, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, o cualquiera de sus intervalos propios abiertos.

La noción de orden denso ya se encuentra definida por Hausdorff en 1914. Aunque sin usar esta terminología, Cantor ya había probado que cualesquiera dos órdenes densos denumerables sin extremos son isomorfos entre sí. De ahí se sigue que la teoría formal del orden denso sin extremos es $\aleph_0$-categórica y, por el TEOREMA DE ŁOS-VAUGHT, completa.

orden lineal (A. *lineare Ordnung*, F. *ordre total*, I. *linear ordering*). En un orden parcial no es necesario que dos elementos distintos cualesquiera sean comparables (respecto a la relación de orden), es decir, no es necesario que uno de ellos preceda al otro. Si añadimos la exigencia de que la relación de orden sea conexa, es decir, que cada dos elementos distintos sean comparables, que uno de ellos preceda al otro, obtenemos un *orden lineal* (así llamado porque sus elementos se ordenan a lo largo de una sola línea) o total (por contraposición a parcial) o cadena (donde los elementos son como eslabones). Formalmente, $\langle A, < \rangle$ es un *orden lineal* si y solo si (1) $\langle A, < \rangle$ es un orden parcial (estricto) y (2) $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$. De aquí se sigue que si $\langle A, < \rangle$ es un orden lineal, entonces $\langle A, \leqslant \rangle$ es un RETÍCULO.

Cantor fue el primero en definir el orden lineal, al que él llamó orden simple (*einfach geordnete Menge*), en 1895. En 1906 Hessenberg dio una definición más precisa de la relación de orden lineal, equivalente pero distinta a la ahora habitual, que fue introducida por Hausdorff en 1914.

$\langle A, S \rangle$ es un *suborden lineal* de $\langle B, R \rangle$ si y solo si (1) $A \subseteq B$ y (2) $S = R \cap (A \times A)$. Un suborden lineal es un orden lineal. Si $\langle B, R \rangle$ es un orden lineal y $A \subseteq B$, entonces hay una única relación S, tal que $\langle A, S \rangle$ es un suborden lineal de $\langle B, R \rangle$, a saber, $S = R \cap (A \times A)$. $\langle A, S \rangle$ es el suborden lineal de $\langle B, R \rangle$ *generado* por A.

Sea $\langle A, < \rangle$ un orden lineal. Sean x, y elementos de A.

x es un *predecesor* de y (o x precede a y, o x es anterior a y, o x es inferior a y) si y solo si $x < y$. x es un *predecesor inmediato* de w si y solo si x es un predecesor de w y no hay otro predecesor de w entre x y w, es decir, si y solo si $x < w \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < w)$ o, equivalentemente, $x < w \wedge \forall z (z < w \Rightarrow z < x \vee z = x)$.

x es un *sucesor* de y (o x sigue o sucede a y, o x es posterior a y, o x es superior a y) si y solo si $y < x$. x es un *sucesor inmediato* de w si y solo si x es un sucesor de w y no hay otro sucesor de w intermedio entre w y x, esto es, si y solo si $w < x \wedge \neg \exists z (w < z \wedge z < x)$ o, equivalentemente, $w < x \wedge \forall z (w < z \Rightarrow x < z \vee z = x)$.

He aquí algunos ejemplos elementales de orden lineal: sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sea $<$ la relación de ser menor que entre nú-

meros naturales. $\langle \mathbb{N},<\rangle$ es un orden lineal: 0,1,2,3,4,... Este orden lineal tiene un mínimo, el 0, y carece de máximo. El orden dual del anterior, $\langle \mathbb{N},>\rangle$, es también un orden lineal: ...,4,3,2,1,0. Este orden lineal carece de mínimo, pero tiene un máximo, el 0. Sea R la relación en que están dos números naturales cualesquiera m y n si y solo si ambos son pares y $m < n$, o ambos son impares y $m < n$, o m es par y n es impar. $\langle \mathbb{N},R\rangle$ es un orden lineal: 0,2,4,6,8,... 1,3,5,7,9,... Este orden lineal tiene un mínimo, el 0, y carece de máximo. Sea B el conjunto de las potencias binarias, es decir, de los números 2^n, donde n es un número natural. Sea D la relación de ser un divisor propio entre potencias binarias. $\langle B,D\rangle$ es un orden lineal: 1,2,4,8,16,32,... Este orden lineal tiene un mínimo, el 1, y carece de máximo.

orden parcial (A. *Halbordnung*, F. *ordre*, I. *partial ordering, poset*). La noción de orden parcial reflexivo generaliza rasgos comunes a la relación de ser menor o igual entre números y a la de inclusión entre conjuntos. Se trata de un orden de precedencia, pues la relación en cuestión ordena los elementos que interrelaciona en el sentido de que coloca unos delante o detrás de otros. Este orden se llama parcial, pues no exige (aunque tampoco excluye) que todos los elementos estén ordenados por esa relación. Y se llama reflexivo, pues generaliza rasgos de las relaciones reflexivas de ser menor o igual y de inclusión. Si, por el contrario, generaliza rasgos de las relaciones irreflexivas de ser menor que o de inclusión propia, se trata de un orden parcial estricto.

Un *orden parcial reflexivo* es un sistema $\langle A,R\rangle$, donde R es una relación binaria en A, tal que R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En otras palabras, $\langle A,R\rangle$ es un *orden parcial reflexivo* si y solo si para cada x, y, $z \in A$:

(1) xRx
(2) $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
(3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Un *orden parcial estricto* es un sistema $\langle A,S\rangle$, donde S es una relación binaria en A, tal que S es irreflexiva y transitiva. En otras palabras, $\langle A,S\rangle$ es un *orden parcial estricto* si y solo si para cada x, y, $z \in A$:

(1) $\neg xSx$
(2) $xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz$

De aquí se sigue que la relación S de un orden parcial estricto $\langle A,S\rangle$ es asimétrica, esto es, que $xSy \Rightarrow \neg ySx$.

Para cada orden parcial reflexivo $\langle A,R\rangle$ hay un orden parcial estricto correspondiente $\langle A,S\rangle$ tal que para cada $x,y \in A$: $xSy \Leftrightarrow xRy \wedge x \neq y$. En efec-

to, si de la relación de orden parcial reflexivo R sacamos la diagonal o identidad de A, $\mathbf{1}_A = \{\langle x,x\rangle: x \in A\}$, lo que queda, es decir $\langle A, R-\mathbf{1}_A\rangle$, es el orden parcial estricto correspondiente S.

Para cada orden parcial estricto $\langle A,S\rangle$ hay un orden parcial reflexivo correspondiente $\langle A,R\rangle$, tal que para cada $x,y \in A$, $xRy \Leftrightarrow xSy \vee x = y$. En efecto, si a la relación de orden parcial estricto S añadimos la diagonal o identidad de A, lo que obtenemos, es decir, $\langle A,S\cup\mathbf{1}_A\rangle$, es el orden parcial reflexivo correspondiente R.

Es frecuente usar el signo "$\preccurlyeq$" (en vez de R) como parámetro para la relación binaria de un orden parcial reflexivo cualquiera. El correspondiente orden parcial estricto se representa entonces mediante "$\prec$". A la inversa, si $\langle A,\prec\rangle$ es un orden parcial estricto, entonces $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ es su orden parcial reflexivo correspondiente. Así, al decir que $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ es un orden parcial, se sobreentiende que queremos decir que $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ es un orden parcial reflexivo, mientras que al decir que $\langle A,\prec\rangle$ es un orden parcial, se sobreentiende que $\langle A,\prec\rangle$ es un orden parcial estricto. Simbolizando así una relación de orden parcial estricto como $\prec$ y su correspondiente relación de orden parcial reflexivo como $\preccurlyeq$, ocurre que para cualesquiera elementos x, y del orden:

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \prec y \vee x = y$$
$$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$$
$$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge \neg y \preccurlyeq x$$

$\langle A,\preccurlyeq\rangle$ es un orden parcial reflexivo si y solo si $\langle A,\prec\rangle$ es un orden parcial estricto. $\langle A,\prec\rangle$ es un orden parcial estricto si y solo si $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ es un orden parcial reflexivo.

Una relación R *ordena parcialmente* un conjunto A si y solo si $\langle A,R\restriction A\rangle$ es un orden parcial (donde $R\restriction A$ es la RESTRICCIÓN de R a A, es decir, $R \cap A^2$). En este caso también se dice que R es una relación de orden parcial en A. Esto vale tanto para el caso del orden parcial reflexivo como para el del orden parcial estricto. Si $\langle A,R\rangle$ es un orden parcial y $B \subseteq A$, entonces $\langle B,R\restriction B\rangle$ es también un orden parcial. En ese caso decimos que $\langle B,R\restriction B\rangle$ es un *suborden parcial* de $\langle A,R\rangle$ o una *restricción* de $\langle A,R\rangle$ a B.

Si $\langle A,R\rangle$ es un orden parcial, entonces $\langle A,R^{-1}\rangle$ también es un orden parcial (donde R^{-1} es la inversa de R), el orden parcial *dual* a $\langle A,R\rangle$. El orden parcial estricto dual a $\langle A,\prec\rangle$ se representa como $\langle A,\succ\rangle$. El orden parcial reflexivo dual a $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ se representa como $\langle A,\succcurlyeq\rangle$. Por ejemplo, el orden parcial dual de $\langle\mathbb{N}$, es divisor de$\rangle$ es $\langle\mathbb{N}$, es múltiplo de$\rangle$. Y si $<$ es la usual relación de ser menor entre números naturales, el orden parcial dual de $\langle\mathbb{N},<\rangle$ es $\langle\mathbb{N},>\rangle$.

Sea $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ un orden parcial. Sea $b \in A$. b es un *elemento minimal* de $\langle A,\preccurlyeq\rangle$, y también de $\langle A,\prec\rangle$, si y solo si ningún elemento de A precede a b. b es un *elemento maximal* si y solo si ningún elemento de A sigue a b.

b es *elemento minimal* $\Leftrightarrow \neg\exists x{\in}A(x \prec b)$
b es *elemento maximal* $\Leftrightarrow \neg\exists x{\in}A(b \prec x)$

En un orden parcial puede no haber ningún elemento minimal (o maximal), o puede haber uno o varios (incluso infinitos). Todo orden parcial finito posee al menos un elemento minimal y un elemento maximal.

b es un *mínimo* de $\langle A,\preccurlyeq\rangle$, y también de $\langle A,\prec\rangle$, si y solo si b precede a todos los elementos de A distintos de b. b es un *máximo* si y solo si b sigue a todos los elementos de A distintos de b.

b es un *mínimo* $\Leftrightarrow \forall x{\in}A(b \preccurlyeq x)$
b es un *máximo* $\Leftrightarrow \forall x{\in}A(x \preccurlyeq b)$

En un orden parcial hay a lo sumo un mínimo. Es decir, en un orden parcial puede haber o no haber un mínimo, pero, si lo hay, entonces hay solo uno. Por tanto podemos hablar de *el mínimo*, pues, si lo hay, está unívocamente determinado. Lo mismo puede decirse del máximo. El mínimo se llama también el primero, y el máximo, el último. El mínimo siempre es un elemento minimal. El máximo siempre es un elemento maximal. (¡Pero no a la inversa!)

Sea $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ un orden parcial. Sea $B \subseteq A$ y $c \in A$. c es una *cota superior* de B si y solo si para cada $x \in B$, $x \preccurlyeq c$. s es el *supremo* de B, $\sup(B) = s$, si y solo si s es la mínima de las cotas superiores de B, es decir, si y solo si s es una cota superior de B y para cada z, si z es una cota superior de B, entonces $s \preccurlyeq z$. De modo similar, c es una *cota inferior* de B si y solo si para cada $x \in B$, $c \preccurlyeq x$. Y s es el *ínfimo* de B, $\inf(B) = s$, si y solo si s es la máxima de las cotas inferiores de B. Desde luego, no siempre hay un ínfimo o un supremo.

Si en una fórmula Φ de la teoría de órdenes parciales sustituimos $\preccurlyeq$ por $\succcurlyeq$, $\prec$ por $\succ$, 'minimal' por 'maximal', 'mínimo' por 'máximo', 'ínfimo' por 'supremo' (y viceversa), obtenemos la fórmula dual a la dada, dual(Φ). Si Φ es un teorema, dual(Φ) también es un teorema de la teoría del orden parcial.

La noción de orden parcial es la más general que maneja la teoría del orden. Un orden parcial puede ser o no un RETÍCULO.

ordenada (A. *Ordinate*, F. *ordonnée*, I. *ordinate*). ↗COORDENADAS CARTESIANAS.

ordinal límite (A. *Limeszahl*, F. *ordinal limite*, I. *limit ordinal*). Un ordinal límite es un número ordinal distinto de 0 y que no está inmediatamente precedido por otro ordinal, es decir, que no es un ordinal sucesor. Suele usarse la letra griega λ como variable para referirse a ordinales límites cualesquiera. Si λ es un ordinal límite, entonces no hay un ordinal α tal que s(α) = λ. Un ordinal λ es igual a la gran unión de todos los ordinales menores que él, es decir, a la gran unión de todos sus elementos. $\lambda = \bigcup \lambda$. El primer o mínimo ordinal límite es ω, el primer ordinal transfinito (el conjunto de los números naturales); el segundo ordinal límite es ω+ω = ω·2. Hay una cantidad infinita innumerable de ordinales límites. Cuando vamos iterando el paso de un ordinal a su sucesor, del 0 al 1, del 1 al 2, del 2 al 3, etc., podemos imaginativamente dar un salto hasta el primer ordinal límite, ω, y tomarlo como punto de partida para una nueva iteración: ω, ω+1, ω+2, ω+3, etc. A su vez podemos dar otro salto hasta el límite siguiente, ω·2, e iniciar otra iteración: ω·2, ω·2+1, ω·2+2, ω·2+3, ω·2+4, etc. Y así sucesivamente. Los números ordinales nos ofrecen la posibilidad de iterar indefinidamente las iteraciones y las iteraciones de iteraciones.

ordinal sucesor (A. *Nachfolgerzahl*, F. *ordinal successeur*, I. *successor ordinal*). Cada número ordinal α está inmediatamente seguido por otro ordinal, que es su sucesor, $s(\alpha) = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Sin embargo, no todo ordinal β está inmediatamente precedido por otro ordinal. Por ejemplo, 0 no está inmediatamente precedido por ningún ordinal, y tampoco lo está ω, el primer ordinal transfinito. Un ordinal β es un ordinal sucesor si y solo si hay un ordinal α que lo precede inmediatamente, es decir, tal que β es el sucesor de α, s(α) = β. Por ejemplo, 2 y ω+5 son ordinales sucesores; 2 es el sucesor de 1 y ω+5 es el sucesor de ω+4. Todo número ordinal es el 0 o es un ordinal sucesor o es un ORDINAL LÍMITE.

ordinales [o números ordinales] (A. *Ordinalzahlen*, F. *ordineaux*, I. *ordinals*). Los (números) ordinales constituyen una medida de los conjuntos bien ordenados que tiene en cuenta tanto la cantidad de sus elementos como el orden en que están dados. En esto se diferencian de los (números) CARDINALES, que solo miden la cantidad de elementos. En el caso de los conjuntos finitos ambas medidas coinciden y los NÚMEROS NATURALES (tal como los concibe la tradición conjuntista) son a la vez los ordinales y los cardinales finitos. Sin embargo ambas medidas difieren para los conjuntos infinitos. Los ordinales transfinitos generalizan la función iterativa de los números naturales, que permite ordenar o pasar lista a los elementos de un conjunto: el primero, el segundo, el tercero... Es habitual emplear letras griegas minúsculas para referirse a ordinales cualesquiera.

Georg Cantor había definido los ordinales como los TIPOS DE ORDEN de los conjuntos bien ordenados. Precisando esta noción cantoriana, los tipos de orden pueden considerarse como las clases de equivalencia (respecto a la relación de isomorfía) de conjuntos bien ordenados. Por tanto, el tipo de orden de un conjunto bien ordenado sería la clase de todos los conjuntos bien ordenados isomorfos con él. El referirse a todos los conjuntos bien ordenados puede resultar peligroso, pues a veces la referencia a clases tan enormes conduce a contradicciones en la teoría intuitiva de conjuntos. Aunque este peligro puede ser conjurado mediante una axiomatización cuidadosa, von Neumann (1922/1923) encontró una solución más sencilla. En vez de identificar un ordinal con una enorme clase de conjuntos isomorfos entre sí, propuso identificarlo con un representante (un elemento) particular de esa clase, con lo cual desaparecen los peligros asociados a la gran cardinalidad y se simplifica la teoría.

En esta concepción de von Neumann, cada ordinal es el conjunto de los ordinales precedentes. Este conjunto está bien ordenado por la relación $\in$ de pertenencia o, si se prefiere, por la equivalente relación $<$ de ser menor que (entre ordinales). En efecto, un ordinal α precede a otro β si y solo si $\alpha \in \beta$, lo cual a su vez equivale a decir que $\alpha < \beta$. Así, 0 es el conjunto vacío, 1 es el conjunto cuyo único elemento es 0, 2 es el conjunto cuyos elementos son 0 y 1, 3 aquel cuyos elementos son 0, 1 y 2, y así sucesivamente. $0 = \varnothing$, $1 = \{0\} = \{\varnothing\}$, $2 = \{0,1\} = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $3 = \{0,1,2\} = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, etc. Esto vale tanto para los ordinales finitos como para los infinitos. El mínimo ordinal infinito $\omega = \{0,1,2,3, \ldots\}$; $\omega+1 = \{0,1,2,3, \ldots, \omega\}$, $\omega+2 = \{0,1,2,3, \ldots, \omega, \omega+1\}$, etc. Cada uno de estos ordinales está bien ordenado por la relación $\in$, es decir, para cada ordinal α, $\langle \alpha, \in \restriction \alpha \rangle$ es un buen orden. En efecto, $0 \in 1 \in 2 \in 3 \ldots$ Cada conjunto bien ordenado es isomorfo a uno de estos ordinales de von Neumann. En 1937 Raphael Robinson simplificó aún más la teoría, definiendo los ordinales como los conjuntos transitivos y conectados por $\in$, es decir, como aquellos conjuntos w que satisfacen tanto $\forall x(x \in w \Rightarrow x \subseteq w)$ como $\forall x \forall z(x \in w \land z \in w \Rightarrow x \in z \lor x = z \lor z \in x)$.

Cantor no solo introdujo los tipos de orden, sino que nos enseñó a operar con ellos como con números (ordinales), desarrollando su ARITMÉTICA ORDINAL TRANSFINITA, que es una extensión de la aritmética natural en el sentido de que, por ejemplo, la restricción a ω de la adición o la multiplicación ordinal nos da la adición o multiplicación habitual de los números naturales.

La adición de tipos de orden es asociativa, pero no es conmutativa. En general, y para cualquier número natural n distinto de 0, $n + \omega = \omega$, pero $\omega + n \neq \omega$. Por tanto, $n + \omega \neq \omega + n$. La multiplicación de tipos de orden es asociativa, pero no es conmutativa. Por ejemplo, $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$. En general,

$n \cdot \omega = \omega$ (siendo n un número natural distinto de 0) y $\omega \cdot n \neq \omega$ (siendo n un número natural mayor que 1).

En 1928 von Neumann probó el teorema general de RECURSIÓN TRANSFINITA, que justifica las definiciones de funciones ordinales (funciones definidas para todos los ordinales) y las demostraciones por inducción transfinita sobre todos los números ordinales, lo que constituye una potente generalización al ámbito transfinito de la INDUCCIÓN ARITMÉTICA.

La teoría de conjuntos hace un uso constante de los ordinales. El UNIVERSO CONJUNTISTA entero se define en función de los ordinales. Incluso los cardinales mismos son un tipo especial de ordinales.

ortonormal (A. *orthonormal*, F. *orthonormale*, I. *orthonormal*). Sea $\mathcal{V}$ un ESPACIO VECTORIAL provisto de un PRODUCTO INTERNO $\langle v,w \rangle \mapsto \langle v|w \rangle$. La familia $(v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de vectores pertenecientes $\mathcal{V}$ es *ortonormal* si, para todos los índices $i, j \in \mathcal{I}$, $\langle v_i|v_i \rangle = 1$ y $\langle v_i|v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$. Una familia ortonormal de vectores se dice *completa* si no es una parte propia de otra familia ortonormal. Toda familia ortonormal es un conjunto linealmente independiente de vectores.

P

par ordenado (A. *geordnetes Paar*, F. *pair ordonné*, I. *ordered pair*). La noción de par ordenado luce tan clara que parecería imposible explicarla mediante otra más obvia. Sin embargo, la matemática conjuntista se ha dado maña para definirla, prescindiendo de la noción de orden, como sigue: Si a y b son dos objetos, no necesariamente diferentes, el *par ordenado* $\langle a,b\rangle$ es el conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$. Adviértase que, conforme a esta definición, el par ordenado $\langle a,a\rangle = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$; es pues un par de CARDINALIDAD $|\langle a,a\rangle| = 1$.

En el uso lógico y matemático corriente —también en este diccionario— cuando se habla sin más de un *par*, se sobreentiende que se trata de un par ordenado.

paradigma (A. *Paradigma*, F. *paradigme*, I. *paradigm*). Según Kuhn (1962), en cada especialidad científica las labores de la CIENCIA NORMAL siguen las pautas trazadas por un *paradigma* o dechado canónico de la investigación en esa área. Kuhn suele usar la expresión 'teoría paradigmática' y a ratos parecería que identifica 'paradigma' con 'visión del mundo'; pero es claro que eligió la palabra 'paradigma' para referirse primariamente no a un sistema coherente de asertos explícitos, ni siquiera a un modo de pensar, sino a un ejemplo concreto de cómo hay que abordar un tema de investigación (el cual puede, sí, estar documentado en libros; vgr. los *Principios* de Newton para la mecánica, el *Tratado elemental* de Lavoisier para la química, el *Origen de las especies* de Darwin para la biología evolucionista). Los científicos pueden "concordar en su *identificación* de un paradigma sin concordar en, o siquiera tratar de producir, una *interpretación* o *racionalización* completa del mismo". "Los científicos trabajan a partir de modelos adquiridos por su educación y ulterior exposición a la literatura, sin que sepan del todo y sin que necesiten saber qué características le han conferido a estos modelos el rango de paradigmas de la comunidad." "Los paradigmas pueden ser previos, más comprometentes y más completos que cualquier conjunto de reglas de investigación que uno pudiera inequívocamente abstraer de ellos." "Al aprender un

paradigma, el científico adquiere teoría, métodos y estándares juntos, usualmente en una mezcla inextricable."

Ante los reproches de ambigüedad —una estudiosa señaló en su libro 21 acepciones diferentes de 'paradigma'—, Kuhn (1970) descartó el término y denominó MATRIZ DISCIPLINARIA al conjunto de elementos de diversa índole que, según su nuevo análisis, desempeñan en la ciencia normal la función que él había atribuido al paradigma. El nuevo término no ha alcanzado la misma aceptación y difusión que el primero, quizás porque no es eufónico y no tiene resonancias románticas, o simplemente porque es más preciso.

paradoja de Bertrand (A. *Bertrandsche Paradoxie*, F. *paradoxe de Bertrand*, I. *Bertrand's paradox*). Bertrand (1888) propuso el siguiente problema: se traza al azar una cuerda en el círculo *K* de centro *O* y radio *r*; ¿cuál es la probabilidad de que ella sea mayor que el lado de un triángulo equilátero inscrito en *K*? Bertrand ofrece tres soluciones incompatibles. (*a*) Si fijamos uno de los extremos de la cuerda, esta determinación no altera la probabilidad buscada, pues, en virtud de la simetría de *K*, ella no tiene ninguna influencia favorable o desfavorable sobre el evento en cuestión. Ahora bien, si uno de los extremos de la cuerda se fija, digamos en el punto *P*, el azar gobernará su dirección. Construyáse un triángulo equilátero inscrito con un vértice en *P*. Los dos lados del triángulo que concurren en *P* forman entre sí y con la tangente que toca a *K* en *P* tres ángulos iguales. La cuerda será mayor que esos lados solo si cae en el ángulo entre ellos. La probabilidad de que la cuerda trazada al azar caiga en ese ángulo y no en uno de los que cada lado forma con la tangente es igual a ⅓. (*b*) Si fijamos la dirección de la cuerda, esta determinación no altera la probabilidad buscada. Ahora bien, la distancia entre el centro de gravedad de un triángulo equilátero y cada uno de sus vértices es igual al doble de la distancia desde ese punto al lado opuesto respectivo. Además, el centro de gravedad de un triángulo equilátero inscrito en *K* coincide con el centro *O*. Por lo tanto, si la dirección de la cuerda está dada, esta será mayor que el lado de un triángulo equilátero inscrito solo si corta el diámetro perpendicular a esa dirección a una distancia de *O* menor que ½*r*. La probabilidad de que la cuerda trazada al azar cumpla esta condición es igual a ½. (*c*) Si fijamos el punto medio de la cuerda, esta determinación no altera la probabilidad buscada. Como se vio en el caso (*b*), para que la cuerda trazada al azar sea mayor que el lado de un triángulo equilátero inscrito es necesario y suficiente que su punto medio diste de *O* menos que ½*r*, y por lo tanto que dicho punto medio caiga en el interior de un círculo de superficie igual a la cuarta parte de la superficie de *K*; la probabilidad de este evento es igual a ¼. Bertrand concluye: ninguna de las tres soluciones es falsa, ninguna es correcta; el problema está mal planteado.

A principios del siglo XX, la paradoja de Bertrand contribuyó a desprestigiar la clásica definición de Laplace (1795), según la cual la PROBABILIDAD de un evento es el cociente entre el número de casos igualmente posibles favorables a ese evento y el total de todos los casos igualmente posibles. Más tarde, sin embargo, Jaynes (1973) ha defendido la validez exclusiva de la primera solución, argumentando que es la única de las tres que es invariante bajo todas las simetrías del plano euclídeo: rotaciones, traslaciones y transformaciones de escala.

paradoja de Burali-Forti (A. *Antinomie von Burali-Forti*, F. *Paradoxe de Burali-Forti*, I. *Burali-Forti paradox*). Paradoja de la teoría cantoriana de conjuntos descubierta por Cantor en 1895 y redescubierta y publicada por Burali-Forti en 1897. Los ordinales pueden identificarse con los conjuntos transitivos, conectados y regulares. Pero Ω, la clase de todos los ordinales, es transitiva, conectada y regular. Por tanto, Ω sería un ordinal y, puesto que Ω es la clase de todos los ordinales, tendríamos que $\Omega \in \Omega$, contra la regularidad de Ω, que implica que $\Omega \notin \Omega$. Cantor concluyó del análisis de esta paradoja que Ω es una pluralidad inconsistente, que no puede manejarse como si fuera un objeto o conjunto cualquiera, so pena de caer en contradicciones. Zermelo resolvió la paradoja evitando que en su teoría axiomática de conjuntos existiera Ω. Von Neumann la resolvió evitando que Ω pudiera estar en la relación de pertenencia con una clase (incluso con ella misma), al declararla CLASE ÚLTIMA.

paradoja de Cantor (A. *Cantorsche Antinomie*, F. *paradoxe de Cantor*, I. *Cantor's paradox*). Paradoja de la teoría cantoriana de conjuntos descubierta por Cantor y comunicada por este a Dedekind en una carta de 1899. El conjunto universal V incluye a todos los conjuntos, también a su propio conjunto potencia, $\wp V$, que es un subconjunto suyo. Pero la cardinalidad de un subconjunto de X es siempre menor o igual que la cardinalidad de X. Por tanto, $|\wp V| \leq |V|$. Por otro lado, el teorema de Cantor indica que la cardinalidad del conjunto potencia de X es siempre mayor que la cardinalidad de X. Por tanto, $|\wp V| > |V|$. Estos dos resultados se contradicen. En las teorías axiomáticas de conjuntos la paradoja se evita porque o bien V no existe (como ocurre en la de Zermelo-Fraenkel) o bien V es una clase última (como ocurre en la de von Neumann, Bernays y Gödel), por lo que carece de cardinalidad y no se le aplica el teorema de Cantor.

paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen (A. *Paradoxie von Einstein, Podolsky und Rosen*, F. *paradoxe d'Einstein, Podolsky et Rosen*, I. *Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, *EPR paradox*). Dificultad que según Einstein, Po-

dolsky y Rosen (1935) afronta la MECÁNICA CUÁNTICA como consecuencia de un experimento mental que estos autores idearon para demostrar que dicha teoría no ofrece una descripción completa de la realidad física que es su tema.

Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) sostienen que una teoría física puede considerarse *completa* solo si cada elemento de la realidad física tiene en ella una contrapartida. Según ellos, una condición suficiente de la existencia de tales elementos es esta: "Cuando —sin perturbar un sistema en modo alguno— podemos predecir con certeza (esto es, con probabilidad igual a uno) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de la realidad física correspondiente a esta cantidad física".

El experimento mental de EPR envuelve dos sistemas cuánticos S y S' —por ejemplo, dos partículas— que interactúan entre los instantes t_1 y t_2 y luego se separan. Según la mecánica cuántica, si cierto OBSERVABLE A se mide con precisión en S en el instante $t_3 > t_2$, el valor obtenido —llamémosle a— permite en ciertas circunstancias predecir el valor a' del mismo observable en S' en ese instante (por ejemplo, si A es el momento cinético, la ley de conservación de esta cantidad permite deducir su valor para S' del valor del momento de S, si se conoce el momento total de ambos sistemas durante su interacción). Otro tanto puede ocurrir si se mide en S un observable B incompatible con A: el conocimiento de su valor b permite a veces deducir el valor b' que B tiene en ese instante en S'. Como S y S' dejaron de interactuar en t_2, la operación de medir en t_3 un observable en S no puede afectar al valor del mismo en S'. Midiendo en S uno de los observables incompatibles A y B, se puede predecir con certeza el valor a' o el valor b' del respectivo observable en S', sin perturbar este sistema en modo alguno. Por lo tanto, según el criterio de EPR, los valores precisos a' y b' son "elementos de realidad" presentes en S' en el instante t_3. Ahora bien, la mecánica cuántica no permite asignar a un sistema dado valores simultáneos precisos de dos observables incompatibles. Por lo tanto, hay elementos de la realidad física que no tienen una contrapartida en la mecánica cuántica y esta teoría no puede considerarse completa.

Más específicamente, EPR consideran un sistema de dos partículas a y b preparado en un estado en que su posición relativa $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y su momento cinético total $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ tienen valores bien definidos. (Ello es posible, pues los dos operadores mencionados son compatibles.) Las partículas se alejan mutuamente y dejan de interactuar. Si medimos entonces la posición de a, podemos predecir con certeza la posición de b, y si medimos el momento de a, podemos predecir con certeza el momento de b. Como ambas mediciones se harían sobre a cuando esta partícula no interactúa con b, la posición y el momento de b, predichos con certeza sin perturbar su estado, son elementos de realidad y una teoría completa debería describirlos con precisión. Sin embar-

go, conforme al PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG, la mecánica cuántica no puede asignar a la vez un valor preciso a la posición y el momento de *b*. Por lo tanto, la descripción mecánico-cuántica de la realidad física es incompleta.

Bohr (1935) respondió a EPR con una de las mejores exposiciones de su doctrina de la COMPLEMENTARIEDAD. Según Bohr, Einstein y sus colaboradores no se hacen cargo de "la necesidad de una renuncia final al ideal clásico de causalidad y de una revisión radical de nuestra actitud hacia el problema de la realidad física". En el caso arriba descrito ciertamente no tiene lugar "una perturbación mecánica del sistema [*S'*] durante la crítica etapa final de la medición". Pero aun en esta etapa, la decisión de realizar —en *S*— el experimento que mide *A*, o el experimento que mide *B* influye esencialmente "sobre las condiciones mismas que definen los tipos posibles de predicción concerniente al comportamiento futuro del sistema [*S'*]". Si se ejecuta en *S* una medición de *A* se obtiene una predicción sobre *S'*; si, *en vez de eso*, se ejecutase en *S* una medición de *B*, se obtendría otra predicción sobre *S'*. Pero la medición que genera la primera predicción excluye la segunda, y viceversa. No cabe ver como un hecho el resultado de un experimento que no tuvo lugar, sobre todo si este se ha vuelto imposible con la realización de otro experimento.

La respuesta de Bohr satisfizo a la gran mayoría de los físicos, a quienes, por lo demás, no les aflige mucho que las teorías de que disponen sean *incompletas* con tal de que sean *idóneas* para predecir y explicar los resultados experimentales a su alcance.

El descubrimiento del TEOREMA DE BELL (1964) reavivó el interés en el problema de EPR, al hacer patente que una teoría ajustada a las exigencias de estos autores no solo ofrecería *más* información que la mecánica cuántica, sino que necesariamente *contradiría* las predicciones de esta. Es difícil imaginar cómo una teoría así podría arreglárselas con todo el material experimental acumulado en apoyo de la mecánica cuántica. Ello no obstante, varios grupos de investigadores planearon y realizaron experimentos que permiten confrontar directamente las predicciones de la mecánica cuántica con las que, a la luz del teorema de Bell, arrojaría una teoría física "completa" en el sentido de EPR. Generalmente se acepta que los experimentos de Aspect y sus colaboradores (1981, 1982a, 1982b) establecieron que la desigualdad de Bell de hecho es violada en la naturaleza, tal como predice la mecánica cuántica, aunque no faltan quienes —como Fine (1998)— aún expresan reservas.

paradoja de Goodman (A. *Goodmansche Paradoxie*, F. *paradoxe de Goodman*, I. *Goodman's paradox*). Imitando a Goodman (1955) en castellano, di-

gamos que x es *verul* si y solo si x es verde hasta el año 3000 y azul de ahí en adelante, y que x es *azerde* si y solo si x es azul hasta el año 3000 y verde de ahí en adelante. (Goodman definió los predicados *grue* y *bleen* en función de *green*, *blue* y el año 2000, pero esta fecha nos queda corta.) Entonces, obviamente, las mismas observaciones que nos llevan a pensar que *todas las esmeraldas son verdes* respaldan la afirmación de que *todas las esmeraldas son verules*. Se ha alegado que no es admisible que la definición de una cualidad sensorial remita a una determinada fecha. Pero en vez de nombrar el año 3000 se podría con el mismo efecto mencionar el valor de alguna cantidad física —vgr. la abundancia de carbono 14— previsto para ese entonces. Por otra parte, los predicados *verul* y *azerde* pueden introducirse por ostensión, apuntando a los mismos objetos que hasta ahora hemos clasificado como *verdes* y *azules*, respectivamente. En tal caso, habría que definir: x es *verde* si y solo si x es verul hasta el año 3000 y azerde de ahí en adelante; x es *azul* si y solo si x es azerde hasta el año 3000 y verul de ahí en adelante. Al redefinirlos así no cambiaría en un ápice la extensión tradicional de estos predicados. Según Goodman, la preferencia general por "todas las esmeraldas son verdes" sobre "todas las esmeraldas son verules" se debe a que el par de conceptos *verde/azul* está mucho más arraigado (I. *entrenched*) que *verul/azerde*. Ese mayor arraigo a su vez podría explicarse pensando en lo que habría ocurrido con *verul* y *azerde* si un Goodman paleolítico los hubiese propuesto como estándar, definiendo *azul* y *verde* en función de ellos y del año 50000 a.C.

La paradoja de Goodman es una espina en la carne del empirismo inductivista y ha contribuido a fortalecer la conciencia filosófica de la importancia de la formación de conceptos en la organización de la experiencia. Hay quien ha propuesto cuantificar el talento filosófico de las personas en proporción inversa a la aversión que les inspira la paradoja de Goodman.

paradoja de los cuervos (A. *Paradoxie der Raaben*, F. *paradoxe des corbeaus*, I. *raven paradox*). Escribamos Cx por 'x es un cuervo', Nx por 'x es negro'. Entonces, $\forall x(Cx \Rightarrow Nx)$ dice que 'todos los cuervos son negros'. Parece sensato sostener, con Nicod (1930), que esta generalización es confirmada por la observación de un cuervo negro, esto es, un objeto particular a tal que $Ca \wedge Na$. Del mismo modo, la generalización $\forall x(\neg Nx \Rightarrow \neg Cx)$ quedaría confirmada por la observación de un objeto particular b tal que $\neg Nb \wedge \neg Cb$; por ejemplo, un zapato rojo. Ahora bien, $\forall x(\neg Nx \Rightarrow \neg Cx)$ si y solo si $\forall x(Cx \Rightarrow Nx)$. Por lo tanto, todo lo que confirma la primera generalización confirma también, en la misma medida, la segunda. Según esto, la observación de un solo zapato rojo confirma el enunciado 'todos los cuervos son negros'. Esta *paradoja de los cuervos*, propuesta por Hempel (1945), in-

dignó a muchos e hizo correr ríos de tinta, aunque cuesta trabajo tomarla en serio. De hecho, la mera observación de un cuervo negro ni siquiera sugiere que lo son todos. Solo una muestra representativa de los cuervos del mundo, que sea negra sin excepción, podría darle peso a $\forall x(Cx \Rightarrow Nx)$. El mismo peso se lo daría, por cierto, una muestra representativa de todas las cosas del Universo que no son negras, si esa muestra no contiene ni un solo cuervo. Como tales cosas abundan más y son bastante más variadas que los cuervos, una muestra adecuada de estos es, claro está, mucho más fácil de reunir que una de aquellas.

paradoja de los mellizos (A. *Paradoxie der Zwillinge*, F. *paradoxe des jumeaux*, I. *twin paradox*). Sean Juan y Diego dos mellizos idénticos nacidos en el año 2000. Al cumplir un año, embarcan a Diego en una nave espacial, mientras que Juan permanece en la Tierra. La nave se aleja de nuestro planeta en línea recta a velocidad constante igual a 0,9 veces la velocidad de la luz c. En el año 2041 del calendario terrestre, la nave da marcha atrás y regresa a la misma velocidad (en sentido opuesto). Los mellizos se reúnen en la Tierra en 2081. Si la geometría del Universo en las regiones que han recorrido durante estos años se ajusta bien a la teoría especial de la RELATIVIDAD, entonces, necesariamente, al momento de reunirse Juan estará cumpliendo los 81 años y Diego solamente 41. Si, como es razonable suponer, los relojes biológicos que marcan el envejecimiento de las personas funcionan aproximadamente en sincronía con los relojes atómicos, la diferencia de edad entre Juan y Diego será obvia para todos. Esta predicción de la teoría especial de la relatividad ha sido confirmada experimentalmente con relojes atómicos. Con todo, algunos autores la han considerado paradójica porque, dicen, si el movimiento es relativo, es lícito suponer que es Juan quien se aleja y luego retorna a velocidad constante igual a $0{,}9c$, mientras Diego lo espera en reposo. En tal caso, ¿no sería Diego quien vive 81 años en el lapso en que Juan cumple 41? Esta objeción presupone una simetría que la situación no exhibe. Para mayor simplicidad supongamos que Juan reposa durante esos 80 años, no en un planeta que gira alrededor del Sol, sino en un genuino MARCO DE REFERENCIA inercial $\mathfrak{R}$. Diego, por su parte, habrá reposado en *dos* sistemas inerciales que se mueven respecto a $\mathfrak{R}$ con velocidad constante $\mathbf{v}$ y $-\mathbf{v}$, respectivamente ($|\mathbf{v}| = 0{,}9c$). En tal caso, según la teoría especial de la relatividad, si designamos la separación de los mellizos con A y su reunión con B, la COSMOLÍNEA de Juan entre ambos eventos es la recta espaciotemporal AB, pero la cosmolínea de Diego consta de los dos trazos rectos AC y CB, donde C es el evento en que la nave cambia de rumbo. La suma de los trazos AC y CB es demostrablemente igual a la mitad del trazo AB, de acuerdo con la MÉTRICA DE MINKOWSKI.

paradoja de Russell (A. *Russellsche Antinomie*, F. *Paradoxe de Russell*, I. *Russell's paradox*). Paradoja de la teoría lógica de las clases descubierta por Zermelo en 1900 y un año más tarde, independientemente, por Russell, quien la publicó. Ha solido considerársela como una paradoja de la teoría de conjuntos debido a la confusión —propagada por Russell pero no compartida por Cantor ni Zermelo— del concepto cantoriano de conjunto con el concepto fregeano de CLASE (o EXTENSIÓN de un concepto). La fundamentación lógica de la aritmética por Frege se basaba en el supuesto de que para cada propiedad o condición $\varphi(x)$, expresable en el lenguaje, existe la clase de todas las cosas que tienen esa propiedad o cumplen esa condición. Sucumbiendo a la confusión señalada, dicha clase se representa con el mismo símbolo que el conjunto de todos los x que cumplen la condición $\varphi(x)$, a saber, $\{x : \varphi(x)\}$. Naturalmente, los objetos de esta clase satisfacen la condición que la define, $\forall z(z \in \{x : \varphi(x)\} \Leftrightarrow \varphi(z))$; donde alentamos la confusión utilizando el símbolo $\in$ para significar la pertenencia a una clase fregeana. Ciertamente hay clases que no se pertenecen a sí mismas, esto es, clases x tales que $x \notin x$; por ejemplo, la clase todas las moscas no es una mosca. Russell se preguntó por la clase de todas las clases que cumplen esa condición, la clase $r = \{x : x \notin x\}$ de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas. La suposición de que esta clase existe produce inmediatamente una contradicción. En efecto, $\forall z(z \in \{x : x \notin x\} \Leftrightarrow z \notin z)$. Puesto que $\{x : x \notin x\} = r$, tenemos que $\forall z(z \in r \Leftrightarrow z \notin z)$. Lo que vale para todo z vale en especial para r. Por tanto, $r \in r \Leftrightarrow r \notin r$, lo cual es una contradicción. Zermelo resolvió la paradoja evitando que en su teoría axiomática de conjuntos existiera r. Von Neumann la resolvió estipulando que r es una clase pero no un conjunto —de modo que es lo que él llama una CLASE ÚLTIMA, de la que se puede hablar, pero que no puede ser miembro de una clase. De hecho, si se adopta el AXIOMA DE REGULARIDAD, ningún conjunto es elemento de sí mismo, por lo que $r = V$, es decir, r es la clase universal, que es la clase última por antonomasia.

paradoja de San Petersburgo (A. *Sankt Petersburgsche Paradoxie*, F. *paradoxe de Saint Petersbourg*, I. *Saint Petersburg paradox*). Un casino ofrece el siguiente juego de azar: el crupier arroja una o más veces un dado hasta que sale un número par; si esto ocurre en la n-ésima jugada, el banco paga 2^n euros a cada jugador. ¿Cuánto hay que apostar para que el juego sea equitativo, esto es, para que la expectativa de ganancia del jugador sea exactamente igual a la del banco? Si el dado está bien balanceado y el crupier no hace trampas, la probabilidad p_n de que salga un número impar en las primeras $n - 1$ jugadas y un número par en la enésima es igual a 2^{-n}; como el premio del jugador, en ese caso, es $u_n = 2^n$, su expectativa de ganancia $E(J)$ al comienzo del juego está dada por:

$$E(J) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

Sin embargo, nadie en su sano juicio pagaría ni mil euros por el derecho a participar en este juego. El desacuerdo enorme que existe en este caso entre la expectativa que se deduce rigurosamente del CÁLCULO DE PROBABILIDADES y la estimación normal de las personas es la *paradoja de San Petersburgo*. Para resolverla se adujo, entre otras cosas, que la utilidad del dinero decrece al aumentar su cantidad (una idea que más tarde inspiró la institución de los impuestos progresivos). También se ha alegado que la resistencia a hacer apuestas mayores en un juego como este se debería a que ningún banco del mundo podría pagar el premio si, digamos, $n \geq 100$.

paradoja de Skolem (A. *Skolemsches Paradoxon*, F. *paradoxe de Skolem*, I. *Skolem paradox*). Cuando pensamos intuitivamente en la teoría de conjuntos, suponemos que el universo conjuntista constituye una realización innumerable de la teoría, con conjuntos de cualquier cardinalidad. Por ejemplo, la teoría habla del conjunto ω de los números naturales u ordinales finitos, que tiene cardinalidad infinita numerable, $\aleph_0$. Pero $\wp\omega$ ya tiene cardinalidad innumerable, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Según avanzamos en la serie $\wp\omega$, $\wp\wp\omega$, $\wp\wp\wp\omega$, etc., vamos obteniendo conjuntos de cardinalidades innumerables cada vez mayores. El universo conjuntista, que contiene todos estos conjuntos, no puede ser menor que ellos, no puede ser numerable. Sin embargo, esto que ocurre en la realización estándar o pretendida en la que pensamos intuitivamente no tiene por qué ocurrir en toda realización posible. De hecho, no ocurre en ciertos modelos no estándar.

Por el TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM, si la teoría axiomática de conjuntos, por ejemplo ZFC, es consistente, entonces tiene realizaciones numerables, modelos no estándar cuyo universo es numerable. Consideremos una tal realización numerable $\langle M,E \rangle$. En tal realización habrá un conjunto de los números reales, por ejemplo, R_M, y podremos probar desde dentro que ese conjunto es "innumerable" (en el sentido de esa interpretación), pues esa realización es tan pequeña que en ella no existe ninguna biyección entre ese conjunto y el de los números naturales N_M. Sin embargo, mirando la realización desde fuera, desde otra realización más grande, podremos constatar que sí que hay una biyección entre R_M y N_M, solo que esta biyección es un conjunto que no pertenece a la pequeña realización $\langle M,E \rangle$, aunque sí a la más grande desde la que lo consideramos. Esta situación constituye la *paradoja de Skolem*, así llamada por haber sido Skolem el primero en ponerla de manifiesto. Aunque resulta sorprendente de entrada y puede incluso parecer contradictoria a primera vista, de hecho no lo es, como enseguida muestra una consideración más

cuidadosa. Varios de los mayores avances de la lógica se han llevado a cabo en la sutil frontera de alguna paradoja, bordeando la contradicción, pero sin caer en ella. De hecho, el método del FORCING, introducido por Cohen en 1963, parte siempre de una realización numerable de los axiomas de la teoría de conjuntos, convirtiendo así la paradoja de Skolem en el punto de partida indispensable de la técnica conjuntista más fecunda de las últimas décadas.

paradoja del mentiroso (A. *Lügner-Paradoxie*, F. *paradoxe du menteur*, I. *liar's paradox*). Si alguien declara:

Estoy mintiendo (1)

asevera un enunciado que es verdadero si y solo si es falso. Por lo tanto, si postulamos que toda aseveración formulada en correcto castellano es verdadera o falsa, existe a lo menos una, a saber, la aseveración del enunciado (1), que es falsa y verdadera a la vez, en violación flagrante del principio de no contradicción. Esta es la *paradoja del mentiroso*, en su forma más simple.

Si revocamos el postulado antedicho y admitimos que hay aseveraciones correctamente formuladas que llamaremos *neutras*, las cuales, por la razón que sea, no poseen ninguno de los dos valores veritativos nombrados, la paradoja del mentiroso puede reconstruirse en una forma más docta, partiendo de la declaración:

Estoy aseverando un enunciado que es falso o neutro (2)

Evidentemente, si (2) es falso, es verdadero; si (2) es neutro, es verdadero, y si (2) es verdadero, es falso o neutro. Por lo tanto, existe a lo menos una aseveración que es verdadera si y solo si es falsa o neutra. Esta consecuencia viola o bien el principio de no contradicción, válido bajo el nuevo régimen para las aseveraciones que no son neutras, o bien la definición de 'aseveración neutra', según la cual no es posible que estas sean verdaderas. (De hecho, esta definición da lugar a otra versión simple, aunque docta, del *mentiroso*, a partir de la declaración: "Estoy haciendo una aseveración neutra"; esta es verdadera si y solo si es neutra y viola, por tanto, la definición de neutro.)

Podría objetarse que —contra todas las apariencias— los enunciados (1) y (2) no son gramaticalmente correctos, pues se refieren a sí mismos. Pero aunque aceptemos el dictamen filosófico que prohíbe la autorreferencia, el *mentiroso* levanta nuevamente la cabeza. Considérense las declaraciones siguientes:

La aseveración (4), impresa en la próxima línea, es falsa o neutra (3)

La aseveración (3), impresa en la línea anterior, es verdadera (4)

Las premisas (3) y (4) implican la conjunción de (3) y (4), la cual no se refiere a sí misma y genera, sin embargo, la misma dificultad que (2).

La *paradoja del mentiroso*, descubierta por Eubúlides de Mileto (s. IV a.C.), fue trasmitida por Cicerón y san Pablo. En el siglo XX se la reconoció como la más simple e importante de las paradojas semánticas de la lógica. Invocándola se demuestra el TEOREMA DE INDEFINIBILIDAD DE TARSKI, en virtud del cual no es posible definir en un lenguaje formal $\mathcal{L}$ el predicado 'x es verdad en $\mathcal{L}$' (con la variable libre x sustituible por una expresión de $\mathcal{L}$ que designe una sentencia de $\mathcal{L}$). Según Tarski y sus seguidores, esto implica (i) que para hablar de la verdad en un lenguaje dado hay que utilizar un METALENGUAJE diferente de aquel y (ii) que el lenguaje natural, que no respeta esta norma, es incoherente y por tanto inapropiado para la expresión del pensamiento científico. Como la conclusión (ii) es una paradoja tanto o más insoportable que la del *mentiroso*, Kripke (1975), Herzberger (1982), Gupta (1982), Barwise y Etchemendy (1987), McGee (1990) y otros autores se han aplicado a buscar un modo de salir de esta sin caer en aquella. Tales esfuerzos hallan un respaldo poderoso en el hecho siguiente: todo el discurso humano, científico o no —y esto incluye los trabajos de Tarski—, se ha conducido hasta hoy en lenguajes naturales, sin que la *paradoja del mentiroso* jamás haya sido percibida como un peligro para su coherencia.

paradojas de Zenón (A. *zenonische Paradoxien*, F. *paradoxes de Zénon*, I. *Zeno's paradoxes*). Argumentos propuestos por Zenón de Elea (s. V a.C.) para reducir al absurdo la pluralidad y el movimiento, cuya realidad había negado su maestro Parménides. Todavía en el siglo XX las paradojas del movimiento de Zenón interesaban a los filósofos de la ciencia (Grünbaum, 1967; Salmon, 1970). Son cuatro:

1. *El estadio* (o *el corredor*). El corredor no completa nunca la carrera, pues en cualquier etapa de la misma tiene que recorrer primero la mitad de lo que le falta para llegar a la meta. En esta versión, que es la trasmitida por Aristóteles, este argumento no se distingue esencialmente del próximo. Pero se le puede dar un giro más radical: el corredor no logra salir del punto de partida, pues antes de cubrir la distancia más mínima tendría que haber recorrido ya la mitad de esa distancia.
2. *Aquiles y la tortuga.* Aquiles corre diez veces más rápido que la tortuga y le concede cien pasos de ventaja. No la alcanza jamás, pues cuando Aquiles ha recorrido los cien pasos, la tortuga aún le lleva diez

de ventaja; cuando logra cubrir esos diez, la tortuga le aventaja en uno; cuando da ese paso, la tortuga va un décimo de paso más adelante; etc.

Estos argumentos no bastan para establecer la imposibilidad del movimiento, pues cabe alegar que existen distancias mínimas, átomos de longitud, que no tienen mitades y que Aquiles o el corredor del estadio recorren, por lo tanto, de una sola vez. Contra esta hipótesis, empero, hay otro argumento de Zenón:

3. *El estadio* otra vez (o *los carros*). Dos carros de carrera *A* y *B* corren a la misma velocidad ante la tribuna *T*, en direcciones paralelas y opuestas. Sean *a* un punto de *A*, b_1 y b_2 puntos de *B*, t_1 y t_2 puntos de *T*, situados todos a la misma distancia del suelo y de modo que los segmentos rectos b_1b_2 y t_1t_2 sean paralelos a la dirección de *B* (y de *A*) y tengan ambos la longitud mínima indivisible. Supongamos que en un instante dado b_1, b_2, t_2 y t_1 ocupan los vértices de un rectángulo y que en ese mismo instante el punto *a* está alineado con b_1 y t_1. En tal caso, cuando *a* llegue a estar alineado con b_2 (esto es, cuando se encuentre sobre la perpendicular a b_1b_2 levantada sobre b_2), estará alineado también con el punto medio de t_1t_2. Pero esto es absurdo, si t_1t_2 es un átomo de distancia y, por ende, no tiene mitad.

Parecería, entonces, que para que distintos cuerpos puedan moverse en distintas direcciones las distancias tienen que ser infinitamente divisibles, en cuyo caso la posibilidad del movimiento se estrella contra los argumentos 1 y 2. Según algunos autores recientes la fuerza de dichos argumentos radica en esto: Aquiles y el corredor anónimo del estadio tienen que completar infinitas tareas sucesivas en un lapso de tiempo finito, lo cual sería imposible. Sin embargo, como ya observó el propio Aristóteles, ambos atletas tienen todo el tiempo que les hace falta para completar sus infinitas tareas, puesto que estas son cada vez más breves y por ello demandan fracciones cada vez menores del tiempo finito a su disposición. En efecto, si el corredor recorre holgadamente en 20 segundos la mitad del estadio, le basta con 10 para recorrer la cuarta parte, con 5 para recorrer 1/8 y, en general, con $40/2^n$ segundos para recorrer $1/2^n$ de la distancia total. Ahora bien, no es necesario invocar la teoría moderna de las series convergentes para persuadirse de que el lapso que forman un intervalo de 40/2 segundos seguido inmediatamente por otro de $40/2^2$ segundos, seguido inmediatamente por otro de $40/2^3$ segundos, y así sucesivamente —en una secuencia donde, para todo entero positivo *n*, un inter-

valo de $40/2^{n+1}$ segundos sigue inmediatamente a otro de $40/2^n$—, dura menos de un minuto.

La cuarta paradoja de Zenón —que tradicionalmente se presenta antes que los carros— tiene otro alcance y otra fuerza que las demás.

4. *La flecha.* Una flecha vuela por el aire entre el arco y el blanco. ¿En qué momento se mueve? En cada instante la flecha *está* en un lugar determinado del trayecto y no en otro. ¿Cuándo *pasa* de uno a otro?

Suele decirse que *la flecha*, al igual que *los carros*, presupone la atomicidad del espacio; pero no es obvio que sea así. Aunque el trayecto de la flecha sea un continuo infinitamente divisible, en un instante dado sus dos extremos estarán precisamente en dos puntos y el resto de la flecha estará entre ellos. Lo que Zenón alega, como buen discípulo de Parménides, es que si la flecha está *ahí*, ahí es donde *está*, ese es su presente modo de *ser* y, por ende, en ese instante no *cambia* de posición. Como lo mismo se puede decir de *cada instante*, la flecha *nunca* se mueve. Aristóteles resolvía el problema con su distingo entre dos modos de ser: en acto y en potencia. Aunque la flecha esté en acto donde está, en potencia está más allá, y el movimiento es justamente el acto del ser (o estar) en potencia, en cuanto tal. Para los padres de la física moderna esto es un galimatías, pero reconocen al movimiento mismo como un estado en que el móvil puede hallarse actualmente, aunque ocupe en este mismo momento un lugar determinado. La VELOCIDAD de cada punto P del móvil en cada instante puede representarse entonces mediante un vector asociado al punto del espacio donde P se encuentra en ese instante. Otro vector asociado al mismo punto del espacio puede representar a su vez la ACELERACIÓN instantánea de P; este vector difiere de 0 solo si la velocidad de P está cambiando en ese instante. A la luz de estas ideas pierde también su fuerza la versión más radical y poderosa del argumento 1 propuesta arriba.

parámetro (A. *Parameter*, F. *paramètre*, I. *parameter*). Término utilizado en lógica y matemáticas en varias acepciones, que son fácilmente reconocibles por el contexto.

a. *En lógica.*

En el lenguaje formal de una teoría de primer orden hay constantes lógicas, parámetros y variables. Los *parámetros* son los nombres o constantes individuales, los functores o signos de función y los predicados o signos de relación. Aunque las constantes lógicas y las variables son comunes a todas las teorías de primer orden, los parámetros son distintos y peculiares de cada teoría particular. De hecho, son los parámetros de una teoría los que determi-

nan la extensión de su lenguaje (el conjunto de las fórmulas construibles con esos parámetros) y su tipo de semejanza o signatura, que es el mismo que el tipo de semejanza de los sistemas sobre los que la teoría puede ser interpretada. Las constantes lógicas (conectores, cuantificadores y signo de identidad) significan siempre lo mismo, con independencia del sistema sobre el que interpretemos la teoría. Los parámetros y las variables ligadas conservan un significado fijo en todas las interpretaciones sobre el mismo sistema, pero cambian de significado al cambiar de sistema. Las variables libres, finalmente, varían de significado con cada interpretación.

b. *En matemáticas.*

En geometría analítica plana, se especifica una figura mediante una ecuación $y = f(x)$, que expresa la ordenada y de cada punto de la figura como función de la respectiva abscisa x. Adoptando un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS apropiado, la ecuación de una cónica cualquiera toma la forma:

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

donde p y ε son constantes características de la cónica en cuestión, ε es la *excentricidad* y p el *parámetro* de esa cónica.

El uso de *parámetro* para designar uno o más números característicos de *cada* figura regida por la ecuación —números que *varían* de figura en figura— se ha hecho extensivo a toda clase de procesos y sistemas gobernados por ecuaciones. Así, llamamos PARÁMETROS DE DENSIDAD, DE DECELERACIÓN, DE HUBBLE, a ciertos números que caracterizan a cada modelo cosmológico que satisface las ecuaciones de Friedmann y varían de modelo en modelo.

En estadística, los *parámetros* de una población son la media μ y la desviación estándar σ.

En geometría diferencial, el *parámetro* de una CURVA $\gamma : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{M}$ (donde $\mathbf{I}$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{M}$ es una VARIEDAD DIFERENCIABLE) es el argumento variable $u \in \mathbf{I}$ del que dependen los valores de γ. Una superficie curva en el espacio euclídeo se define típicamente mediante una función $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (donde U es un abierto conectado de $\mathbb{R}^2$); a cada par $\langle u,v \rangle \in U$ corresponde un punto $\Phi(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v) \rangle$. Los argumentos variables u y v son entonces los *parámetros* de la superficie Φ.

Si un GRUPO DE LIE, en cuanto variedad diferenciable, tiene n dimensiones, se dice que es un grupo de n parámetros; los *parámetros* del grupo son las n coordenadas requeridas para individualizar a cada elemento del mismo.

Últimamente, funcionarios y periodistas han dado en llamar *parámetros* a las condiciones características de estado de cosas —y que habría que cambiar para alterarlo—, aunque no conozcan una ecuación con arreglo a la cual

éste depende de ellas ni un método para asignar valores numéricos a dichos "parámetros".

NOTA. Aunque 'parámetro' proviene del griego, el sustantivo correspondiente no aparece en la literatura matemática de la antigüedad. El verbo παραμετρέω figura ocho veces en los escritos de Claudio Ptolomeo, donde significa simplemente 'medir', o también 'medir una cosa relativamente a otra' (por ejemplo, medir la magnitud de un eclipse solar por la superficie total del disco solar —y no, digamos, por su diámetro).

parámetro de deceleración (A. *Verzögerungsparameter*, F. *paramètre de décélération*, I. *deceleration parameter*). El parámetro de deceleración q cuantifica el ritmo al que la expansión del Universo está siendo frenada por la materia que contiene:

$$q = -\ddot{a}\frac{a}{\dot{a}^2} = \frac{4\pi G\rho_M}{3H^2} - \frac{\Lambda c^2}{3H^2} = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda$$

El parámetro de deceleración es una función del tiempo cósmico, $q = q(t)$. Su valor actual $q_0 = q(t_0)$ indica el ritmo al que se está decelerando (o acelerando, si $q_0 < 0$) la expansión del Universo en nuestra época.

El parámetro de deceleración es, junto con el PARÁMETRO DE DENSIDAD Ω y la CONSTANTE DE HUBBLE, uno de los parámetros fundamentales del modelo cosmológico estándar del *BIG BANG*. En los modelos con CONSTANTE COSMOLÓGICA $\Lambda = 0$, q es redundante, pues $q = \Omega_M/2$. Sin embargo, en los modelos con $\Lambda \neq 0$, la situación es distinta. Λ puede producir una fuerza repulsiva que contrapese y supere la atracción gravitatoria de la materia. En ese caso el parámetro de deceleración q ya no depende de Ω_M. Ω_M siempre es positivo, pero la expansión puede acelerarse, con lo que q sería negativo. Hay indicios de que la expansión del Universo podría estar acelerándose, con lo que q_0 tendría un valor negativo. Si ello llegara a confirmarse, sería más elegante usar directamente un parámetro de aceleración con signo positivo (contrario al de deceleración).

parámetro de densidad (A. *Dichteparameter*, F. *paramètre de densité*, I. *density parameter*). El parámetro de densidad $\Omega = \Omega_{tot}$ indica la razón de la actual densidad de energía total del Universo, $\rho = \rho_{tot} = \rho_M + \rho_\Lambda$, a la DENSIDAD CRÍTICA ρ_{crit}. $\Omega = \rho/\rho_{crit}$. Según que Ω sea mayor, menor o igual que 1, las distintas realizaciones posibles del modelo estándar del *BIG BANG* se clasifican en tres tipos: universos cerrados, abiertos y planos.

Una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Friedmann del modelo estándar es:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_M + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Dividiendo por H^2 obtenemos

$$\frac{8\pi G}{3H^2}\rho_M + \frac{\Lambda c^2}{3H^2} - \frac{kc^2}{a^2 H^2} = 1$$

Definiendo

$$\Omega_M = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_M \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \qquad \Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2 H^2}$$

obtenemos que $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$. $\Omega_{tot} = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k$.

Si el parámetro de densidad total $\Omega_{tot} > 1$, el Universo es foliable en hipersuperficies espacialoides compactas, ortogonales a las cosmolíneas de la materia, y se dice por eso que es un universo *cerrado*. Si $\Omega_{tot} \leq 1$, las hipersuperficies ortogonales a las cosmolíneas de la materia no son compactas y habría que decir que es un universo *abierto*. En la práctica actual, sin embargo, esta designación se reserva para el caso en que $\Omega_{tot} > 1$. Si $\Omega_{tot} = 1$, las hipersuperficies ortogonales a las cosmolíneas de la materia, además de no compactas, son planas (la MÉTRICA RIEMANNIANA inducida en ellas por la MÉTRICA LORENTZIANA del espaciotiempo asigna a cada punto de cada una de ellas la misma curvatura 0), por lo cual se acostumbra a decir que ese universo es *plano*. No conocemos el valor preciso de H y Λ, por lo que el valor del parámetro de densidad ha de ser determinado observacionalmente. Algunos astrónomos favorecen un valor de $\Omega_M \approx 0.35$ y $\Omega_\Lambda \approx 0.65$, lo que haría al Universo plano.

parámetro de Hubble (A. *Hubble-Parameter*, F. *paramètre de Hubble*, I. *Hubble parameter*). Edwin Hubble propuso en 1929 que todas las galaxias que no están ligadas gravitacionalmente entre sí en un sistema rotacional se alejan unas de otras con una velocidad proporcional a la distancia. Esta tesis se refiere al momento cósmico actual, pero puede generalizarse a cualquier momento t del tiempo cósmico: $v = H(t)d$. El factor de proporcionalidad H indica el número con el que hay que multiplicar la distancia propia entre dos galaxias para obtener la velocidad de recesión de cualquiera de ellas respecto a la otra. Este factor va cambiando, pues $H = H(t)$ es una fun-

ción del tiempo. La función H puede definirse en función del factor de escala:

$$H = H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

Cuanto mayor es H en un momento dado, tanto más rápida es la expansión del Universo en ese momento. El valor de H ahora (t_0) es la CONSTANTE DE HUBBLE, $H_0 = H(t_0)$.

paréntesis (A. *Klammern*, F. *parenthèses*, I. *parentheses*). Los paréntesis son signos auxiliares que sirven para desambiguar el alcance de las constantes lógicas o de ciertos parámetros en los términos y las fórmulas de un lenguaje formal. Por ejemplo, '5 – 4 – 3' podría querer significar (5 – 4) – 3 = – 2, o bien 5 – (4 – 3) = 4. Y si escribimos la fórmula proposicional $A \vee B \wedge C$, necesitamos los paréntesis para aclarar si queremos decir $A \vee (B \wedge C)$ o bien $(A \vee B) \wedge C$. De todos modos, los paréntesis son prescindibles, como muestra el sistema de NOTACIÓN POLACA, propuesto por Łukasiewicz.

paridad (A. *Parität*, F. *parité*, I. *parity*). En la literatura física actual, el término designa la transformación del espacio por reflexión respecto a un punto, esto es, la función biyectiva que asigna a cada vector r con origen en ese punto el vector –r. (Vista como transformación de coordenadas o "transformación pasiva", la *paridad* reemplaza un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z orientadas como el pulgar, el índice y el cordial de la mano derecha, respectivamente, con un sistema de coordenadas cartesianas x', y', z' orientadas como el pulgar, el índice y el cordial de la mano izquierda, y viceversa.) El concepto cobró importancia en la física cuántica cuando Wigner mostró en 1927 que la clasificación empíricamente motivada de los niveles atómicos por Laporte se explica naturalmente si las leyes de la mecánica cuántica son invariantes bajo la *paridad*, así entendida. Ello motivó la introducción de un operador de *paridad* P definido sobre el ESPACIO DE HILBERT $\mathcal{H}$ de un sistema mecánico-cuántico por su acción sobre los vectores $|r\rangle$ que forman una base de $\mathcal{H}$: $P|r\rangle = |-r\rangle$. Se demuestra fácilmente que $P^2 = 1_{\mathcal{H}}$, la IDENTIDAD en $\mathcal{H}$, y que P es un OPERADOR LINEAL unitario y autoadjunto, apto para representar un observable. Se demuestra asimismo que P tiene solo dos valores propios, +1 y –1. Por lo tanto, si $|\alpha\rangle$ representa el estado de un objeto O en cuyo espacio de Hilbert puede definirse tal operador P, $P|\alpha\rangle = \pm|\alpha\rangle$. Si $\psi(x) = \langle x|\alpha\rangle$ es la función de onda de O en el estado $|\alpha\rangle$, la función de onda de O en el estado $P|\alpha\rangle$ es $\psi(-x) = \langle -x|\alpha\rangle = \langle Px|\alpha\rangle = \langle x|P\alpha\rangle = \pm\langle x|\alpha\rangle = \pm\psi(x)$, pues P es autoadjunto. Se dice que O tiene *paridad* +1 (o *paridad*

par) si $\psi(-x) = \psi(x)$ y que O tiene *paridad* -1 (o *paridad impar*) si $\psi(-x) = -\psi(x)$. Por ejemplo, el protón y el neutrón tienen paridad par; el pión neutro tiene paridad impar.

Hasta 1956 se dio por descontado que la paridad era una SIMETRÍA fundamental de la naturaleza. Ese año, Lee y Yang mostraron que cierta anomalía observada en las interacciones débiles se eliminaba si dicho supuesto no valía para estas interacciones. Propusieron varios experimentos para poner a prueba su novedosa hipótesis, que muy pronto fue corroborada por Wu (1957). Este descubrimiento causó gran sensación, pues significa que ya en las interacciones débiles entre partículas elementales en el núcleo de los átomos la naturaleza hace, por así decir, un distingo entre izquierda y derecha.

parsec. Unidad de distancia muy utilizada por los astrónomos. 1 *parsec* (pc) es la distancia que existiría entre la Tierra y una estrella cuyo PARALAJE fuese igual a 1″. 1 pc = $3{,}086 \times 10^{16}$ m = 3,262 años-luz. No hay ninguna estrella tan cerca de nosotros. La más cercana, Proxima Centauri, dista 1,31 pc.

partición (A. *Zerlegung*, F. *partition*, I. *partition*). Sea M un conjunto. Una *partición* de M es un subconjunto $\mathfrak{p}$ del conjunto potencia $\wp M$ tal que $\varnothing \notin \mathfrak{p}$ y para cada $x \in M$ hay un y solo un $X \in \mathfrak{p}$ tal que $x \in X$. En otras palabras, una partición de M es una colección de subconjuntos de M no vacíos, disjuntos dos a dos y exhaustivos de M, es decir, cuya unión es igual a M. En especial, una familia finita de conjuntos $\{B_1,\ldots,B_n\}$ es una partición de un conjunto A si y solo si (i) para cada i,j ($1 \leq i \neq j \leq n$): $B_i \cap B_j = \varnothing$ y (ii) $B_1 \cup \ldots \cup B_n = A$.

Toda partición $\mathfrak{p}$ de M determina en M una relación de EQUIVALENCIA $\sim_\mathfrak{p}$ definida del siguiente modo. Para cualesquiera a, $b \in M$, $a \sim_\mathfrak{p} b$ si y solo si hay un $X \in \mathfrak{p}$ tal que $a \in X$ y $b \in X$. A la inversa, toda relación de equivalencia $\sim$ sobre un dominio M induce una partición de M en clases de equivalencia, llamada el *cociente* de A por la relación $\sim$, y simbolizada como $A/\sim$. Este hecho se usa con frecuencia para CLASIFICAR un dominio mediante la previa introducción de una relación de equivalencia.

partícula (A. *Teilchen*, *Partikel*, F. *particle*, I. *particle*). En la MECÁNICA CLÁSICA, una *partícula* es un objeto móvil que posee una MASA invariable y carece de extensión, de modo que en cada instante del tiempo ocupa solo un punto del espacio. Por cierto, tales objetos no existen; pero diversos modelos de la mecánica clásica representan con éxito mediante partículas no solo objetos pequeños, como el cuerpecillo masivo que cuelga de un péndulo, sino también el Sol y sus planetas e incluso las galaxias. En suma, cualquier objeto material cuyo volumen sea desdeñable *en el contexto en que se lo considera*.

La MECÁNICA ESTADÍSTICA deriva la ley característica de un GAS IDEAL del supuesto de que este consta de moléculas inextensas; atribuyendo un radio finito a las moléculas se corrigen esas leyes y se obtienen modelos más realistas del comportamiento de los gases. En la física clásica estas derivaciones presuponen que las partículas obedecen a la estadística de Maxwell-Boltzmann (↗ESTADÍSTICA DE PARTÍCULAS). Este método de contar los estados posibles de un sistema de partículas postula que, si cada objeto de cierto tipo puede hallarse en cualquiera de r estados diferentes, un sistema formado por n objetos de ese tipo puede hallarse en cualquiera de r^n estados diferentes (lo cual se ajusta, obviamente, a la noción de partícula y de objeto material individual propia del sentido común).

Este concepto clásico de partícula pasa a la física actual con importantes modificaciones. Las llamadas PARTÍCULAS ELEMENTALES se caracterizan por la masa respectiva (constante si es referida al marco de referencia inercial instantáneo de la partícula) y generalmente se las trata como carentes de extensión (desde luego, para evitar paradojas si son portadoras de carga eléctrica); aunque, en ciertos contextos, es apropiado atribuirles un radio finito. Pero difieren grandemente de las partículas clásicas en cuanto son FERMIONES o BOSONES, y por tanto les es aplicable la estadística de Fermi-Dirac o la de Bose-Einstein (respectivamente), y no la de Maxwell-Boltzmann.

partícula elemental (A. *Elementarteilchen*, F. *particule élémentaire*, I. *elementary particle*). La materia está formada por constituyentes minúsculos, llamados partículas (es decir, partes pequeñas). Muchas de estas partículas (por ejemplo, los protones) tienen una estructura interna y están formadas por otras partículas todavía menores (en este caso, dos quarks *up* y un quark *down*), que permanecen unidas por alguna fuerza física fundamental (en este caso, la interacción nuclear fuerte). Sin embargo, este análisis tiene un límite: las partículas elementales o mínimas (por ejemplo, los quarks o los electrones), que carecen de estructura interna, no se componen de otras partículas y son como puntos de condensación de la energía de los campos que constituyen la realidad. El MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS considera que las partículas elementales son los quarks, los leptones y los bosones *gauge*.

En una teoría cuántica de campos (como las que componen el modelo estándar) las partículas no son bolitas macizas, como alguien podría imaginarse ingenuamente, sino algo menos intuitivo: los modos normales o cuantos de excitación de los campos. Así, el electrón (un leptón) es el cuanto de excitación del campo electrónico y un fotón (un bosón *gauge*) es el cuanto de excitación del campo electromagnético. En la definición matemáticamente precisa, debida a Wigner (1939), las partículas aparecen meramente como ingredientes en la representación del grupo de Poincaré (un grupo de inva-

riancia espaciotemporal también conocido como grupo inhomogéneo de Lorentz) en el espacio de Hilbert de la mecánica cuántica. Una partícula elemental es una representación proyectiva irreducible del grupo de Poincaré, con masa ≥ 0, energía ≥ 0 y spin entero (0, 1,...) o semientero (½, ¾,...).

periodo (A. *Periode*, F. *période*, I. *period*). El *periodo* T de un fenómeno periódico es la duración de un ciclo completo del fenómeno. T es pues igual a ν^{-1}, el valor recíproco de la FRECUENCIA ν. Si el fenómeno es una ONDA plana que se propaga en el espacio en una dirección determinada, T es obviamente igual al tiempo en que la cresta de la onda avanza una distancia igual a la LONGITUD DE ONDA λ. Por lo tanto, la velocidad de propagación $v = \lambda/T = \lambda\nu$.

permutación (A. *Permutation*, F. *permutation*, I. *permutation*). Sea M un conjunto. Una *permutación* de M es cualquier FUNCIÓN biyectiva de M sobre M. Sea Π_M el conjunto de todas las permutaciones de M. Obviamente la IDENTIDAD $I_M \in \Pi_M$. Si g, $h \in \Pi_M$, también pertenece a Π_M la FUNCIÓN COMPUESTA $h \circ g$ formada aplicando g seguido de h. Es claro, pues, que $\langle \Pi_M, \circ, 1_M \rangle$ es un GRUPO, el *grupo de las permutaciones* de M.

pertenencia (A. *Elementbeziehung*, F. *appartenance*, I. *membership*). La relación de pertenencia es la única noción primitiva de la teoría de conjuntos. Todas las demás se definen en función de ella. Al ser una noción primitiva, no puede definirse en términos de otras nociones; solo puede parafrasearse. Un conjunto es una colección de objetos. Cada uno de esos objetos es un elemento del conjunto o pertenece al conjunto. La pertenencia se simboliza mediante el signo $\in$, que es el único parámetro primitivo del lenguaje formal de la teoría de conjuntos. Si un objeto x pertenece a un conjunto A, escribimos $x \in A$. Aunque en el lenguaje ordinario suelen expresarse indistintamente mediante la cópula 'es', las relaciones de pertenencia, de inclusión y de identidad entre conjuntos son relaciones distintas. Las dos últimas son definibles en función de la primera:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

peso atómico (A. *atomisches Gewicht*, F. *poids atomique*, I. *atomic weight*). Antes del descubrimiento de los ISÓTOPOS se usaba esta expresión para designar lo que ahora se llama la MASA ATÓMICA de un elemento, esto es, el número de gramos de masa contenido en (lo que entonces se definía como) un mol de ese elemento. Pero hoy se la emplea para nombrar un atributo de una

clase de isótopos con el mismo número atómico. Su *peso atómico* es igual al número de gramos de masa que contiene una mezcla de esos isótopos en la proporción en que se encuentran en la naturaleza. Por ejemplo, hay dos isótopos del elemento nº 47, Ag (la plata): ^{107}Ag, con masa atómica 106,905 091, y ^{109}Ag, con masa atómica 108,804 754 6. Una muestra aleatoria de plata contiene aproximadamente un 51,42% del primer isótopo y un 48,58% del segundo. El peso atómico de la plata es 107,868.

platonismo (A. *Platonismus*, F. *platonisme*, I. *Platonism*). Cualquier doctrina filosófica asimilable a las defendidas por Platón en sus cartas o por los personajes que al parecer lo representan en sus diálogos. Si bien los filósofos más influyentes del siglo XX —Dewey, Heidegger, Wittgenstein— fueron marcadamente antiplatónicos, cierta forma de *platonismo* tuvo el vigoroso respaldo de importantes lógicos y matemáticos. Así, Frege (1918/1919) sostuvo que los "pensamientos" —esto es, el sentido de los enunciados— pertenecen a un "tercer reino", distinto del mundo físico de las cosas y el mundo mental de las representaciones, concordando con estas en cuanto no pueden ser percibidos con los sentidos y con aquellas en cuanto no dependen de un sujeto que tenga conciencia de ellos. Por su parte, Gödel (1947) consideraba que "los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de que tengamos individualmente una intuición de ellos"; aunque la intuición matemática no nos dé un conocimiento *inmediato* de ellos, "parece que, tal como en el caso de la experiencia física, *formamos* nuestras ideas de esos objetos sobre la base de otra cosa que nos *es* dada inmediatamente; la cual, en este caso, *no* consiste, o no consiste primariamente, en sensaciones". En este entendido, Gödel se inclinaba a creer que la HIPÓTESIS DEL CONTINUO es objetivamente falsa, a pesar de que él mismo había demostrado su consistencia con los axiomas aceptados de la TEORÍA DE CONJUNTOS.

Esta concepción de los objetos matemáticos suele ser vista con simpatía por los matemáticos. Desde mediados del siglo XX ha tenido asimismo el apoyo de filósofos que piensan con Quine (1948) que al aplicar el CUANTIFICADOR existencial a una variable que recorre un determinado dominio $\mathfrak{D}$ se acepta *ipso facto* la existencia de los objetos de $\mathfrak{D}$, y a la vez entienden que las teorías matemáticas de la física cuantifican así sobre dominios de números y otros objetos matemáticos. Pero otros filósofos de nuestro tiempo rechazan el platonismo, porque, según ellos, atribuye a los objetos matemáticos una existencia impasible e inerte, sustraída al trajín de las cosas mundanas, por lo cual no podrían actuar eficazmente sobre éstas y sobre nosotros y, por ende, no tendrían cómo dársenos a conocer. Curiosamente, de ser así, el platonismo del siglo XX contradiría el criterio de existencia que Platón (*Soph.* 247e) puso en boca de uno de sus portavoces: "Cuanto tenga la facultad de convertir a otro

en lo que sea, o de padecer lo más mínimo bajo lo más insignificante, aunque solo fuese una sola vez, todo eso existe realmente (ὄντως εἶναι)".

polímero (A. *Polymer*, F. *polymère*, I. *polymer*). Macromolécula orgánica constituida por una cadena parcialmente repetitiva cuyos eslabones son moléculas orgánicas más simples, llamadas *monómeros*. La mayor parte de las moléculas de la vida son polímeros. Entre los polímeros se cuentan las PROTEÍNAS (cadenas de AMINOÁCIDOS), los ÁCIDOS NUCLEICOS (compuestos de NUCLEÓTIDOS) y los polisacáridos (formados de monosacáridos). Gran parte de los monómeros que componen los polímeros de la vida en la Tierra parecen ser comunes en el Universo: sus huellas aparecen en el espectro de la luz que atraviesa las grandes nubes de gas y polvo de nuestra galaxia, se han encontrado en los meteoritos carbonáceos caídos en la Tierra y han sido sintetizados en el laboratorio a partir de moléculas muy abundantes en el espacio exterior.

posible (A. *möglich*, F. *possible*, I. *possible*). Si algo es posible, puede ocurrir, es decir, no es seguro que no ocurra. La posibilidad es una modalidad que afecta a proposiciones y puede definirse en función de la necesidad. Sea *P* una proposición. Es *posible* que *P* si y solo si no es NECESARIO que no *P*. En la LÓGICA MODAL la posibilidad se representa mediante un operador ◇ que, aplicado a cualquier fórmula, produce una nueva fórmula. Así, ◇φ se lee: es posible que φ. Lo que no es posible es imposible. Es imposible que *P* si y solo si no es posible que *P*. Es imposible que *P* si y solo si es necesario que no *P*.

positivismo (A. *Positivismus*, F. *positivisme*, I. *positivism*). Vocablo utilizado en primer término para designar las doctrinas expuestas por Comte en su *Curso de filosofía positiva* (1835-1842) y su *Sistema de política positiva* (1851-1854). Se aplica también a las enseñanzas de sus numerosos seguidores y a otras filosofías afines del siglo XIX —como las de J. S. Mill y Mach— y del siglo XX. A veces se llama *positivistas* a pensadores del siglo XVIII, como Turgot y Condorcet, que anticiparon la visión de la historia de Comte, y Hume, maestro de Mill y Mach. Estas son algunas de las tesis más características del *positivismo*: (i) el conocimiento humano concierne solo a hechos singulares constatables por observación y experimentación y a las regularidades que exhiben; preguntar por las esencias o las causas es propio de una etapa inmadura de la evolución de la inteligencia; (ii) el conocimiento así entendido es fuente de predicciones que procuran al hombre cierto grado de control sobre el acontecer natural y también sobre el orden social; (iii) la ciencia social es la base de una ingeniería social, al servicio del bienestar general.

positivismo lógico (A. *logischer Positivismus*, F. *positivisme logique*, I. *logical positivism*). Corriente filosófica iniciada en el Círculo de Viena que se reunía en torno a Schlick desde 1923, aproximadamente, hasta el asesinato de este filósofo en 1936. El nombre se aplica también con mayor o menor propiedad a pensadores afines a esta corriente o influidos por ella, como Reichenbach en Alemania, Ayer en Inglaterra y numerosos filósofos polacos, escandinavos y de otros países. Huyendo del nazismo, algunos de los miembros más notables del movimiento —Carnap, Reichenbach, Feigl, Hempel, Nagel— emigran a los Estados Unidos, donde contribuyen decisivamente a configurar la filosofía de la ciencia como una especialidad profesional. (Por eso, en obras publicadas en ese país se llama a veces "la opinión tradicional" —*the received view*— a la concepción de la ciencia del positivismo lógico.)

Los fundadores del *positivismo lógico* se propusieron fortalecer el POSITIVISMO de Mach con los recursos de la lógica moderna. Tal como Whitehead y Russell (1910-1913) se valieron de la moderna lógica de las clases y las relaciones para supuestamente reducir todos los términos y aseveraciones de las matemáticas a términos y aseveraciones de la lógica, Carnap (1928) recurre a ella para reducir todos los términos y aseveraciones de las ciencias empíricas a términos referentes a las vivencias elementales de un individuo humano y aseveraciones descriptivas del flujo de estas. Aunque reconoce que el discurso científico podría edificarse sobre otras bases, Carnap prefiere remitirlo todo a las vivencias personales porque, según él, esta base es "cognitivamente primaria" en el sentido siguiente: el conocimiento que cada persona tiene de cualquier otra lo obtiene *a través de* sus propias vivencias. Esta elección de base fue duramente criticada por Otto Neurath, partícipe también del Círculo de Viena, quien convenció a Carnap y los otros de que el conocimiento científico debe expresarse en términos cuya aplicación sea controlable por cualquiera. Después de 1930, los principales representantes del positivismo lógico patrocinan la reducción del discurso científico a una base "física", descriptible, en último término, mediante "predicados observables de cosas", cuyo cumplimiento o incumplimiento por un objeto dado pueda ser decidido por cualquiera, en las condiciones apropiadas, tras unas pocas observaciones (↗FISICALISMO). Para marcar este vuelco, recomendaron un cambio de nombre para el movimiento: en vez de *positivismo lógico*, pasaría a llamarse *empirismo lógico*.

En todas sus etapas el *positivismo* o *empirismo lógico* mantiene ciertos rasgos y se ocupa con ciertos temas. La partición kantiana de las proposiciones en *analíticos* y *sintéticos* se considera fundamental, pero se rechaza de plano la posibilidad de proposiciones sintéticas a priori (↗ANALÍTICO/SINTÉTICO). Las proposiciones matemáticas pueden deducirse de definiciones y verdades lógicas y son por ende todas analíticas. El valor informativo de una

proposición analítica es nulo, mientras no se confiera un significado empírico a sus términos, con lo que se vuelve sintética. Un enunciado solo posee un significado empírico si hay un método para determinar mediante observaciones si es o no verdadero (↗VERIFICABILIDAD). Inicialmente, se entendió que ello demandaba la "traducción" de todo enunciado significativo —mediante los recursos de la lógica— o bien a términos descriptivos de vivencias (antes de 1930), o bien a predicados observables de cosas (después de 1930). Obviamente esta exigencia no podía ser satisfecha por enunciados teológicos u otros enunciados metafísicos, que los positivistas lógicos querían descalificar como carentes de sentido. Pero luego se dieron cuenta de que los enunciados más importantes de las teorías físicas generalmente aceptadas tampoco cumplían con ella. La exigencia se fue entonces relajando, y finalmente Carnap (1956) reconoció que algunos términos del vocabulario científico no pueden ser reducidos a "lenguaje observacional"; para satisfacer el "criterio empirista del significado" tendría que bastar entonces con una "interpretación parcial" de las teorías científicas, que vinculase mediante REGLAS DE CORRESPONDENCIA *algunos* de los términos que no son predicados observables a términos que sí lo son (↗TÉRMINOS TEÓRICOS Y OBSERVACIONALES). Otros caracteres permanentes del positivismo lógico son la voluntad de expresar todo el conocimiento científico en un LENGUAJE FORMAL extensional; la concepción intelectualista de la ciencia como una actividad cuya meta es la EXPLICACIÓN del acontecer, asociada con una concepción uniforme —o lo más uniforme posible— de lo que significa 'explicar'; el distingo entre los CONTEXTOS DEL DESCUBRIMIENTO Y DE LA JUSTIFICACIÓN, con énfasis en este último y cierto desdén por la contingencia histórica inherente a aquél; el propósito firme de vindicar la INDUCCIÓN como método de inferencia capaz de confirmar las hipótesis y asegurar el progreso acumulativo del conocimiento científico.

positrón (A. *Positron*, F. *positron*, I. *positron*). La antipartícula del ELECTRÓN. Se trata de un LEPTÓN con la misma masa y spin que el electrón, pero con carga eléctrica opuesta (positiva en vez de negativa). Fue descubierto por Anderson en 1932.

postulado (A. *Postulat*, F. *postulat*, I. *postulate*). Palabra con que se traduce el término αἴτημα ('petición, exigencia'), con que Euclides designa ciertos enunciados que el lector debe consentir —o ciertas tareas cuya factibilidad debe admitir— para que pueda echarse a andar la construcción racional de la geometría. La tradición aristotélica ha buscado convencerse de que las demandas de Euclides reposaban en la evidencia incontrarrestable de tales enunciados o en la ostensible viabilidad de tales tareas, a pesar de que, notoriamente, el POSTULADO DE EUCLIDES por antonomasia, o postulado de las

paralelas, es todo menos evidente. Con la aceptación de la GEOMETRÍA NO EUCLÍDEA y la nueva concepción de lo que es un AXIOMA, se descarta la idea de que los *postulados* de un sistema deductivo tengan que ser evidentes, y también el distingo entre *axiomas* que lo son y *postulados* que no lo son. *Axioma* y *postulado* son ahora sinónimos con que se designa indistintamente a las premisas no demostradas de una teoría axiomatizada. Se los entiende no como verdades incuestionables, sino como determinaciones características de un dominio de inteligibilidad, que es objeto de estudio ya sea solo con fines de análisis conceptual o con vistas a utilizarlo para la representación ("modelado") de un aspecto o fragmento de la realidad.

postulado de Arquímedes (A. *Archimèdisches Postulat*, F. *Postulat d'Archimède*, I. *Archimedean Postulate*). En el libro *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes adopta el siguiente *Supuesto nº 5*: "La mayor de dos líneas —o de dos superficies, o de dos sólidos— desiguales excede a la menor por una cantidad que sumada a sí misma [reiteradamente] puede exceder a cualquier magnitud comparable que se proponga". La matemática moderna concibe esta propiedad arquimediana de modo que se la pueda atribuir a cualquier CUERPO ORDENADO. Sea $\langle K,+,0,\times,1\rangle$ un cuerpo ordenado por la relación <. Escribamos n por $1 + 1 +\ldots+ 1$, donde $1 \in K$ se repite n veces. El cuerpo mencionado es arquimediano si y solo si, para cualesquiera elementos de K, $a > 0$ y $b > 0$, hay un entero positivo n tal que $b < \mathsf{n} \times a$.

postulado de Euclides (A. *Euklidisches Postulat*, F. *Postulat d'Euclide*, I. *Euclidean Postulate*). Por antonomasia, se llama así el postulado V de los *Elementos* de Euclides: "Cuando dos rectas son intersectadas por otra que forma con ellas, en una misma región [del plano], ángulos menores que dos rectos, las dos rectas, prolongadas hasta el infinito, se cortan en la dirección en que están los ángulos menores que dos rectos". Desde antiguo, este postulado pareció menos evidente que los otros cuatro y numerosos matemáticos se esforzaron en deducirlo de éstos (y de las "nociones comunes"). Por último, en el primer tercio del siglo XIX, Gauss, Lobachevsky y Bolyai, independientemente, postularon la negación del postulado V y mostraron que sobre esta base podía construirse una geometría alternativa, que resulta ser tan consistente como la euclídea.

En los textos modernos, el postulado de Euclides se reemplaza con otro equivalente, propuesto por Playfair: "Por un punto fuera de una recta se puede trazar una y solo una paralela a ella". (En el vocabulario de Euclides y Playfair dos rectas son *paralelas* si y solo si no se cortan y yacen ambas sobre un mismo plano.)

potencia (A. *Leistung*, F. *puissance*, I. *power*). Tasa de suministro de ENERGÍA por una fuente energética. Si la energía suministrada es W, la potencia P es igual a dW/dt (la DERIVADA de W con respecto al tiempo t). Según esto, en mecánica clásica la *potencia* de una fuerza fija **F** que ejecuta el TRABAJO W sobre una partícula de masa m y posición **r** es —como debe ser— igual a la tasa de incremento de la energía cinética de la partícula:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2)$$

La unidad internacional de potencia es el WATT (W). Una unidad tradicional, popular entre los ingenieros, es el *caballo de fuerza* (hp, por el inglés *horsepower*). 1 hp = 745,6999 W.

Cuando se habla comúnmente de la *potencia* de un motor o de una central eléctrica, la expresión se refiere a la potencia que suministrarían, ya sea en condiciones normales, ya sea en condiciones óptimas. Es necesario resolver esta ambigüedad antes de hacer comparaciones.

potencial (A. *Potential*, F. *potentiel*, I. *potential*). Sea **V** un CAMPO vectorial que representa un campo de fuerza físico. Si existe un campo escalar Φ tal que **V** es el gradiente de Φ, esto es, si $\mathbf{V} = \nabla\Phi$ (↗NABLA), se dice que Φ representa el *potencial* del que se deriva el campo de fuerza representado por **V**. Si c es una función constante sobre el dominio de $\mathbf{V} = \nabla\Phi$, entonces, evidentemente, $\mathbf{V} = \nabla(\Phi+c)$, ya que $\nabla c = 0$. Por lo tanto, el potencial se representa matemáticamente *modulo* una constante y solo son físicamente significativas las *diferencias de potencial*.

El concepto de potencial se introdujo en el siglo XVIII para facilitar el estudio del campo gravitacional —por ejemplo, de un astro— basándolo en un campo escalar. En el siglo XIX, Maxwell observó que podía establecerse una relación análoga entre el campo vectorial **B** representativo del campo magnético y otro campo *vectorial* que simbolizó con **A** y llamó "potencial vectorial de la inducción magnética". En efecto, en virtud de un teorema matemático, tenemos que, para cualquier campo vectorial **V**, $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{V}) = 0$. En virtud de una de las ECUACIONES DE MAXWELL, $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$. Es claro, entonces, que puede postularse la existencia de un campo vectorial **A**, tal que $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Por otra parte, $\nabla\times\nabla\lambda = 0$ para cualquier campo escalar λ. Así pues, $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \nabla\times(\mathbf{A} + \nabla\lambda)$, y el potencial vectorial de la inducción magnética solo puede definirse *modulo* un gradiente $\nabla\lambda$, donde λ, empero, no es enteramente arbitrario, pues debe ajustarse a la selección del potencial electrostático. (Si φ es el potencial electrostático que va con el potencial vectorial **A**, la sustitución de **A** por $\mathbf{A} + \nabla\lambda$ tiene que combinarse con la sustitución de φ

por $\varphi - c^{-1}(\partial\lambda/\partial t)$; esta doble sustitución constituye una *transformación gauge*.) La libertad en la definición del potencial vectorial sugirió la idea de que se trataba de una ficción matemática, introducida por comodidad. Pero el efecto Aharonov-Bohm (1959) puso en evidencia que el potencial vectorial de la electrodinámica clásica representa —dentro de los límites de esta teoría— una realidad física.

En los albores de la teoría general de la RELATIVIDAD, Einstein llamó *potenciales gravitacionales* a los diez campos escalares g_{ik} $(0 \leq i \leq k \leq 3)$ que son los componentes de la métrica del espaciotiempo relativos a la carta (sistema de coordenadas) utilizada. Este uso del vocablo se inspira también en una analogía con su empleo original en la teoría newtoniana de la gravitación, en cuanto los g_{ik} epitomizan toda la información concerniente al campo gravitacional, que en la teoría de Einstein está representado por la CURVATURA espaciotemporal, derivable de la métrica (de un modo que tiene una remota analogía con la derivación del gradiente de un potencial).

potencial electrostático (A. *elektrostatisches Potential*, F. *potentiel electrostatique*, I. *electrostatic potential*). El CAMPO eléctrico **E** puede concebirse como gradiente de un POTENCIAL, el *potencial electrostático* φ. El valor $\varphi(\mathbf{r})$ de φ en un punto dado **r** es igual al trabajo que habría que hacer contra el campo eléctrico **E** para llevar hasta **r** una CARGA ELÉCTRICA de 1 coulomb, desde un punto $\mathbf{r}_0$ donde $\varphi = 0$. Por definición, el valor $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ del campo **E** en **r** es precisamente la fuerza ejercida por el campo sobre una carga de 1 coulomb situada en **r**. Por lo tanto, la diferencia de potencial entre dos puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ está dada por

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = -\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

donde la integral puede evaluarse sobre cualquier curva C que una $\mathbf{r}_1$ con $\mathbf{r}_2$.

Las diferencias de potencial se miden en unidades de energía por unidad de carga; en el SISTEMA INTERNACIONAL se define la unidad llamada *voltio* (V), igual a un joule por coulomb (1 V = 1 J/C).

precesión de los equinoccios (A. *Präzession der Tagundnachtgleichen*, F. *précession des équinoxes*, I. *precession of the equinoxes*). Dos veces al año la noche y el día duran lo mismo sobre toda la superficie terrestre. Son las ocasiones en que la órbita de la Tierra, situada sobre el plano de la eclíptica, cruza el plano ecuatorial. La palabra *equinoccio* designa esos dos días (21 de marzo y 23 de septiembre) y también, por metonimia, los puntos en que la eclíptica intersecta al ecuador celeste. La *precesión de los equinoccios*, des-

cubierta por Hiparco en el siglo III a.C., es el avance secular de estos puntos debido a que el eje de la Tierra cambia continuamente de dirección, relativamente a las estrellas fijas, en virtud del TORQUE generado por la atracción gravitacional simultánea del Sol y la Luna. Los equinoccios retornan a la misma posición cada 25.800 años; por lo tanto, la precesión anual es apenas mayor que 50 segundos de arco.

precesión del perihelio de Mercurio (A. *Merkurperihelbewegung*, F. *précession du périhélie de Mercure*, I. *precession of Mercury's perihelion*). El *perihelio* de un planeta es el punto de la bóveda celeste donde el planeta aparece cuando está más próximo al Sol. El perihelio de cada planeta exhibe una precesión o avance secular debido, ante todo, a la PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS, ya que el origen de las coordenadas astronómicas es el equinoccio de primavera boreal (Primer Punto de Aries, llamado así por la constelación donde se hallaba ese equinoccio en el siglo III a.C.). Descontado este avance, resta una pequeña precesión que la teoría newtoniana de la GRAVITACIÓN explica por la acción perturbadora de los otros planetas. En el caso de Mercurio la precesión de los equinoccios determina un 90% de la precesión observada (56 segundos de arco por año), y la atracción newtoniana de los planetas conocidos da cuenta de un 9,5% adicional. Pero resta una precesión de 43 segundos de arco *por siglo* que no ha podido derivarse de la teoría newtoniana. Esta precesión se deduce con pasmosa exactitud si suponemos que Mercurio es una partícula de prueba en el campo de Schwarzschild determinado por una masa solar (↗SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD). Por eso, la precesión del perihelio de Mercurio se cuenta entre las pruebas clásicas que favorecen a la teoría de la gravitación de Einstein sobre la de Newton. Según las mediciones más recientes, la precesión de los perihelios de Venus y de la Tierra también se ajusta mejor a la teoría de Einstein.

predicción (A. *Voraussehung*, F. *prédiction*, I. *prediction*). Anuncio de un hecho futuro. La *predicción científica* consiste en inferir tal hecho de regularidades conocidas del acontecer y circunstancias dadas. En el caso óptimo, en que las regularidades se expresan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, tienen que estar dadas las condiciones iniciales o de frontera requeridas, respectivamente, para la solución de tales ecuaciones. Entonces la predicción puede ser *cierta*, dentro del margen de error inherente a los datos, y siempre que no se sobrepase el campo de aplicación de las ecuaciones (sin embargo, ↗CAOS). Si la regularidad aducida es de índole estadística, la predicción asigna probabilidades a varios hechos alternativos posibles, pero no es menos cierta por eso, dentro de los límites indicados. Este tipo de inferencia se utiliza también en el anuncio de hechos pretéritos desconocidos

sobre la base de regularidades y condiciones conocidas, que algunos llaman *retrodicción* científica. Como en todo caso la retrodicción precede a la constatación del hecho retrodicho, bien podemos, sin impropiedad, llamarla 'predicción' y ahorrarnos el neologismo.

presión (A. *Druck*, F. *pression*, I. *pressure*). Medida de la FUERZA que actúa sobre una unidad de superficie.

principio antrópico (A. *anthropisches Prinzip*, F. *principe anthropique*, I. *anthropic principle*). En 1974 Brandon Carter introdujo la denominación de "principio antrópico" para referirse a un tipo de razonamiento que trata de explicar rasgos físicos fundamentales del Universo por la existencia de los seres humanos. Distinguió dos variedades de ese tipo de razonamiento: la débil y la fuerte. Aunque la gran mayoría de los físicos han ignorado ambas versiones del principio antrópico, algunos cosmólogos y escritores de divulgación lo han invocado en el curso de sus elucubraciones, sobre todo tras la publicación en 1986 del libro de Barrow y Tipler *The Anthropic Cosmological Principle*, dedicado a propagarlo.

El principio antrópico débil dice que, puesto que hay seres humanos, el Universo debe ser compatible con la existencia de seres humanos. En especial, como los seres humanos constan de átomos de carbono, el Universo debe ser lo suficientemente viejo para haber tenido tiempo de formar átomos de carbono en el interior de las estrellas gigantes rojas y de esparcirlos en el espacio para dar lugar más tarde a planetas que contengan carbono y puedan dar lugar a la vida tal como la conocemos. Además, las constantes fundamentales de la física no pueden tener valores que hagan imposible la formación de átomos de carbono. Aunque el principio antrópico débil es trivialmente cierto, ha sido criticado por no ser un principio científico, ya que no permite explicar ni predecir nada que no supiéramos de antemano, y por no tener nada de específicamente antrópico, ya que vale igual si en lugar de seres humanos hablamos de cucarachas o incluso de piedras.

El principio antrópico fuerte dice que el Universo y las leyes de la física están de algún modo al servicio de la producción de seres humanos, por lo que nuestra existencia sería la explicación de sus características básicas. No es ya solo que el Universo tenga que ser compatible con nosotros (como tiene que serlo con cualquier otra cosa existente), sino que está hecho a *nuestra* medida. El principio antrópico fuerte es una especulación metafísica carente de cualquier base lógica o científica, aunque puede entenderse en un contexto teológico como indicando que el Universo es un instrumento de la voluntad divina para alcanzar su fin de crear hombres. En un contexto laico, el principio antrópico fuerte se ha puesto en relación con la presunta exis-

tencia de una infinidad de universos distintos con leyes físicas diferentes, la mayoría de los cuales serían incompatibles con la vida y entre los cuales nuestra propia existencia seleccionaría este universo, obviamente compatible con ella.

principio cosmológico (A. *kosmologisches Prinzip*, F. *principe cosmologique*, I. *cosmological principle*). Postulado de la homogeneidad espacial del Universo a gran escala. Aunque ya implícito en algunos escritos de Einstein, el principio cosmológico fue explícitamente formulado por primera vez en 1933 por Milne, como uno de los dos axiomas de su teoría (no general-relativista) de la relatividad cinemática: a gran escala, el mundo debe aparecer igual a cualesquiera observadores, con independencia de su posición. El principio cosmológico incluye el postulado de la homogeneidad e isotropía del Universo, que en términos general-relativistas equivale a exigir que el espaciotiempo tenga una MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER, como Walker mostró en 1935. No sabemos si este principio es válido. Aunque a escalas de cúmulos de galaxias es claramente falso, quizás a escalas mucho mayores sea verdadero. Su mayor apoyo empírico estriba en la isotropía de la radiación cósmica de fondo.

principio cosmológico perfecto (A. *vollkommenes kosmologisches Prinzip*, F. *principe cosmologique parfait*, I. *perfect cosmological principle*). Postulado de la homogeneidad no solo espacial, sino también temporal del Universo. A gran escala el Universo sería espacialmente homogéneo e isotrópico y además temporalmente invariable o estacionario. El principio cosmológico perfecto fue introducido explícitamente por Bondi y Gold en 1948. Suponían que solo un universo invariable garantizaba la estabilidad de las leyes de la naturaleza y la repetibilidad de los resultados de los experimentos, base de la ciencia. Este principio sirvió a su vez de hilo conductor al desarrollo del modelo cosmológico del estado estacionario por Bondi, Gold y Hoyle a partir de 1948. Actualmente parece que este principio es falso y que el Universo es dinámico y cambiante en el tiempo.

principio de acción mínima de Maupertuis (A. *Maupertuisches Prinzip der kleinsten Wirkung*, F. *principe de moindre action de Maupertuis*, I. *Maupertuis' principle of least action*). Maupertuis (1744) criticó el PRINCIPIO DEL TIEMPO MÍNIMO DE FERMAT y propuso reemplazarlo con su propio *principio de mínima acción*, del cual se podrían derivar, según él, tanto las leyes de la óptica como las de la mecánica. Cuando la luz se quiebra al pasar de un medio a otro y abandona la línea recta, que la lleva por la ruta más corta, no hay razón para suponer que lo hace en aras de la brevedad del tiempo. "¿Por qué había de preferir el tiempo sobre el espacio?... Elige el camino que tiene una

ventaja muy real. *El camino que sigue es aquel en que la cantidad de acción es mínima.*" En 1746, Maupertuis define la *cantidad de acción* como el producto de la masa de los cuerpos por su velocidad y por el espacio que recorren, y enuncia su principio así: "*Cuando se produce algún cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio es la más pequeña posible*". Esta idea de Maupertuis hallará una expresión más precisa en el PRINCIPIO DE HAMILTON, que comparten la física clásica, la relativista y la cuántica.

No obstante las insinuaciones teleológicas —y aun teológicas— de Maupertuis, el principio de acción mínima no demanda la operación de causas finales ni supone una inteligencia que, conociendo el gasto global requerido por cada una de las vías alternativas disponibles para llevar a cabo cierto cambio, utilice este conocimiento para elegir la que se toma en efecto. Para que la evolución de un sistema físico satisfaga el principio de acción mínima u otro principio variacional pertinente, solo hace falta que cumpla paso a paso, de instante en instante, las ecuaciones diferenciales que expresan las condiciones necesarias y suficientes para que ese principio sea válido.

principio de Arquímedes (A. *Archimedisches Prinzip*, F. *principe d'Archimède*, I. *Archimedes' Principle*). Principio fundamental de la hidrostática. Un cuerpo sólido, sumergido parcial o totalmente en un fluido en reposo en la superficie de la Tierra, experimenta una fuerza dirigida verticalmente hacia arriba. El *principio de Arquímedes* dice que la magnitud de esa fuerza es igual al peso del fluido que el sólido desplaza.

Cuentan que Arquímedes dio con este principio mientras se bañaba. Entusiasmado por el descubrimiento habría salido desnudo a la calle, gritando *Eureka* ("lo he hallado").

principio de correspondencia (A. *Korrespondenzprinzip*, F. *principe de correspondence*, I. *correspondence principle*). Al desarrollar una nueva teoría física cuyo campo de aplicación incluya fenómenos previstos y satisfactoriamente descritos por otra teoría ya existente, hay que cerciorarse de que las predicciones de la nueva teoría respecto a esos fenómenos concuerden con las que hacía la antigua, dentro del margen de error tolerado por esta. Ello queda automáticamente garantizado si las ecuaciones de la teoría propuesta coinciden con las ecuaciones de la teoría preexistente cuando alguna cantidad que figura en aquellas tiende a 0, y esta cantidad es efectivamente desdeñable en las situaciones cubiertas de manera satisfactoria por la antigua teoría. Por ejemplo, todas las ecuaciones de la MECÁNICA RELATIVISTA se convierten en ecuaciones de la MECÁNICA CLÁSICA en el límite $(v/c)^2 \rightarrow 0$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y v es la velocidad del objeto bajo estudio, re-

lativa al marco de referencia inercial adoptado; como, por otra parte, los éxitos experimentales de la mecánica clásica corresponden a situaciones en que v es muchísimo menor que c, se cumple en este caso el requisito antedicho y podemos estar seguros de que las correcciones que la mecánica relativista introduce en la clásica no entrarán en conflicto con los resultados experimentales que respaldaban a esta última.

En la literatura de la filosofía de la ciencia se llama, un tanto pomposamente, *principio de correspondencia* ya sea a la regla heurística obvia descrita al comienzo del párrafo precedente, ya sea al requisito de convergencia enunciado luego y que garantiza su cumplimiento. Esta denominación fue utilizada primero por Niels Bohr para referirse a otra regla mucho más específica —pero cuya justificación implícita era sin duda aquella— que él y sus seguidores aplicaron en la búsqueda de modelos para explicar las LÍNEAS ESPECTRALES, en la época de la llamada "vieja teoría cuántica" (1913-1925). Bohr (1924) la describe como una "ley de la teoría cuántica" que establece "una *correspondencia* de vasto alcance entre los varios tipos de transiciones posibles entre los estados estacionarios [del átomo], por un lado, y los varios componentes armónicos del movimiento [de los electrones], por otro lado". Esta "ley" asegura que, en los contextos en que la CONSTANTE DE PLANCK h es desdeñable, la teoría cuántica concuerde con la electrodinámica clásica "según la cual la naturaleza de la radiación emitida por un átomo está directamente relacionada con los componentes armónicos que figuran en el movimiento del sistema". Pero Bohr y sus colaboradores la emplearon con gran virtuosismo también en situaciones en que el valor finito de h resulta significativo, como una guía para seleccionar los estados estacionarios del átomo que son físicamente posibles dentro del continuo de estados mecánicamente concebibles. Bohr (1922) insiste en que se trata solo de una "analogía" entre la teoría cuántica y la teoría electromagnética clásica de la radiación y que a "la ley en que aparece esta analogía" la llama *principio de correspondencia* justamente "para prevenir el posible malentendido de que aquí se trata de una conexión directa entre la descripción de los fenómenos según la teoría cuántica y según la electrodinámica clásica".

principio de equivalencia (A. *Äquivalenzprinzip*, F. *principe d'équivalence*, I. *equivalence principle*). Principio adoptado por Einstein (1907) como base para desarrollar una nueva teoría de la gravitación en el contexto de una teoría de la RELATIVIDAD generalizada. Conforme a este principio son *equivalentes* un marco de referencia en reposo en un campo gravitacional uniforme y un marco de referencia sometido a una aceleración constante de magnitud igual y dirección contraria a la de ese campo. En virtud de ello, no es posible determinar mediante experimentos efectuados en el interior de un cubícu-

lo cerrado si éste reposa en un lugar de la Tierra donde la aceleración de gravedad es g, o si se mueve con aceleración constante –g a gran distancia de cualquier fuente de gravitación. Por la misma razón, son también equivalentes un marco de referencia inercial y un marco de referencia que cae libremente en un campo gravitacional uniforme (condición que puede atribuirse con buena aproximación, durante intervalos breves, a una cápsula espacial en órbita alrededor de la Tierra).

Se suele distinguir entre un principio de equivalencia *débil*, implícito ya en el corolario VI de las LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON (1687), que solo sería aplicable a experimentos de mecánica, y el principio de equivalencia *fuerte* de Einstein, de aplicación completamente general. En la literatura más reciente se habla también de un principio de equivalencia *semifuerte* (I. *medium-strong*), válido para todos los fenómenos físicos excepto, precisamente, los gravitacionales.

principio de exclusión de Pauli (A. *Pauli-Prinzip*, F. *principe d'exclusion de Pauli*, I. *Pauli exclusion principle*). Principio introducido por Pauli en 1925 para explicar la distribución de los electrones de los átomos pesados en los diversos niveles de energía. El principio excluye que dos fermiones puedan ocupar el mismo estado cuántico, es decir, dos fermiones no pueden tener todos sus números cuánticos iguales. Por tanto, el principio requiere que los electrones de un átomo ocupen niveles de energía diferentes, en vez de concentrarse todos en el mínimo nivel de energía. En un átomo el mismo nivel de energía solo puede ser ocupado por dos electrones (de spin opuesto, +½ y –½). Además de la estructura electrónica de los átomos, el principio de exclusión de Pauli explica muchas otras cosas, desde que dos objetos no puedan ocupar el mismo volumen hasta la estructura de los metales, las estrellas de neutrones y las enanas blancas.

El principio de exclusión solo se aplica a los fermiones, no a los bosones. Un gran número de bosones puede ocupar el mismo estado cuántico. El que dos fermiones no puedan estar en el mismo estado cuántico determina en gran parte la conducta estadística de grandes números de fermiones. La función de onda de un conjunto de fermiones es antisimétrica, es decir, cambia de signo cada vez que intercambiamos dos fermiones del conjunto. Por tanto, la función de onda sería nula si dos fermiones estuviesen en el mismo estado cuántico. En general, si se intercambian partículas en un sistema cuántico, la nueva función de onda será igual a la inicial (si se trata de bosones) o de signo opuesto a la inicial (si se trata de fermiones). En el caso de un sistema formado por un gran número de partículas iguales a una temperatura dada, la distribución de los niveles de energía es muy distinta si se trata de fermiones (distribución de Fermi-Dirac) o de bosones (distribución de Eins-

tein-Bose). Por debajo de una cierta temperatura crítica, el estado de mínima energía puede ser ocupado por un gran número de bosones (condensación de Bose), lo que explica el fenómeno de la superfluidez.

principio de Hamilton (A. *Hamiltonsches Prinzip*, F. *principe de Hamilton*, I. *Hamilton's principle*). La evolución de un sistema mecánico clásico puede representarse mediante una curva en una variedad diferenciable apropiada (↗ESPACIO DE CONFIGURACIÓN, ESPACIO DE LAS FASES). Dicha curva es una solución de cierto sistema de ecuaciones diferenciales (↗ECUACIONES DE EULER Y LAGRANGE, ECUACIONES DE HAMILTON), de las que se dice por eso que gobiernan la evolución del sistema. Pero esta también puede verse como regida por un principio variacional, que privilegia esa curva entre muchas que llevan desde el punto representativo del inicio hasta el punto representativo del fin de la evolución considerada. Un principio variacional prescribe los términos y la solución de un problema del CÁLCULO DE VARIACIONES: dada una función con valores reales F definida sobre una familia de curvas que unen dos puntos dados, hallar entre estas aquella curva C tal que F(C) es un máximo o un mínimo, esto es, tal que o bien F(C) excede el valor de F correspondiente a cada curva de la familia que sea vecina a C, o bien F(C) es excedido por todos estos valores. El *principio de Hamilton* es el más conocido e importante de los principios variacionales de la mecánica clásica, y desempeña también, *mutatis mutandis*, un papel central en la física contemporánea.

Consideremos un sistema $\mathcal{S}$ de r partículas, cuyas posiciones respectivas están dadas por las coordenadas cartesianas $x_1, \ldots, x_N$, donde $N = 3r$ y x_{3k-2}, x_{3k-1} y x_{3k} son las coordenadas de la k-ésima partícula. Si x_h es una de las tres coordenadas de una determinada partícula, llamamos, respectivamente, X_h y Ξ_h al componente, con respecto a esa coordenada, de la fuerza externa y de la fuerza de ligadura que actúan sobre esa partícula (↗MECÁNICA CLÁSICA). Conforme a las LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON, la evolución de $\mathcal{S}$ está gobernada entonces por el siguiente sistema de N ecuaciones diferenciales:

$$m_h \ddot{x}_h = X_h + \Xi_h \qquad (1 \leq k \leq N) \qquad (1)$$

(donde los puntos sobre x_k indican el número de veces que se toma la derivada de la coordenada x_k con respecto al tiempo). Si las fuerzas de ligadura no realizan ningún trabajo en los desplazamientos virtuales del sistema, las ecuaciones (1) pueden resumirse en una sola ecuación fundamental:

$$\sum_{k=1}^{N} (m_k \ddot{x}_k - X_k)\delta x_k = 0 \qquad (2)$$

La evolución real de $\mathcal{S}$ conforme a la ecuación (2), entre los instantes t_1 y t_2, puede compararse con una evolución alternativa parecida, resultante de aplicar, en cada instante intermedio t, el desplazamiento virtual $x_h(t) \mapsto x_h(t) + \delta x_h(t)$ $(1 \leq h \leq N)$, sujeto a la sola condición de que las N funciones $\delta x_h : t \mapsto \delta x_h(t)$ tengan derivadas continuas de segundo orden. Conviene advertir que, a menos que $\mathcal{S}$ sea un sistema holonómico —esto es, a menos que las restricciones impuestas a las coordenadas de posición por las ligaduras se puedan describir mediante K ecuaciones de la forma $f_r(x_1,\ldots,x_N,t) = \text{const.}$ $(1 \leq r \leq K)$—, la evolución alternativa así definida será por regla general incompatible con las ligaduras y por ende físicamente imposible. Se demuestra fácilmente que la evolución real satisface, en todo caso, la condición siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T + \sum_{k=1}^{N} X_k \delta x_k\right)dt = 0 \tag{3}$$

donde T es la energía cinética de $\mathcal{S}$, esto es,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k^2 \tag{4}$$

La ecuación (3) es la forma más general del principio de Hamilton. Si las fuerzas externas son derivables de un potencial V, (3) puede escribirse así:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt = 0 \tag{5}$$

Si el sistema $\mathcal{S}$ es holonómico, no importa el orden en que se practiquen la integración y la variación, de modo que (5) equivale a:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt = 0 \tag{6}$$

La diferencia $T - V$ entre energía cinética y potencial es el LAGRANGIANO L del sistema. Llegamos así a la forma más común del *principio de Hamilton*, válida en las condiciones señaladas:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{7}$$

En virtud de un teorema del cálculo de variaciones, la evolución de $\mathcal{S}$ cumple la condición (7) si y solo si ella se rige por las ECUACIONES DE EULER Y LAGRANGE.

Gracias a la generalización del concepto de lagrangiano, el alcance del principio de Hamilton se extiende más allá de la mecánica clásica. Adoptando lagrangianos apropiados, es posible derivar de (7) tanto las ECUACIONES DE MAXWELL de la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA como las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN de la RELATIVIDAD general. En la física cuántica de hoy, un procedimiento estándar para la formulación de nuevas teorías consiste en sustituir L en (7) por una función ideada en vista del asunto en cuestión, para luego deducir del principio de Hamilton así reescrito consecuencias contrastables con la experiencia. De este modo, el principio de Hamilton —junto con el concepto de ENERGÍA, implícito en él— ha llegado a ser el lazo más firme entre la física clásica y la contemporánea, y el mejor testimonio de la continuidad de la física.

principio de incertidumbre de Heisenberg (A. *Heisenbergs Unschärferelation*; F. *principe d'incertitude de Heisenberg*, *relation d'indétermination de Heisenberg*; I. *Heisenberg's uncertainty principle*, *Heisenberg's indeterminacy relation*). Denominación habitual de un teorema que se deduce fácilmente de los principios de la MECÁNICA CUÁNTICA, pero que, por expresar la profunda diferencia entre ella y la MECÁNICA CLÁSICA más palmariamente que estos, ha podido verse como el fundamento en que se basan. Como luego explicaremos, este teorema impone una cota inferior a la dispersión de ciertas cantidades físicas mensurables y así fija límites a la exactitud con que se las puede determinar. El término 'incertidumbre' sugiere que estos límites afectan a nuestra capacidad para conocerlas con precisión, mas no a la determinación objetiva de las cantidades mismas. Esta sugerencia proviene del punto de vista de la mecánica clásica, para la cual las cantidades en cuestión están todo el tiempo determinadas de hecho con precisión total; pero no tiene ningún asidero en los fenómenos que justifican la adopción de la mecánica cuántica y que la clásica es incapaz de prever, describir y explicar. Por eso es preferible hablar —como hacen muchos autores— de una *relación de indeterminación*, más que de un *principio de incertidumbre*.

Sean Q y P dos cantidades físicas observables, representadas en la mecánica cuántica por los OPERADORES LINEALES autoadjuntos Q y P, respectivamente. El *conmutador* de Q y P, simbolizado con [Q,P], es la diferencia QP − PQ, y el *anticonmutador* de Q y P, simbolizado con {Q,P}, es la suma QP + PQ. Según la mecánica cuántica, si se mide el observable Q en una gran colección de sistemas idénticos preparados en un estado representado por el vector normalizado $|\psi\rangle$, entonces el valor medio o *expectativa* de Q está dado por

$$\langle Q \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | Q | \psi \rangle \quad (1)$$

Una excelente medida de la dispersión de los valores medidos de Q alrededor de su expectativa (1) es la raíz cuadrada de la *variancia* de Q, esto es, de la expectativa de $\left(Q-\langle Q\rangle_{|\psi\rangle}\right)^2$. Dicha raíz cuadrada se llama la *dispersión* de Q y se designa con ΔQ_ψ. Enseguida demostraremos que, para cualquier colección de sistemas en un mismo estado $|\psi\rangle$,

$$\Delta Q_\psi \cdot \Delta P_\psi \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle i[Q,P]\right\rangle_{|\psi\rangle}\right| \tag{2}$$

Por lo tanto, el producto $\Delta Q_\psi \cdot \Delta P_\psi$ de las variancias no puede ser menor que la expresión del lado derecho, la cual es necesariamente positiva si los operadores Q y P son inconmutables, esto es, si representan observables incompatibles. En particular, si Q y P son, respectivamente, los análogos mecánico-cuánticos de una coordenada clásica (generalizada) de posición y de la coordenada de momento conjugada con ella, el producto de sus variancias no puede ser menor que $\hbar/2$ (donde $\hbar$ es la CONSTANTE DE PLANCK dividida por 2π).

Para demostrar la desigualdad (2), introducimos los operadores $\Delta Q_\psi = Q - \langle Q\rangle_{|\psi\rangle}$ y $\Delta P_\psi = P - \langle P\rangle_{|\psi\rangle}$. Comprobamos que ΔQ y ΔP son operadores autoadjuntos. Como $\langle Q\rangle_{|\psi\rangle}$ y $\langle P\rangle_{|\psi\rangle}$ son números complejos que conmutan con cualquier operador, tenemos que el conmutador $[\Delta Q_\psi,\Delta P_\psi] = [Q,P]$, cuya expectativa, si difiere de 0, es puramente imaginaria. Por otra parte, el anticonmutador $\{\Delta Q_\psi,\Delta P_\psi\}$ es autoadjunto y, por ende, su expectativa es puramente real. Aplicando la desigualdad de Schwarz (↗PRODUCTO INTERNO) a los vectores $\Delta Q_\psi|\psi\rangle$ y $\Delta P_\psi|\psi\rangle$, se concluye que

$$\langle\psi\,|\,\Delta Q_\psi \Delta Q_\psi\,|\,\psi\rangle\langle\psi\,|\,\Delta P_\psi \Delta P_\psi\,|\,\psi\rangle \geq \left|\langle\psi\,|\,\Delta Q_\psi \Delta P_\psi\,|\,\psi\rangle\right|^2 \tag{3}$$

puesto que ΔQ y ΔP son autoadjuntos. Utilizando la ecuación (1), la desigualdad (3) se reduce a

$$\left\langle \Delta Q_\psi^{\,2}\right\rangle\left\langle \Delta P_\psi^{\,2}\right\rangle \geq \left|\left\langle \Delta Q_\psi \Delta P_\psi\right\rangle\right|^2 \tag{4}$$

Obviamente, $\Delta Q_\psi\Delta P_\psi = ½(\Delta Q_\psi\Delta P_\psi - \Delta P_\psi\Delta Q_\psi + \Delta Q_\psi\Delta P_\psi + \Delta P_\psi\Delta Q_\psi) = ½[\Delta Q_\psi,\Delta P_\psi] + ½\{\Delta Q_\psi,\Delta P_\psi\} = ½[Q,P] + ½\{\Delta Q_\psi,\Delta P_\psi\}$. Por la definición de variancia, es claro que $\left\langle \Delta Q_\psi^{\,2}\right\rangle = (\Delta Q_\psi)^2$ y que $\left\langle \Delta P_\psi^{\,2}\right\rangle = (\Delta P_\psi)^2$. Por lo tanto, (4) implica que

$$\left(\Delta Q_\psi\right)^2\left(\Delta P_\psi\right)^2 \geq ¼\left|\langle[Q,P]\rangle\right|^2 + ¼\left|\langle\{\Delta Q_\psi,\Delta P_\psi\}\rangle\right|^2 \geq ¼\left|\langle[Q,P]\rangle\right|^2 \quad (5)$$

donde la segunda desigualdad resulta de que $\langle\{\Delta Q_\psi,\Delta P_\psi\}\rangle$ es real y su cuadrado no puede ser negativo. La *relación de indeterminación* (2) se infiere inmediatamente de (5) si recordamos que $\langle[Q,P]\rangle$ es puramente imaginario.

La relación de indeterminación se atribuye a Heisenberg, porque fue el primero en señalarla (en 1927). Para hacerla comprensible y aceptable para los físicos de su tiempo, propuso experimentos mentales que, sin embargo, aparte del valor finito asignado a $\hbar$, están concebidos en términos clásicos. Aunque repudiemos este procedimiento didáctico de Heisenberg, cabe siempre adjudicarle la importante relación (o "principio") asociada a su nombre, ya que en todo caso fue el primero que propuso sustituir, en la nueva mecánica, las cantidades conjugadas de la clásica con pares de matrices que no conmutan, las que fueron reconocidas más tarde como representativas de sendos operadores autoadjuntos inconmutables.

principio de inercia (A. *Trägheitsprinzip*, F. *principe d'inertie*, I. *Inertia principle*). Principio fundamental de la mecánica, de acuerdo con el cual *todo cuerpo librado a sí mismo permanece en reposo o se mueve indefinidamente en línea recta a velocidad constante.* Aplicado con alcance local por Galileo, fue adoptado con toda generalidad por Descartes. En los *Principios* de Newton (1687), el *principio de inercia* es el primer axioma o LEY DEL MOVIMIENTO.

Newton sobreentiende que la uniformidad y rectilinearidad características del movimiento inercial de una partícula libre se refieren al espacio y tiempo reales (absolutos); con respecto al espacio relativo de un laboratorio o al tiempo relativo de un reloj, el movimiento inercial puede ser acelerado y curvilíneo. Por otra parte, el mismo Newton reconoce que las partes del espacio absoluto y del tiempo absoluto no pueden percibirse ni distinguirse con los sentidos. Siguiendo a Neumann (1870) y Lange (1885) se le puede dar al principio de inercia un significado controlable, mediante las dos estipulaciones siguientes: 1° se llamará *marco inercial* a un MARCO DE REFERENCIA relativamente al cual tres partículas libres que se mueven en distintas direcciones, no sobre un mismo plano, describen trayectorias rectilíneas; 2° se llamará *reloj inercial* a un fenómeno periódico en cada periodo del cual una de esas partículas libres recorre la misma distancia en el marco inercial. Entonces, la *ley de inercia* puede enunciarse así: relativamente al marco inercial cualquier otra partícula libre permanece en reposo o se mueve en línea recta, recorriendo distancias iguales en tiempos iguales según el reloj inercial.

El principio o ley de inercia es la única ley del movimiento de Newton que es invariante bajo las transformaciones de Lorentz y, por ende, pasa incólume a la teoría especial de la RELATIVIDAD. En la interpretación geométrica de esta teoría, el principio de inercia se formula así: la COSMOLÍNEA de una partícula libre es una GEODÉSICA.

principio de relatividad (A. *Relativitätsprinzip*, F. *Principe de relativité*, I. *Relativity principle*). El corolario V de las LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON establece que *los cuerpos comprendidos dentro de un espacio dado se mueven del mismo modo, relativamente unos a otros, ya sea que ese espacio esté en reposo, ya sea que se mueva uniformemente en línea recta sin rotación*. En virtud de ello no es posible decidir, mediante la observación de fenómenos mecánicos en un laboratorio cerrado, si este laboratorio reposa o se mueve inercialmente a cualquier velocidad. A la luz de la ELECTRODINÁMICA de Maxwell se pudo pensar, a fines del siglo XIX, que esta cuestión podía decidirse mediante la observación de fenómenos electromagnéticos. Motivado por el fracaso de todos los experimentos propuestos para medir la velocidad de la Tierra en el ÉTER, Poincaré (1900) declaró que no creía que observaciones más precisas —de cualquier clase de fenómenos, no solo mecánicos— pudieran nunca revelar otra cosa que movimientos relativos. El 24 de septiembre de 1904 proclamó en St Louis, Missouri, el siguiente *principio de relatividad*: "Las leyes de los fenómenos físicos deben ser las mismas para un observador fijo y para un observador acarreado por un movimiento de traslación uniforme; de suerte que no tenemos y no podemos tener ningún medio de discernir si estamos siendo trasportados o no por un movimiento así". Einstein (1905b) reformuló este principio así: "Las leyes con arreglo a las cuales cambian los estados de los sistemas físicos son independientes de que tales cambios de estado estén referidos a uno o al otro de dos sistemas de coordenadas que se mueven el uno respecto al otro con movimiento uniforme de traslación". La teoría especial de la RELATIVIDAD, derivada de la aserción conjunta de este principio y del principio de la constancia de la velocidad de la luz, conlleva una modificación de las leyes del movimiento de Newton (↗MECÁNICA RELATIVISTA).

El principio de relatividad restringido a los fenómenos mecánicos suele atribuirse a Galileo —y no a Newton, como sería más justo— debido a una confusión. Galileo (1632) se refiere en un famoso pasaje a la imposibilidad de establecer mediante la observación de movimientos dentro de una sala cerrada de un barco, si este reposa o se mueve uniformemente; pero otros pasajes de su obra indican que el movimiento uniforme de que habla Galileo es movimiento circular, con velocidad angular constante, sobre la superficie curva de la Tierra.

principio del tiempo mínimo de Fermat (A. *Fermatsches Prinzip der kleinsten Zeit*, F. *principe de Fermat*, I. *Fermat's principle of least time*). Fermat derivó la REFRACCIÓN de la luz "del principio, tan común y tan bien establecido, según el cual la Naturaleza siempre actúa del modo más breve". Un rayo de luz cambia de dirección al pasar de un medio a otro porque la luz se propaga de tal forma que el tiempo total invertido en ir del punto *A* en que el rayo se emite al punto *B* donde se recibe sea menor que el requerido para ir de *A* a *B* por cualquier camino adyacente. No siendo la misma la velocidad de trasmisión de la luz a través de los distintos medios, su viaje se organiza de modo que dure lo menos posible. El principio de Fermat es el primero de la serie de los grandes principios variacionales de la física moderna (↗CÁLCULO DE VARIACIONES, PRINCIPIO DE ACCIÓN MÍNIMA DE MAUPERTUIS, PRINCIPIO DE HAMILTON).

probabilidad (A. *Wahrscheinlichkeit*, F. *probabilité*, I. *probability*). Concepto métrico, creado inicialmente para evaluar riesgos y lograr equidad en los contratos aleatorios (apuestas, seguros, rentas vitalicias) y que ha llegado a ser un componente principal del pensamiento humano casi en todos los campos: científico, agrícola, médico, industrial, comercial, político, etc. Aunque hay indicios de su presencia en la Edad Media (e incluso, según algunos, en la literatura clásica de la India), el concepto métrico de *probabilidad* no está claramente documentado antes del siglo XVII, cuando Pascal, Huygens y Jacques Bernoulli inventan métodos matemáticos para inferir probabilidades de otras probabilidades dadas o postuladas. Aunque hay consenso casi total sobre la caracterización axiomática de las relaciones entre probabilidades en que se basan tales inferencias (↗CÁLCULO DE PROBABILIDADES), la interpretación que debe darse a los axiomas, esto es, la índole misma de aquello que llamamos *probabilidad* ha sido y sigue siendo muy debatida. Bosquejamos a continuación las principales alternativas propuestas.

La definición de Laplace. Según Laplace (1795), la probabilidad de un evento es el cociente entre el número de casos "igualmente posibles" favorables a ese evento y el total de todos los casos igualmente posibles. Para que esta definición no sea circular, hay que adoptar 'igualmente posible' o 'equiprobable' como término primitivo. La equiprobabilidad es manifiesta y se explica por sí misma en las situaciones aleatorias donde hay simetría entre los varios desenlaces posibles. Pero en la mayoría de las situaciones reales no hay simetría, y además hay casos en que la presencia de distintas simetrías funda asertos de equiprobabilidad incompatibles (↗PARADOJA DE BERTRAND).

Probabilidad como frecuencia límite. Esta concepción, formulada inicialmente por Cournot (1843), identifica la probabilidad de un evento con la fre-

cuencia relativa con que se presentan, *a la larga*, eventos como ese entre los eventos de su clase. De acuerdo con la formulación rigurosa de Richard von Mises (1928, 1931), solo cabe atribuir probabilidad a un evento en cuanto este pertenece a un *colectivo*, esto es, una larga serie de observaciones tal que (1) la frecuencia relativa del evento en cuestión en el total de observaciones convergirá a un límite determinado si las observaciones continúan indefinidamente y (2) dicho límite no varía si solo se considera una subsecuencia de la serie, elegida teniendo en cuenta únicamente la posición de las observaciones en esta. El límite en cuestión es *la probabilidad del evento considerado dentro del colectivo dado*. Si tal límite no existe, no tiene sentido atribuir una probabilidad al evento.

Probabilidad como grado de confianza. Si la probabilidad no es sino el límite a que converge la frecuencia relativa en una secuencia infinita o, a lo menos, la fracción a que se acerca en una secuencia larguísima; si *no tiene sentido hablar de la probabilidad de un hecho singular*, ¿qué queda de la probabilidad *como guía de la vida*? Consideraciones como esta han favorecido el auge de la interpretación "subjetivista" o "personalista" de la probabilidad propuesta por de Finetti (1931) y Ramsey (1931). Según de Finetti, una aseveración objetiva es *verdadera* o *falsa*, mas no *probable*. La probabilidad es un atributo de nuestras opiniones subjetivas sobre aquellos asuntos acerca de los cuales no podemos o no queremos hacer una aseveración objetiva. El valor numérico de las probabilidades mide el grado de confianza que cada opinión inspira, ahora y aquí, a quien la profesa. A la probabilidad así concebida, de Finetti dio en llamarla *previsión*. La previsión del sujeto *X* sobre la ocurrencia del evento *E* es la cantidad *p* de euros que *X* está dispuesto a apostar a cambio de la seguridad de recibir 1 euro si ocurre *E*. Aunque dependen del arbitrio y del juicio de cada uno, las previsiones están sujetas a una importante condición restrictiva: so pena de incoherencia, no puedo asignar a mis previsiones un valor tal que, si me comprometo a apostar según ellas, perderé dinero pase lo que pase. Ahora bien, para que este requisito se cumpla, mis previsiones tienen que satisfacer los axiomas **P1-P4** del CÁLCULO DE PROBABILIDADES. Aunque las previsiones de cada sujeto son por cierto subjetivas, en un importante género de casos las previsiones de sujetos coherentes tenderían al acuerdo intersubjetivo, en virtud del teorema de representación demostrado por de Finetti (1930).

Probabilidad como propensión. Aunque muchos estadísticos y filósofos favorecen la concepción personalista de las probabilidades, los físicos —con raras excepciones— exigen una interpretación objetiva y se adhieren en general a una versión más o menos laxa del frecuentismo. Sin embargo, Popper (1957) abandonó el frecuentismo cuando la reflexión sobre la MECÁNICA

CUÁNTICA lo persuadió de que las probabilidades tienen que ser físicamente reales, no solo en cuanto influyen sobre los resultados experimentales, sino porque en ciertos casos incluso interfieren, o sea, interactúan unas con otras. Propuso entonces entender la probabilidad como una propiedad de las instalaciones experimentales. Toda instalación experimental es capaz de producir secuencias de resultados en que la frecuencia relativa de tal o cual tipo de resultado depende de la particular configuración del experimento. Para Popper, las probabilidades "caracterizan la disposición o propensión de la instalación experimental a dar lugar a ciertas frecuencias características cuando el experimento se repite a menudo".

> NOTA: Para información sumaria sobre el concepto de *probabilidad* como *relación lógica* entre enunciados, ↗INDUCCIÓN.

probabilidad condicional (A. *bedingte Wahrscheinlichkeit,* F. *probabilité conditionnelle*, I. *conditional probability*). Sea $\langle \Omega, \mathcal{B}, \mathrm{p} \rangle$ un *espacio de probabilidad* (↗CÁLCULO DE PROBABILIDADES). Si A es un evento tal que $\mathrm{p}(A) > 0$, la *probabilidad condicional* del evento B, dado A, se define así:

$$\mathrm{p}(B \mid A) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(A)}$$

problema cuántico de la medición (A. *Quantenmessungsproblem*, F. *problème quantique de la mesure*, I. *quantum measurement problem*). Problema que suscita el intento de concebir conforme a la MECÁNICA CUÁNTICA los procesos de medición empleados para confirmar esta teoría. La dificultad consiste en que, al parecer, después de interactuar con un sistema cuántico de acuerdo con la ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER, un aparato de medir no puede normalmente quedar en un estado cuántico en que las cantidades físicas observables en él posean valores determinados. Ello contrasta con el hecho familiar de que —salvo en casos muy especiales— cada equipo de laboratorio normalmente exhibe valores precisos (dentro del margen de error admisible de las observaciones) de todas las cantidades fenoménicas que cabe atribuirle.

Consideremos un ejemplo esquemático ideal. Supongamos que se trata de medir, en un sistema cuántico S, preparado en el estado que representa el vector normalizado $|\psi\rangle$, el valor de la cantidad X, representada por el operador X sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_S$ del sistema S, tal que X admite n valores propios diferentes $x_1, \ldots, x_n$, correspondientes a n vectores propios normalizados ortogonales $|\xi_1\rangle, \ldots, |\xi_n\rangle$. Medimos la cantidad X haciendo que S interactúe con un aparato de medida apropiado M cuyos estados se representan mediante vectores del espacio $\mathcal{H}_M$. Supongamos que la interacción no destruye

el sistema S y que si la medición se repite sin dilación se obtiene un segundo resultado idéntico al primero. Para que tenga sentido hablar de "medición", el estado de M después de la interacción debe reflejar inequívocamente el valor de la cantidad A atribuible a S. Para eso, debe haber un operador autoadjunto Y sobre $\mathcal{H}_M$, cuyos vectores y valores propios corresponden biunívocamente a los vectores y valores propios de X. Sea $|\eta_k\rangle$ el vector correspondiente a $|\xi_k\rangle$, y sea $Y|\eta_k\rangle = y_k|\eta_k\rangle$. Llamemos $|\eta_0\rangle$ al estado inicial de M. La interacción entre S y M se representa mediante la evolución en el espacio $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ del vector $|\psi\rangle \otimes |\eta_0\rangle$ durante un lapso de tiempo t, que suponemos brevísimo. Si esa evolución está gobernada por la ecuación de Schrödinger, el estado final del sistema combinado $S+M$ al cabo del tiempo t es el resultado de aplicar un operador lineal unitario U_t al estado inicial $|\psi\rangle \otimes |\eta_0\rangle$. En el caso especial en que S se encuentra en un estado propio de X —en que, digamos, $|\psi\rangle = |\xi_k\rangle$—, tenemos que suponer que

$$U_t(|\psi\rangle \otimes |\eta_0\rangle) = U_t(|\xi_k\rangle \otimes |\eta_0\rangle) = |\xi_k\rangle \otimes |\eta_k\rangle \qquad (1)$$

para que el dial del aparato M después de la interacción exhiba el valor y_k correspondiente al valor x_k asociado al estado que, por hipótesis, hemos asignado a S. Por lo tanto, en el caso general en que S no se halla un estado propio de X —de modo que $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k\rangle\langle\xi_k|\psi\rangle$, una combinación lineal no trivial de los estados propios de X—, tendremos que

$$U_t(|\psi\rangle \otimes |\eta_0\rangle) = U_t\left(\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k\rangle\langle\xi_k|\psi\rangle\right) \otimes |\eta_0\rangle\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle\xi_k|\psi\rangle \left(|\xi_k\rangle \otimes |\eta_k\rangle\right) \qquad (2)$$

Debido al carácter lineal de U_t, el sistema $S+M$ sale de la interacción en un estado que es una superposición inextricable de estados propios del operador $X \otimes Y = X \otimes 1_M + 1_S \otimes Y$, sobre el espacio $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$; donde 1_M y 1_S designan respectivamente el operador identidad sobre $\mathcal{H}_M$ y $\mathcal{H}_S$. Dicho estado es un estado "puro", representable mediante un vector normalizado del espacio $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$, como en (2), o mediante un operador de densidad con TRAZA igual a 1 (↗MECÁNICA CUÁNTICA). A partir de este último es posible computar operadores de densidad con traza menor que 1, que representan los estados de S y de M cuando $S+M$ está en el estado (2). En particular, el operador de densidad $W_{M,t}$ representativo de M después de la medición puede expresarse mediante la siguiente combinación lineal o superposición de proyectores (↗OPERADOR LINEAL):

$$W_{M,t} = \sum_{k=1}^{n} |\langle\xi_k|\psi\rangle|^2 P_{|\eta_k\rangle} = \sum_{k=1}^{n} |\langle\xi_k|\psi\rangle|^2 |\eta_k\rangle\langle\eta_k| \qquad (3)$$

donde $|\eta_k\rangle\langle\eta_k|$ proyecta $\mathcal{H}_M$ en el subespacio generado por $|\eta_k\rangle$. Si el estado mixto (3) se entiende como una mezcla estadística de estados, podemos concluir con probabilidad 1 que, en una colección infinita de aparatos de medir iguales a *M* que pasen por el proceso descrito, una fracción del total igual a $|\langle\xi_k|\psi\rangle|^2$ se hallará, al final del proceso, en el estado $|\eta_k\rangle$, correspondiente al valor x_k de la cantidad medida. Sin embargo, como representación del estado físico de un artefacto macroscópico individual, como los utilizados para medir cantidades físicas en los laboratorios, la superposición (3) no tiene sentido.

El *problema cuántico de la medición* ha sido el motor de las llamadas "interpretaciones" de la mecánica cuántica, sobrepuestas a la interpretación primaria en que se basa la serie espectacular de sus confirmaciones. Pero el problema de la medición nunca ha sido óbice para el diseño, ejecución, lectura y utilización de mediciones cuánticas. Más bien, se trata de una dificultad conceptual, alimentada en parte por la idea exorbitante que algunos se hacen de lo que debe y puede rendir una teoría física. Por lo demás, aunque la literatura reciente ofrece modelos mecánico-cuánticos del proceso de medición con tales o cuales instrumentos reales, la mayoría de las contribuciones filosóficas al tema se contenta con esquemas abstractos de la interacción entre "un sistema preparado en un estado $|\psi\rangle$" y un instrumento de medida apropiado cualquiera.

La siguiente lista de interpretaciones propuestas para resolver o disolver el problema cuántico de la medición no es exhaustiva, y las breves indicaciones que se dan sobre ellas están destinadas solamente a identificarlas, y no pretenden ser un descripción satisfactoria de cada una.

1. Confinamiento de la mecánica cuántica al dominio microscópico. La dificultad no surge siquiera si se acepta, con Bohr, que los equipos de laboratorio y la evolución constatable de sus estados durante un experimento tienen que describirse en los términos propios de la mecánica clásica para que la descripción sea comunicable (↗COMPLEMENTARIEDAD).

2. Postulado de proyección. Se distinguen dos modos de evolución cuántica: una general, gobernada por la ecuación de Schrödinger; otra especial, propia de los procesos de medición. Cuando se mide un observable X, con vectores propios $|\xi_1\rangle$, $|\xi_2\rangle$,... en un sistema que se halla en el estado $|\psi\rangle$, la medición proyecta el sistema, con probabilidad $|\langle\xi_k|\psi\rangle|^2$, sobre el subespacio generado por $|\xi_k\rangle$. Este proceso, llamado a veces "colapso de la función de onda", está descrito en el libro de von Neumann (1932, §V.1), pero no parece que este autor viese tal "proyección" o "colapso" como una solución del problema, sino más bien como un evento que cualquier solución aceptable tendría que explicar en términos compatibles con la mecánica cuántica.

3. Variables ocultas. La mecánica cuántica no ofrece una descripción completa de los procesos físicos a los que se aplica; de ahí el carácter probabilístico de sus predicciones. La teoría ignora una parte de las variables de que depende la evolución, bien determinada en todas sus fases, de cada sistema cuántico individual. A la luz del TEOREMA DE BELL es claro, sin embargo, que cualquier teoría que tome en cuenta tales variables "ocultas" solo será compatible con las predicciones bien confirmadas de la mecánica cuántica si —como la propuesta por Bohm (1952)— es una teoría "no local", esto es, una teoría en que el estado global de un sistema extendido en el espacio no es simplemente la conjunción de los estados locales de sus partes.

4. Interpretación estadística. Un vector de estado $|\psi\rangle$ perteneciente a un determinado espacio de Hilbert representa las propiedades estadísticas de un colectivo (*ensemble*) de sistemas preparados del mismo modo. Si representara —como piensan algunos— las propiedades de un sistema individual, la ecuación (2) implicaría que un aparato de medir individual que ha interactuado con él no está, al final de la interacción, en un estado propio del observable Y, correspondiente, digamos, a la aparición de cierto número en el indicador digital del aparato, sino en una superposición de tales estados (↗GATO DE SCHRÖDINGER). Esta dificultad no surge si el vector $|\psi\rangle$ es un objeto matemático que epitomiza las distribuciones de probabilidades de las variables dinámicas de un colectivo de sistemas físicos. Esta interpretación, aceptada en el libro de Gottfried (1966), ha sido desarrollada por Ballentine (1970, 1998).

5. Cambio de lógica. Finkelstein (1962/1963), Putnam (1965, 1969, 1974) y otros ven en el problema de la medición un signo de que la LÓGICA PROPOSICIONAL ordinaria o "clásica" no es aplicable en el dominio cuántico. La LÓGICA CUÁNTICA con que la reemplazan tiene la estructura de un RETÍCULO complementado pero no distributivo, de modo que no constituye un ÁLGEBRA DE BOOLE. Sea q_k la proposición que dice que el sistema $S + M$ está ahora en el estado $|\xi_k\rangle \otimes |\eta_k\rangle$ y p la que dice que su estado actual está dado por la superposición (2), donde $|\langle\xi_k|\psi\rangle|^2 > 0$ para más de un índice k. Con arreglo a la lógica cuántica, $S + M$ satisfaría entonces la conjunción $p \wedge (q_1 \vee \ldots \vee q_n)$, aunque la disyunción $(p \wedge q_1) \vee \ldots \vee (p \wedge q_n)$ es necesariamente falsa.

6. Muchos mundos. El físico Everett (1957, p. 459) dio una respuesta al problema de la medición que citamos literalmente para que no se crea que exageramos: "A través de toda una secuencia de procesos de observación hay solo un sistema físico que representa al observador, y sin embargo no hay un *estado* singular único del observador (esto se desprende de la representación de sistemas en interacción). No obstante, hay una representación en términos de una *superposición*, cada elemento de la cual contiene un estado definido del observador y un estado correspondiente del sistema. Así, con cada sucesiva observación (o interacción) el estado del observador se 'ramifica' en un

número de estados diferentes. Cada rama representa un resultado diferente de la medición y el estado propio *correspondiente* del sistema-objeto. Todas las ramas existen simultáneamente en la superposición al cabo de cualquier secuencia dada de observaciones". A quienes aleguen que no perciben tal ramificación Everett los asimila a los anticopernicanos que decían no sentir el movimiento de la Tierra. B. DeWitt (1971, pp. 222-223) sacó la inescapable conclusión: "Nuestro universo debe verse como constantemente escindiéndose en un número estupendo de ramas, resultantes de las interacciones, análogas a mediciones, entre sus miríadas de componentes. Porque no hay un mecanismo dentro del marco [de la mecánica cuántica] ni, por definición, un ente fuera del Universo que pueda designar qué rama de la magna superposición es el mundo 'real', todas las ramas deben considerarse igualmente reales [...] En la medida en que puede considerársenos simplemente como autómatas, y por ende a la par con los aparatos ordinarios de medir, *las leyes de la mecánica cuántica no permiten que nos sintamos escindidos*".

7. *Interpretaciones modales.* Bajo este nombre genérico se agrupan distintas interpretaciones favorecidas sobre todo por filósofos (van Fraassen, 1972, 1991; Healey, 1989; Bub, 1997, etc.). Se caracterizan porque rompen el llamado "vínculo entre estado propio y valor propio" (*eigenstate-eigenvalue link*), permitiendo que un sistema cuántico posea bien definidamente uno de los valores admisibles de cierta cantidad Q aunque la evolución dinámica bajo la ecuación de Schrödinger no lo haya puesto en el correspondiente estado propio del observable Q.

8. *GRW.* Esta sigla se refiere a la obra de Ghirardi, Rimini y Weber (1986), quienes propusieron modificar la ley que rige la evolución de los sistemas cuánticos de modo que normalmente se ajuste a la ecuación de Schrödinger pero en ciertos casos se aparte de ella. La ley modificada daría cuenta de las dos formas de evolución dinámica mencionadas bajo el número 2, la gobernada por la ecuación de Schrödinger y el llamado "colapso de la función de onda".

9. *Decoherencia.* De un tiempo a esta parte, se presta creciente atención a la destrucción de los efectos cuánticos de interferencia debido a que el sistema en que se producen ($S + M$, en nuestro ejemplo) está acoplado a un entorno cuyo número de grados de libertad es inmenso. Tal "decoherencia" se produce rapidísima e inexorablemente dondequiera hay disipación de energía, esto es, en todos los procesos familiares de laboratorio excepto la propagación de la luz y la llamada superconductividad (que son justamente los dos casos en que se observan fenómenos macroscópicos de interferencia). Aunque falta aún una teoría general de la decoherencia, se la ha señalado como la explicación obvia del hecho de que, no obstante vivir en un mundo cuántico, las cantidades físicas observables en objetos macroscópicos generalmente poseen valores

determinados (Omnès, 1994; cf. Gell-Mann y Hartle, 1993). De paso, ello resuelve el problema de la medición, al menos "para todo propósito práctico" o FAPP (*For All Practical Purposes*), como decía desdeñosamente J. S. Bell.

problema de la parada (A. *Halteproblem*, F. *problème de l'arrêt*, I. *halting problem*). Supongamos que *T* es una MÁQUINA DE TURING en su estado inicial y que *w* es el input o entrada o inscripción (fila de palotes) escrita en su cinta. Siguiendo las instrucciones de su tabla, la máquina va pasando de una configuración a otra. Puede ocurrir que, tras varios pasos o transiciones, la máquina se pare, quedándose escaneando el primer cuadrado vacío de la cinta a la derecha de la única inscripción *f(w)* que hay en la cinta; esa inscripción *f(w)* es el output de *T* para el input *w* y representa el valor que la función *f* asigna al argumento representado por *w*. También puede ocurrir que la máquina siga cambiando de configuración, pasando de un estado a otro, escribiendo y borrando secuencias de palotes en la cinta en un proceso inacabable y no se pare nunca. Que ocurra una cosa o la otra dependerá tanto de la máquina *T* como de la entrada *w*. Dada una máquina de Turing fija *T*, el que, tras recibir como input la palabra *w*, *T* se pare o no tras un número finito de pasos, dependerá generalmente de *w*. Para algunas entradas, llegará a pararse; para otras, no se parará nunca.

Sea *W* el conjunto de las posibles inscripciones o entradas admitidas por la máquina de Turing *T*. El problema de la parada para *T* es el problema de encontrar un algoritmo que, para cada $w \in W$, nos permita decidir de un modo automático y efectivo si, tras recibir *w* como entrada, la máquina *T* se parará o no. Si es posible encontrar tal algoritmo, decimos que el problema de la parada de *T* tiene solución; la solución consiste en ese algoritmo. Si no es posible encontrar tal algoritmo, porque no existe, decimos que el problema de la parada para *T* es insoluble. Aunque el problema de la parada de muchas máquinas de Turing es soluble, Turing probó en 1936 que hay una máquina de Turing cuyo problema de la parada es insoluble. En general, no puede haber una máquina de Turing que resuelva el problema de la parada para cualquier máquina de Turing (codificada mediante el número de Gödel de su tabla). Para cada máquina candidata puede construirse en función suya un contraejemplo de máquina de Turing cuyo problema de la parada no puede solucionar esa máquina. De aquí se sigue que, para cada MÁQUINA UNIVERSAL DE TURING *U*, el problema de la parada de *U* es insoluble. Dicho de otra manera, el conjunto $\{w \in W : U$ se para después de un número finito de pasos tras recibir *w* como input$\}$ es indecidible y la correspondiente función característica es incomputable.

procario (A. *Prokaryot*, F. *procaryote*, I. *prokaryote*). Los seres vivos se dividen fundamentalmente en *procarios* y EUCARIOS. Los procarios son los se-

res vivos más antiguos, pequeños y abundantes. Un procario es un organismo formado por una sola célula procariota, es decir, sin núcleo ni cromosomas. Las bacterias y arqueas son procarios. Los procarios (*Prokarya* en latín científico) también son llamados procariontes o procariotas en castellano.

producto cartesiano (A. *Kartesisches Produkt*, F. *produit cartésien*, I. *Cartesian product*). El *producto cartesiano* $A \times B$ de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los PARES ORDENADOS $\langle a, b\rangle$ que cumplen la doble condición: $a \in A$ y $b \in B$. Si C es un tercer conjunto, $A \times B \times C = (A \times B) \times C$. El producto cartesiano de n conjuntos se define en forma análoga. Como es obvio, también se puede formar el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo: $A \times A = A^2 = \{\langle x,y\rangle: x,y \in A\}$. Repitiendo esta operación dos, tres, . . . , $n-1$ veces, se obtienen los productos cartesianos A^3, A^4,..., A^n.

producto escalar (A. *skalares Produkt*, F. *produit scalaire*, I. *scalar product*). Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real. Un *producto escalar* en $\mathcal{V}$ es una función bilineal $f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, tal que

PE1 $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{w},\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ (f es *simétrica*).
PE2 $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$ para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (f es *no degenerada*).

Si para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $f(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq 0$, con $f(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el producto escalar f es *positivo definido* y, en efecto, un PRODUCTO INTERNO en $\mathcal{V}$.

producto interno (A. *inneres Produkt*, F. *produit interne*, I. *inner product*). Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real o complejo. Un *producto interno* en $\mathcal{V}$ es una FUNCIÓN que asigna a cada par ordenado $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ un escalar $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle$ sujeto a las condiciones enunciadas a continuación. Si el cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$, y $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ son vectores, a y b son escalares, y a^* denota el conjugado complejo de a, entonces:

PI1 $\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle^*$;
PI2 $\langle \mathbf{v}|a\mathbf{w}+b\mathbf{u}\rangle = a\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle + b\langle \mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle$;
PI3 $\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$; de otro modo, $\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle > 0$.

PI1 y **PI2** implican conjuntamente que $\langle a\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = a^*\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$. Si el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$, la regla **PI**. pasa a ser: $\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle$.

La notación aquí utilizada fue introducida por Dirac y resulta especialmente cómoda en las aplicaciones a las teorías cuánticas. En otras áreas de la física y en muchos textos de matemáticas el producto interno de dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se designa con la expresión $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (en vez de $\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$).

Si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial provisto de un producto interno, cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tiene una *longitud* definida por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle}$. En virtud de **PI1**, $\|\mathbf{v}\|$ es necesariamente un número real (aunque el cuerpo de escalares sea $\mathbb{C}$). La distancia entre dos vectores v y w es igual a $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ (donde, como es habitual, hemos escrito v − w por v + −w, esto es, la suma del vector v y el inverso del vector w). La función $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ es obviamente una NORMA en $\mathcal{V}$. Se sobrentiende que $\mathcal{V}$ tiene la topología determinada por esta norma, de modo que, para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y cada $\rho \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\mathbf{u}: \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ y } \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < \rho\}$ es un entorno abierto de v. El producto interno satisface la *desigualdad de Schwarz*: $|\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle| \le \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

Mediante el producto interno, el *ángulo* entre dos vectores **a** y **b** se define así:

$$\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \right)$$

Esta definición se inspira en la medida natural del ángulo entre dos segmentos orientados o "flechas" en el espacio euclídeo, que es en cierto modo el prototipo de los espacios vectoriales. Si **a** y **b** son dos flechas trazadas desde un punto común P y sus magnitudes (según la métrica euclídea) son, respectivamente, $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$, entonces, por la "ley de cosenos", $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por lo tanto, para obtener $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 - 2\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{b}\|^2$ es preciso estipular que

$$\cos \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$$

producto tensorial (A. *Tensorprodukt*, **F.** *produit tensoriel*, **I.** *tensor product*). Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ ESPACIOS VECTORIALES sobre un CUERPO $\mathbb{K}$, de n y m dimensiones, respectivamente. El *producto tensorial* de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ es un espacio vectorial de nm dimensiones sobre $\mathbb{K}$ que llamaremos $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ y que es el codominio de una función inyectiva definida en $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$, la cual asigna a cada par $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$) un vector $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, sujeto a las condiciones siguientes, para todo $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$ y $a \in \mathbb{K}$:

PT1 $\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2$ y $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}$

PT2 $a\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes a\mathbf{w} = a(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$

PT3 Si los conjuntos de vectores $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ y $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ son BASES de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, respectivamente, entonces el conjunto $\{\mathbf{a}_j \otimes \mathbf{b}_k : 1 \le j \le n;\ 1 \le k \le m\}$ es una base de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

El vector $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ es el *producto tensorial* de los vectores v y w.

Si un espacio vectorial $\mathcal{U}$ es el producto tensorial de espacios vectoriales, los vectores de $\mathcal{U}$ se llaman TENSORES. Conviene advertir que no todo tensor de $\mathcal{U}$ es un producto tensorial de vectores; pero obviamente, en virtud de la condición **PT3**, todo tensor de $\mathcal{U}$ es igual a una combinación lineal de productos tensoriales de vectores.

La definición anterior se extiende inductivamente a cualquier número de espacios. Una vez definido el producto tensorial $\mathcal{U} = \mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_r$ de r espacios vectoriales $\mathcal{V}_1,\ldots, \mathcal{V}_r$ ($r > 1$), el producto tensorial de r+1 espacios $\mathcal{V}_1,\ldots, \mathcal{V}_r, \mathcal{V}_{r+1}$ se define simplemente como el producto tensorial de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_{r+1}$:

$$\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_{r+1} = (\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_r) \otimes \mathcal{V}_{r+1}$$

producto vectorial (A. *Vektorprodukt*, F. *produit vectoriel*, I. *vector product*, *cross product*). Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real de tres dimensiones, provisto de PRODUCTO INTERNO. Sean v y w $\in \mathcal{V}$ dos vectores cualesquiera que forman entre ellos el ángulo α y tienen, respectivamente, la magnitud v y w. El producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ de estos vectores es el vector perpendicular a v y a w, cuya magnitud es igual a vw sen α y está dirigido de tal modo que si una persona apunta con el pie derecho en la dirección de v y con el izquierdo en la dirección de w, su cabeza apunte en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Esta definición implica claramente que $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$. Por lo tanto, si $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ para algún escalar k, entonces $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = k(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = -k(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

programa de Erlangen (A. *Erlanger Programme*, F. *programme d'Erlangen*, I. *Erlangen Program*). Felix Klein (1872) propuso un punto de vista unitario para organizar sistemáticamente las múltiples teorías geométricas surgidas en el siglo XIX. Desde este punto de vista, la tarea de una rama de la geometría puede describirse así: *Dada una variedad y un grupo de transformaciones de la variedad, estudiar las configuraciones de la variedad atendiendo a las propiedades y relaciones que no son alteradas por las transformaciones del grupo*. 'Variedad' traduce aquí el término alemán *Mannigfaltigkeit*, que en el siglo XIX solía designar lo que llamamos un CONJUNTO; pero Klein pensaba en algo más específico: "Dadas n variables $x_1, \ldots, x_n$, los ... n-TUPLOS que se forman cuando las variables x independientemente toman todos los valores reales de $-\infty$ a $+\infty$ constituyen lo que llamaremos [...] *una variedad* (*Mannigfaltigkeit*) *de n dimensiones*. Cada n-tuplo $(x_1, \ldots, x_n)$ se llama un *elemento* de la variedad". Sea S una variedad en cualquiera de estas dos acepciones. Una *transformación* de S es una FUNCIÓN biyectiva de S en S, o sea, una PERMUTACIÓN de S. El conjunto T_S de todas las transformaciones de S forma entonces un GRUPO, con la COMPOSICIÓN DE FUNCIONES como operación de gru-

po y la IDENTIDAD como elemento neutro. Si H es un subgrupo de T_S y k designa una propiedad o relación de S, o de sus partes o elementos, que no es afectada por las transformaciones contenidas en H, se dice que k es un invariante del grupo H. Si S es simplemente un conjunto, el único invariante del grupo T_S es la CARDINALIDAD de S; por otra parte, cualquier propiedad o relación imaginable es un invariante del grupo $\{1_S\}$, cuyo solo elemento es la identidad. Si S es la variedad numérica descrita por Klein, S hereda estructura del cuerpo de los números reales (enriquecido con los elementos $+\infty$ y $-\infty$), la cual permite caracterizar los distintos subgrupos de T_S y sus respectivos invariantes. Por ejemplo, el grupo de las transformaciones continuas preserva las propiedades topológicas de S y el grupo de las transformaciones lineales preserva sus propiedades proyectivas.

Aunque el programa de Erlangen tuvo un impacto enorme y contribuyó decisivamente a la clarificación —por Minkowski— del significado y alcance de la teoría especial de la RELATIVIDAD, no es exagerado decir que ya cuando Klein lo propuso su hora había pasado. En efecto, en 1872 hacía cinco años desde la publicación póstuma del texto de 1854 en que Riemann fundó la geometría de las VARIEDADES RIEMANNIANAS, que luego servirá de base a la teoría general de la relatividad. Ahora bien, si $\mathcal{M}$ es una variedad riemanniana con MÉTRICA g, en el caso general hay un solo grupo del cual g es un invariante, a saber, aquel cuyo solo elemento es la identidad $1_{\mathcal{M}}$. Este grupo trivial mal puede caracterizar la estructura determinada por la métrica g.

programa de Hilbert (A. *Hilbertsches Programm*, F. *programme de Hilbert*, I. *Hilbert's program*). Como reacción a la crisis de fundamentos de la matemática desatada por el descubrimiento de las paradojas de la teoría intuitiva de conjuntos, Brouwer y sus discípulos habían decidido renunciar a la matemática clásica, con sus conjuntos infinitos y sus métodos elegantes y arriesgados, profesando en su lugar la ascesis de los conjuntos finitos y los métodos constructivos y seguros, mucho más incómodos. Pocos matemáticos estaban dispuestos a seguirlos. Por otro lado, tampoco podían ignorarse los peligros desvelados por las paradojas. David Hilbert recogió el reto y se propuso conservar toda la incomparable riqueza y fecundidad de la matemática clásica, pero asegurándose de que tal riqueza resultara inofensiva, garantizando su consistencia mediante procedimientos finitarios de prueba sobre los que no cupiera duda alguna. No hacía falta prohibir jugar al juego de la matemática clásica, como pretendía Brouwer. Todo lo que se requería, según Hilbert, era demostrar mediante pruebas reales o finitarias que el juego clásico es consistente y que las pruebas "ideales" o infinitistas de la matemática clásica son meros atajos del pensamiento que no conducen al precipicio de la contradicción.

El programa de Hilbert, expuesto a partir de 1922, se plasmaba en dos tareas: (1) había que formalizar de un modo preciso todas las teorías de la matemática clásica y (2) había que probar por medios finitarios que las teorías así formalizadas son consistentes. Además, había la esperanza de que las teorías matemáticas formalizadas serían completas, decidibles y categóricas y de que, a la larga, todos los problemas matemáticos serían solucionables. Hilbert y sus discípulos, como von Neumann y Bernays, desarrollaron partes del programa relacionadas con la axiomatización y formalización de teorías y con el análisis preciso de la estructura de las teorías así formalizadas (metamatemática) y de los cálculos deductivos admisibles en ellas (teoría de la prueba). La filosofía subyacente al programa recibió el nombre de FORMALISMO, considerado (junto al LOGICISMO y el INTUICIONISMO) como una de las direcciones fundamentales de la FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA de la primera mitad del siglo XX. El segundo TEOREMA DE INCOMPLETUD de Gödel, publicado en 1931, mostró que el programa de Hilbert no era viable. Sin embargo, el inmenso esfuerzo intelectual inspirado por ese programa no fue baldío, sino que sentó las bases del posterior florecimiento de la lógica y la metamatemática.

proposición (A. *Satz*, F. *proposition*, I. *proposition*). Las proferencias orales y las inscripciones sobre papel u otro soporte son objetos físicos directamente observables. Dos proferencias con la misma estructura fonémica expresan la misma oración, es decir, son proferencias de la misma oración. Los gramáticos no se interesan tanto por las proferencias concretas como por las oraciones que expresan. Las oraciones son entidades abstractas, como los números, son las combinaciones lingüísticamente permisibles de los fonemas de una lengua, determinadas tanto por el léxico de esa lengua como por sus reglas gramaticales. Dos proferencias con el mismo significado expresan la misma proposición. Una proposición es el significado de una proferencia o inscripción de una oración declarativa o sentencia. Distintas proferencias de la misma oración pueden tener significados distintos. Así, cuando Ricardo dice "me duele la cabeza", esa proferencia significa que a Ricardo le duele la cabeza; sin embargo, cuando Isabel dice "me duele la cabeza", esa proferencia significa que a Isabel le duele la cabeza. Una puede ser verdadera y la otra falsa. Incluso la misma persona puede expresar proposiciones distintas profiriendo la misma oración en momentos diferentes, por ejemplo, "me duele la cabeza" o "tengo frío". Por eso no se contradice quien dice un día "me duele la cabeza" y dice al día siguiente "no me duele la cabeza", pues el momento de la proferencia introduce una referencia temporal en la proposición expresada. Por el contrario, oraciones distintas (de la misma o diversas lenguas) pueden significar lo mismo: "me duele la cabeza", "tengo dolor de cabeza", "tengo una cefalalgia", "j'ai mal à la tête", "ich habe Kopfschmerzen", "I have a headache".

A los hablantes que no son lingüistas profesionales no les suelen importar las características físicas de las proferencias ni la estructura gramatical de las oraciones que expresan. Lo que les importa es su significado, lo que quieren decir. Sin embargo, la noción de significado no ha sido precisada hasta ahora de un modo satisfactorio. Por eso, decir que una proposición es el significado de una sentencia es una dilucidación provisional e incompleta, mientras no se aclare lo que queremos decir con 'significado'. De hecho, no existe ningún consenso filosófico acerca de lo que sean las proposiciones y ni siquiera sobre si las hay. Muchos autores han seguido a Bolzano y Frege en postular un nivel de proposiciones abstractas o pensamientos objetivos, que serían los significados de las sentencias. Este nivel objetivo e interpersonal, distinto tanto del nivel físico de las proferencias e inscripciones como del nivel psicológico de las experiencias subjetivas o eventos cerebrales, sería necesario para la comunicación, el pensamiento y la ciencia. También se requeriría para dar cuenta de las *actitudes proposicionales*, expresadas por verbos como 'creer', 'dudar', 'esperar', etc. En efecto, parece que diversos hablantes pueden creer lo mismo, y que esa creencia común no es ninguna de las diversas proferencias en que se expresan las diferentes sentencias con las que manifiestan lo que creen, sino algo así como el significado común de esas proferencias, es decir, una proposición. Sin embargo, no han faltado las críticas. Wittgenstein ha reducido la noción de significado a la de uso. Y Quine ha rechazado la noción de significado y las otras nociones que dependen de ella, como las de sinonimia, traducción y proposición.

Sea ello como fuere, las proposiciones, principios, axiomas, teoremas, hipótesis, conjeturas y problemas de que se habla en la ciencia parecen expresar contenidos objetivos de pensamiento, es decir, algo así como proposiciones. Cuando traducimos la argumentación al lenguaje de la LÓGICA DE PRIMER ORDEN, tratamos de representar el contenido proposicional objetivo de lo que decimos más que la fonética o la mera estructura gramatical superficial de las proferencias y oraciones con que lo expresamos.

proteína (A. *Protein*, F. *protéine*, I. *protein*). POLÍMERO compuesto de una secuencia de AMINOÁCIDOS (de entre 20 aminoácidos levógiros característicos). La mayoría de las micromoléculas presentes en los organismos (enzimas, elementos estructurales, anticuerpos, hormonas, etc.) son proteínas. Las proteínas constan de una "columna vertebral" de elementos repetitivos de los aminoácidos, engarzados entre sí mediante enlaces péptidos, y de la consiguiente serie de cadenas laterales distintas. Cada proteína está plegada y doblada de una intrincada forma tridimensional, que le permite llevar a cabo su función catalítica o estructural. Las proteínas se ensamblan en los ribosomas como secuencias lineales de aminoácidos, siguiendo las instrucciones genéticas apor-

tadas por el RNA mensajero. La secuencia lineal unidimensional determina el pliegue tridimensional de la proteína, que a su vez determina sus funciones.

protofísica (A. *Protophysik*, F. *protophysique*, I. *protophysics*). Disciplina a priori que, según la escuela de Erlangen y Constanza, precede y posibilita la física empírica. Lorenzen (1964) se pregunta: "¿Cómo es posible que ciertas fórmulas matemáticas sean leyes de la naturaleza?". Según él, ello solo es posible gracias a la definición operativa de los conceptos físicos fundamentales de *longitud*, *duración*, *velocidad* y *masa*. "Este dominio [...] que contiene los primeros pasos que es preciso dar antes de emprender mediciones físicas" es la *protofísica*. El orden de estos pasos debe respetar la dependencia pragmática de las acciones (entendiéndose que una acción *a* depende pragmáticamente de una acción *b* si *a* solo puede ejecutarse con éxito después que *b* ha sido ejecutada con éxito). La protofísica comprende, en ese orden, la geometría, la cronometría y los conceptos y principios centrales de la mecánica. Lorenzen (1960/1961) subraya que la geometría, como él la entiende, no tiene nada que decir sobre el comportamiento efectivo de cuerpos reales que la física reputa rígidos, sino que *define* más bien las condiciones para que un cuerpo sea considerado rígido. Como Dingler antes que él, Lorenzen puso mucho empeño en demostrar que, para asegurar la objetividad de las mediciones, la geometría tenía que ser euclídea. Cronometría y mecánica han de ser newtonianas.

Ya en 1927 Lipsius usó el término *protofísica* para referirse al programa de fundamentación de la física de Dingler, que inspiró el de Lorenzen. Desde una postura ajena e incluso contraria a la de estos autores, Bunge (1967) propuso llamar protofísica a "una pintoresca colección de principios y teorías no formales pero genéricos e importantes" que todas las teorías físicas comparten sin discusión; incluye aquí el CÁLCULO DE PROBABILIDADES, la cronología, la geometría física, la teoría general de los sistemas y la "dinámica" analítica.

protón (A. *Proton*, F. *proton*, I. *proton*). Partícula de spin ½ con carga eléctrica positiva igual en magnitud a la negativa del electrón. El *protón* siente la interacción nuclear fuerte y está compuesto por dos quarks *up* y un quark *down*, p = (u,d,u). Es un hadrón, fermión y barión. Su masa en reposo es de 1,672 621 58(13) $\times 10^{-27}$ kg o, en unidades de energía, 938,271 998(38) MeV. De hecho, es el más ligero de los bariones y aquel en que todos los demás decaen. Es uno de los constituyentes (junto al neutrón) de los núcleos atómicos. El número de protones del núcleo de un átomo de un elemento químico dado es siempre el mismo y se llama su número atómico. El protón parece ser absolutamente estable, aunque ciertas teorías especulativas de gran unificación postulan su eventual desintegración.

Q

quark (A. *Quark*, F. *quark*, I. *quark*). Partícula elemental con spin ½ y carga eléctrica fraccional (⅔*e* o -⅓*e*) que siente la interacción nuclear fuerte. Por tanto, los quarks son fermiones y hadrones. Los quarks se clasifican en seis "sabores" (*u, d, c, s, t* y *b*, es decir, *up, down, charmed, strange, top* y *bottom*), divididos en tres "generaciones": la primera abarca *u* y *d*; la segunda, *c* y *s*; la tercera, *t* y *b*. Los quarks de la primera generación son los componentes elementales de los protones y neutrones que forman los núcleos de los átomos. Cada uno de los "sabores" puede darse en tres "colores" (*r, g* y *b*, es decir, *red, green* y *blue*), lo cual da lugar a dieciocho tipos de quarks, más otros tantos de antiquarks. Los "sabores" y "colores" de los quarks no tienen nada que ver con el significado ordinario de estas palabras. Los colores son algo así como cargas cromáticas diferentes, por analogía con las cargas eléctricas. En efecto, los colores de los quarks son la fuente de la interacción nuclear fuerte que liga unos quarks con otros dentro de los bariones y de los mesones. Los bariones están formados por tres quarks (o antiquarks), ligados por la interacción fuerte, mientras que los mesones se componen de un quark y un antiquark ligados del mismo modo. Esta ligazón consiste en un intercambio de gluones, que mantienen los hadrones "incoloros" (es decir, formados por quarks de tres colores diferentes o de un color y un anticolor). El "color" o carga cromática de los quarks fue introducido para restaurar la validez del PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI en hadrones como el Ω^-, formado por tres quarks *s*, con idénticos números cuánticos. Esta identidad (prohibida por el principio de Pauli) se elimina mediante la introducción de un nuevo número cuántico (el color) y la asignación de colores distintos a cada uno de esos quarks *s*. Los quarks se atraen con una fuerza proporcional a la distancia, por lo que quedan confinados dentro de los hadrones, sin posibilidad de salir de ellos; es lo que se llama el confinamiento de los quarks. Por el contrario, mientras permanecen muy juntos, apenas sienten la fuerza de los otros (libertad asintótica), como muestra la dispersión de los electrones con los que los bombardeamos.

quintesencia (A. *Quintessenz*, F. *quintessence*, I. *quintessence*). ↗MATERIA OSCURA.

R

radiación (A. *Strahlung*, F. *radiation*, I. *radiation*). Alrededor de 1900 se discutía vigorosamente la índole de una variedad de "rayos" descubiertos hacía poco. ¿Eran genuina radiación (A. *Strahlung*, de *Strahl*, 'rayo'), como la luz y las recientemente descubiertas ondas hertzianas? ¿O se trataba más bien de lluvias de partículas masivas? Hacia 1910 la cuestión estaba resuelta: los rayos catódicos y los rayos β emitidos por los átomos RADIACTIVOS están formados por ELECTRONES; los rayos α, por núcleos de helio; los rayos N no existen; los RAYOS X y los RAYOS γ son perturbaciones ondulatorias del campo electromagnético, como la luz, pero de mucho más alta frecuencia. Desde entonces, el término *radiación* se usa como denominador común de toda energía propagada por esta vía y solo se agrega el adjetivo *electromagnética* en contextos en que sea menester distinguirla de la RADIACIÓN GRAVITACIONAL predicha por la teoría general de la RELATIVIDAD. Con pedante rigor deberíamos tal vez llamar *radiación* a toda energía trasmitida por BOSONES *GAUGE*; pero esta terminología no está difundida.

La radiación electromagnética toma diversas formas con muy distintos efectos: señales de radio y de televisión, rayos infrarrojos, luz, rayos ultravioleta, rayos X, rayos γ. Se distinguen por su respectiva frecuencia ν, la cual determina la magnitud E del FOTÓN o gránulo de energía trasmitido, con arreglo a la fórmula:

$$E = h\nu$$

(donde h es la CONSTANTE DE PLANCK).

radiación del cuerpo negro (A. *natürliche Strahlung*, *Strahlung schwarzer Körper*, F. *rayonnement du corps noir*, I. *black-body radiation*, *thermal radiation*). Kirchhoff (1860) demostró que la energía irradiada por un "cuerpo negro" —esto es, un cuerpo que absorbe toda la radiación que recibe, sin reflejar ninguna parte de ella— no depende de la particular naturaleza del mismo, sino que es una función universal de la temperatura del cuerpo y de la

frecuencia de la radiación. En el último tercio del siglo XIX se buscó una fórmula para esta función, con resultados catastróficos. Partiendo de los principios de la física de la época, que hoy llamamos "clásica", se llegó a la conclusión de que la intensidad u_ν de la radiación emitida a la frecuencia ν y temperatura T tenía que ser directamente proporcional a ν^2 y T:

$$u_\nu = \frac{8\pi k}{c^3}\nu^2 T \qquad (1)$$

donde k es la CONSTANTE DE BOLTZMANN y c es la VELOCIDAD DE LA LUZ en el vacío. Esto implica que a una temperatura dada la energía irradiada aumenta indefinidamente con la frecuencia, de modo que el total emitido a todas las frecuencias posibles vendría a ser infinito. Las mediciones experimentales ciertamente no respaldan esta consecuencia; según ellas, a cada temperatura T, la radiación u_ν alcanza un máximo con cierta frecuencia ν (mayor a mayor temperatura), y disminuye luego a frecuencias más altas. Planck (1900) superó la dificultad mediante la ley que lleva su nombre, la cual se ajustaba a los datos recién obtenidos por Lummer y Pringsheim y ha sido luego corroborada cada vez mejor por la experiencia. Para derivarla, Planck tuvo que sacrificar uno de los supuestos más preciados de la física clásica: la continuidad de la radiación. Como, según el teorema de Kirchhoff, la radiación del cuerpo negro no depende de la constitución de este, Planck propuso un modelo del mismo consistente en una colección de osciladores en MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE, que absorben energía radiante en cantidades discretas, proporcionales a su respectiva frecuencia. La constante de proporcionalidad es la famosa CONSTANTE DE PLANCK h, cuya aparición en la ley de Planck marca el principio de la era *cuántica* en la historia de la física. Usando la misma nomenclatura que en la ecuación (1), la *ley de Planck* puede expresarse así:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1} \qquad (2)$$

radiación gravitacional (A. *gravitationelle Strahlung*, F. *radiation gravitationelle*, I. *gravitational radiation*). Según la teoría general de la RELATIVIDAD, la energía gravitacional es trasmitida por ondas que se propagan en el espacio con la velocidad de la luz. Dicho con más precisión: las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN admiten soluciones en que la métrica espaciotemporal exhibe perturbaciones ondulatorias. Una situación parecida se presenta en todas las otras teorías postnewtonianas de la gravitación. En las teorías cuánticas la energía gravitacional se trasmite en cuantos discretos, llamados *gravitones*.

En 1969 Joseph Weber anunció haber detectado ondas gravitacionales en sus laboratorios. Su detector constaba de muchos péndulos equipados para registrar perturbaciones pequeñísimas. Aunque fatalmente consignaban toda clase de oscilaciones sin interés, Weber pensaba que una perturbación simultánea y bien correlacionada de sus péndulos en dos ciudades diferentes solo podía explicarse por el paso de una onda gravitacional a través de los Estados Unidos. Aunque causaron sensación, sus resultados fueron muy controvertidos y finalmente rechazados, porque no pudieron ser repetidos por otros investigadores y también porque, a la luz de las ideas vigentes sobre la composición del Universo, no era verosímil que hubiese tantas ondas gravitacionales tan intensas como indicaban los datos de Weber. En los últimos años se han iniciado varios proyectos de experimentación —como LIGO y LAGOS, que utilizan interferómetros láser en la superficie de la Tierra y en satélites artificiales— que permitirían detectar ondas gravitacionales mucho más débiles que el equipo de Weber; pero los primeros resultados han sido decepcionantes. Por otra parte, el premio Nobel de física fue otorgado en 1993 a Hulse y Taylor por el descubrimiento e investigación del púlsar binario PSR 1913+16, cuyo período orbital decrece a un ritmo explicable precisamente por la pérdida de energía emitida como radiación gravitacional; la pérdida observada concuerda con la emisión predicha por la teoría general de la relatividad con un error inferior al 1%.

radiactividad (A. *Radioaktivität*, F. *radioactivité*, I. *radioactivity*). Desintegración del núcleo atómico que ocurre espontáneamente en el caso de ciertos isótopos de algunos elementos. Becquerel descubrió el fenómeno accidentalmente en 1896. Las emisiones radiactivas fueron pronto clasificadas en tres tipos, identificados con las letras griegas α, β y γ. Más tarde se comprobó que los "rayos α" consisten en núcleos de helio, los "rayos β" en electrones y los "rayos γ" en radiación electromagnética de alta frecuencia.

La desintegración radiactiva de un núcleo atómico es un proceso aleatorio completamente independiente de factores externos como la temperatura, la presión, el potencial gravitacional o electromagnético. Si N es el número de átomos presentes de un determinado elemento radiactivo, su progresiva disminución con el transcurso del tiempo t se rige por la ecuación diferencial

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \qquad (1)$$

donde $\lambda > 0$ es una constante característica de ese elemento. Sea N_0 el número inicial de átomos y N_t el número de los que aún no se han desintegrado al cabo de un lapso de tiempo t. Integrando la ecuación (1), vemos que

$$-\lambda t = -\lambda\int_0^t dt = \int_0^t N^{-1}dN = \log N_t - \log N_0 = \log(N_t/N_0)$$

de modo que

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (2)$$

Llámase *vida media* del elemento en cuestión el tiempo τ al cabo del cual se habrá desintegrado la mitad de los átomos que había inicialmente. Cada átomo del elemento tiene una probabilidad de 0.5 de desintegrarse dentro de dicho lapso. La vida media se calcula fácilmente reemplazando N_t por 0.5 N_0 al lado izquierdo de la ecuación (2):

$$\tau = \lambda^{-1}\log 2 = 0.693\lambda^{-1}$$

La vida media de los elementos radiactivos conocidos va de 10^{-12} segundos a 10^{15} años.

El descubrimiento de la radiactividad abrió una perspectiva insólita sobre la microestructura de la materia y contribuyó poderosamente a la renovación de la física en el primer cuarto del siglo XX.

radián (A. *Radiant*, F. *radian*, I. *radian*). Unidad internacional de medida angular plana. 1 *radián* (1 rad) es el ángulo plano entre dos radios de un círculo que cortan en la circunferencia del mismo un arco de la misma longitud que el radio.

rango [de un conjunto] (A. *Rang*, F. *rang*, I. *rank*). Según el axioma de regularidad, todos los conjuntos se encuentran en alguno de los escalones de la jerarquía acumulativa definida por recursión transfinita:

$$V(0) = \varnothing$$
$$V(\alpha+1) = \wp V(\alpha)$$
$$V(\lambda) = \sup\{V(\beta): \beta < \lambda\} = \bigcup_{\beta<\lambda} V(\beta)$$

donde α es un ordinal cualquiera y λ es un ordinal límite.

Si un conjunto está en el escalón $V(\alpha)$, entonces está también en todos los escalones sucesivos $V(\beta)$ con $\beta > \alpha$. El rango de un conjunto está determinado por el mínimo escalón en que se encuentra ese conjunto. Por definición, el *rango* de A = el mínimo α tal que $A \in V(\alpha+1)$. Cada conjunto tiene un rango determinado, que indica el lugar de la jerarquía acumulativa en que aparece por primera vez. Para cualquier ordinal α, rango de $\alpha = \alpha$.

rayos catódicos (A. *Kathodenstrahlen*, F. *rayons cathodiques*, I. *cathode rays*). Nombre dado en el siglo XIX al flujo de ELECTRONES que surge del cátodo de un tubo fluorescente que contiene gas a presión muy baja (inferior a 10^{-3} mm de mercurio). La denominación responde al aspecto de hilillo azuloso que presenta a la vista el chorro de electrones y a la opinión, largo tiempo defendida sobre todo en Alemania, de que se trata de una forma de radiación. Los experimentos de J. J. Thomson (1897) convencieron a la comunidad científica de que los llamados *rayos catódicos* consisten en partículas de masa idéntica, portadoras de la misma carga eléctrica negativa. Fue solo muchos años más tarde que Millikan midió el valor de esta carga (publicó su "valor final" en 1917), pero Thomson determinó el cociente entre la masa y la carga de las partículas. Por ello se lo reconoce como el descubridor del ELECTRÓN, la primera PARTÍCULA ELEMENTAL detectada en un laboratorio.

rayos cósmicos (A. *kosmische Strahlung*, F. *rayons cosmiques*, I. *cosmic rays*). Los "rayos" cósmicos son partículas y núcleos atómicos ionizados muy energéticos, procedentes de cualquier lugar del Universo. Los rayos cósmicos llegan a la atmósfera con energías cien millones de veces superiores a las alcanzables en nuestros aceleradores. Chocan con algún átomo del aire y se aniquilan, dando lugar a una cascada de partículas secundarias, que pueden ser captadas por detectores esparcidos sobre la superficie terrestre. No entendemos cómo se forman y no sabemos de dónde vienen, pues es imposible determinar el lugar del que proceden, o el tiempo de su origen, o su energía inicial, ya que suelen ser partículas cargadas eléctricamente, cuyas trayectorias han sido sometidas a todo tipo de distorsiones y dispersiones por los potentes campos magnéticos galácticos que han tenido que atravesar.

rayos gamma (A. *Gamma-Strahlung*, F. *rayons gamma*, I. *gamma rays*). Los rayos gamma son los fotones más energéticos del espectro electromagnético, con longitud de onda menor de 10^{-11} m y con energía superior a 120 keV.

rayos X (A. *Röntgenstrahlen*, F. *rayons X*, I. *X-rays*). Radiación electromagnética con frecuencia entre 3×10^{16} y 3×10^{19} Hz, vale decir, con longitud de onda entre 10^{-8} y 10^{-11} m y fotones con energía entre 120 eV y 120 keV. Röntgen descubrió los rayos X en 1895. Por muchos años se debatió si eran una forma de radiación electromagnética o si se trataba más bien de una emisión de partículas, como en el caso de los RAYOS CATÓDICOS. La primera alternativa fue aceptada generalmente después de 1912, cuando von Laue y sus colaboradores probaron, mediante experimentos con cristales, que los rayos X se difractan. (Esta resolución de una disputa científica da que pensar, si se

tiene presente que 14 años más tarde Davisson y Germer mostrarán, también experimentando con cristales, que los electrones se difractan.)

realismo (A. *Realismus*, F. *réalisme*, I. *realism*). Propiamente, en filosofía habría que llamar *realista* a quien profesa y defiende la realidad de lo real como quiera que lo conciba. Sin embargo, en el curso de la historia ha sido éste un epíteto que se dan a sí mismos los partidarios de la realidad de *cierto tipo* de objetos, cuya existencia independiente es cuestionada por otros, que aquellos tildan peyorativamente de "antirrealistas".

El *realismo* medieval sostenía la realidad de los UNIVERSALES, esto es, de los objetos supuestamente denotados por los sustantivos abstractos (vgr. 'belleza', 'humanidad', 'temperatura'), así como por ciertos sustantivos comunes (vgr. 'reptil', 'esqueleto', 'ola'), en contra del *nominalismo*, para el cual estas palabras no eran sino nombres colectivos de individuos o de propiedades y relaciones concretamente encarnadas en ellos. Entre estos dos extremos se situaba el *conceptualismo*, que reconocía al significado de tales palabras una existencia extralingüística, pero solo en el pensamiento de quienes son capaces de entenderlas.

El *realismo* moderno y contemporáneo concierne más bien a la existencia de las cosas materiales, que el DUALISMO cartesiano reputaba más dudosa que la existencia de la mente y que el IDEALISMO de Berkeley negó de plano, en cuanto no sean percibidas. Donde una persona común se daría por contenta con que las cosas familiares sean más o menos estables y sigan estando disponibles, por ejemplo, cuando despierta o regresa de un viaje, y también para sus hijos, después de su vida, el filósofo realista se desvive por asegurar —por lo menos de palabra— la existencia en sí y por sí de los objetos reconocidos por la física, en épocas y bajo condiciones en que toda vida humana sería físicamente imposible. Haciendo caso omiso de la inestabilidad de la física misma, el REALISTA CIENTÍFICO incluso desdeña el aspecto ostensible de las cosas familiares como un mero revestimiento fenoménico —humanamente condicionado— de la realidad real descrita en las teorías ahora vigentes.

Dummett (1978) llama *realismo* a la tesis —contraria a su propio autoproclamado *antirrealismo*— según la cual todo enunciado referente a lo real tiene uno de los dos valores veritativos, *verdadero* o *falso*. Este *realismo semántico* no es equivalente a la doctrina metafísica descrita en el párrafo anterior, pero suele ir con ella. Combinadas forman la creencia en el mundo *prêt-à-porter* (I. *ready-made world*), bien determinado y listo de una vez para siempre.

Realismo se usa también como sinónimo de PLATONISMO en matemáticas.

realismo científico (A. *wissenschaftlicher Realismus*, F. *réalisme scientifique*, I. *scientific realism*). Doctrina metafísica que atribuye a los entes ajenos a la experiencia ordinaria mencionados por las teorías físicas una existencia independiente de esas teorías y del pensamiento humano que las produce. Sus partidarios argumentan que el éxito de la tecnología basada en tales teorías no puede entenderse a menos que realmente existan los entes que éstas aducen para explicar los fenómenos que dicha tecnología manipula y explota. Por ejemplo, el buen funcionamiento de las trasmisiones de radio y televisión sería incomprensible si no existiesen —aparte de toda praxis y teoría humanas— los campos electromagnéticos variables que la electrodinámica clásica concibe como portadores de esas trasmisiones. Sus adversarios recuerdan el CALÓRICO y el ÉTER, desechados por la física junto con las teorías que los postulaban, y que sin embargo inspiraron utilísimos proyectos de ingeniería (como el mejor diseño de máquinas a vapor a la luz de la obra de Sadi Carnot). Señalan además que la eliminación total de entes que la física dio alguna vez por ciertos no sobreviene más a menudo debido solamente a la inercia lingüística de los físicos, que siguen empleando las mismas palabras para nombrar objetos concebidos de muy distinta manera. Por ejemplo, llaman todavía 'electrón' a la partícula de masa aproximadamente igual a 1/1800 de la del átomo de hidrógeno que forma los rayos catódicos, a pesar de que 'partícula', 'masa', 'átomo' e inclusive 'hidrogeno' están lejos de entenderse hoy del mismo modo que cuando primero se llamó 'electrones' a los objetos que J. J. Thomson identificó como componentes de los rayos catódicos. Los partidarios del realismo científico piensan, claro está, que la DENOTACIÓN de un nombre no depende de su sentido y puede establecerse simplemente mostrando la cosa que se pretende nombrar y mantenerse por tradición oral; pero no es obvio cómo esto pueda aplicarse a objetos que no se tocan ni se ven, sino que se infieren de premisas cuyos términos van cambiando de significado.

realización (A. *Realisierung*, F. *réalisation*, I. *realization*). Una realización de una teoría es un sistema que realiza o incorpora de un modo concreto lo que la teoría dice en abstracto. Para ello y por lo pronto, el sistema ha de ser homólogo al lenguaje $\mathcal{L}$ de la teoría, es decir, ambos han de poseer el mismo tipo de semejanza, es decir, ha de haber una correspondencia entre los parámetros del lenguaje y las entidades del sistema, de tal modo que el sistema contenga tantos individuos distinguidos como nombres individuales tiene $\mathcal{L}$, tantas relaciones como relatores tiene el lenguaje y de aridad correspondiente (si el primer relator del lenguaje es binario, la primera relación del sistema ha de ser binaria, etc.) y tantas funciones como functores tiene $\mathcal{L}$ y de la misma aridad (si el segundo functor del lenguaje es unario, la segunda función del sistema también ha de serlo, etc.). Además, cualquier interpreta-

ción del lenguaje $\mathcal{L}$ sobre el sistema debe satisfacer, cumplir o verificar todos los teoremas de la teoría. Sea T una teoría formulada en el lenguaje $\mathcal{L}$(T). Sea $\mathcal{A}$ un sistema homólogo a $\mathcal{L}$(T) con universo A. $\mathcal{A}$ es una realización de T si y solo si para cada interpretación $\mathfrak{I}$ sobre $\mathcal{A}$ y para cada sentencia $\varphi \in \mathcal{L}(T)$: si $\varphi \in T$, entonces $\mathfrak{I}$ satisface φ. En la literatura de lógica, sobre todo en la llamada teoría de modelos, con frecuencia se usa la palabra modelo' como sinónimo de 'realización'.

recursión transfinita (A. *transfinite Rekursion*, F. *récurrence transfinie*, I. *transfinite recursion*). La recursión ordinal transfinita es el procedimiento que nos permite definir funciones ordinales de un modo análogo a como definimos por recursión funciones de números naturales (↗DEFINICIÓN RECURSIVA).

En 1928 John von Neumann demostró un teorema general de recursión transfinita que justifica las definiciones por recursión de funciones ordinales (funciones definidas para todos los ordinales). Constituye una generalización al ámbito transfinito de la recursión aritmética. En efecto, si queremos definir una función para todos los números naturales, basta con definirla para el 0 y, suponiendo que esté definida para un número natural n cualquiera, definirla para su sucesor $n+1$, haciendo uso (si se requiere) de otra función previamente definida. El teorema de recursión transfinita nos permite definir una función para todos los ordinales, definiéndola para el 0 y, suponiendo que ya esté definida para un ordinal cualquiera α, definiéndola para su sucesor $\alpha+1$, y, suponiendo que ya esté definida para todos los ordinales menores que un ordinal límite λ, definiéndola para λ. (Recuérdese que un ORDINAL LÍMITE es un ordinal que no es el 0 ni el sucesor de otro, es decir, $\lambda \neq \alpha+1$ para todo α.) Este tipo de definiciones se usan constantemente en teoría de conjuntos, pero solo a partir de la prueba de von Neumann tal uso está justificado.

El *teorema de recursión transfinita* de von Neumann puede formularse del siguiente modo (en una teoría de conjuntos con clases propias, como NBG, y usando el signo Ω para la clase propia de los números ordinales y el signo s para la función del sucesor, $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$):

Si $h : \Omega \to \Omega$ es una función de ordinales y $\delta \in \Omega$, entonces existe una función de ordinales $f : \Omega \to \Omega$, unívocamente determinada, tal que

(1)	$f(0) = \delta$	
(2)	$f(s(\beta)) = h(f(\beta))$	para todo ordinal β
(3)	$f(\lambda) = \sup\{f(\gamma) : \gamma<\lambda\} = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\lambda)$	para todo ordinal límite λ

Por tanto, y por ejemplo, podemos definir directamente la adición, multiplicación y exponenciación de ordinales para un ordinal cualquiera α. He aquí la definición de la adición:

(1) $\alpha+0 = \alpha$
(2) $\alpha+s(\beta) = s(\alpha+\beta)$
(3) $\alpha+\lambda = \sup\{\alpha+\gamma : \gamma<\lambda\} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha+\gamma$ para todo ordinal límite λ

Definición de la multiplicación de ordinales:

(1) $\alpha\cdot 0 = \alpha$
(2) $\alpha\cdot s(\beta) = (\alpha\cdot\beta)+\alpha$
(3) $\alpha\cdot \lambda = \sup\{\alpha\cdot\gamma : \gamma<\lambda\} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha\cdot\gamma$ para todo ordinal límite λ

Definición de la exponenciación de ordinales:

(1) $\alpha^0 = 1$
(2) $\alpha^{s(\beta)} = \alpha^{\beta}\cdot\alpha$
(3) $\alpha^{\lambda} = \sup\{\alpha^{\beta} : 0<\beta<\lambda\} = \bigcup_{0<\gamma<\lambda} \alpha^{\gamma}$ para todo ordinal límite λ

Este mismo proceso nos permite definir recursivamente cualquier otra función de ordinales. El teorema de von Neumann nos garantiza en cada caso que la función así definida existe y es única.

reducción de teorías (A. *Reduktion von Theorien*, F. *réduction de théories*, I. *theory reduction*). Reducir una teoría a otra más potente significa mostrar que la segunda incluye implícitamente la primera, que toda la información codificada por la primera teoría ya está contenida en la segunda. Al tratarse de teorías distintas, formuladas generalmente en terminologías diferentes, esa inclusión implícita no se aprecia a primera vista, sino que requiere ser explicitada mediante definiciones apropiadas. Suponiendo que ambas teorías estuvieran axiomatizadas, para reducir la primera teoría a la segunda habría que definir todas las nociones primitivas de la primera en función de nociones de la segunda y habría que deducir todos los axiomas de la teoría reducida a partir de los axiomas de la teoría reductora y de las definiciones introducidas. Con frecuencia algunos científicos tienen la convicción intuitiva de que una teoría es reducible a otra, pero no acaban de encontrar una prueba de esta reducción que parezca suficientemente rigurosa y convincente a los demás, lo que da lugar a polémicas y discusiones sobre si (o hasta qué punto) se ha conseguido tal reducción. Así, se discute si la termodinámica fenomenológica es reducible o no a la mecánica estadística, o si la genética mendeliana es reducible a la genética molecular.

Si las teorías están formalizadas, la noción de reducibilidad puede ser definida con más precisión. Una teoría T es *reducible* a otra teoría Σ si y solo si T es una subteoría de una extensión definicional de Σ. Recordemos que Θ

es una *extensión definicional* de Σ si y solo si hay un subconjunto $\Delta \subseteq \Theta$ tal que (1) para cada $\delta \in \Delta$, δ es una definición en el lenguaje de Σ de un parámetro ausente de ese lenguaje, y (2) para cada $\varphi \in \Theta$, $\Sigma \cup \Delta \vdash \varphi$. Una extensión definicional de una teoría T no incrementa el contenido semántico ni el poder expresivo de la teoría. Por tanto, mostrando que T es una subteoría de una extensión definicional de Σ, explicitamos la "inclusión" implícita de T en Σ y probamos que T es reducible a Σ.

reduccionismo [en biología] (A. *Reduktionismus*, F. *réductionnisme*, I. *reductionism*). A principios del siglo XX algunos filósofos y biólogos, como Bergson y Driesch, sostuvieron la doctrina del *vitalismo*, según la cual la biología es irreducible por principio a la física y la química, pues se basa en entidades y fuerzas inmateriales desconocidas por la física, como la entelequia de Driesch o el impulso vital (*élan vital*) de Bergson. Con los avances de la biología molecular, casi todos los biólogos han acabado asumiendo la postura contraria, es decir, el reduccionismo. Sin embargo, no todo el mundo entiende lo mismo por reduccionismo. En especial, hay que distinguir entre dos tipos de reduccionismo, el ontológico y el epistemológico.

El *reduccionismo ontológico*, conocido también como FISICALISMO, sostiene que todos los seres vivos sin excepción, desde los orgánulos de las células hasta la biosfera entera, son seres físicos, constituidos por las moléculas, átomos y partículas elementales de que tratan la física y la química y sometidos a las fuerzas físicas, sobre todo a la fuerza electromagnética, base de la química y la biología. En especial, se rechaza la existencia en los seres vivos de entelequias, fuerzas o impulsos vitales inmateriales e incompatibles con la física. Casi todos los biólogos y filósofos de la biología actuales aceptan el reduccionismo ontológico.

El *reduccionismo epistemológico* es más fuerte, pues, además de todo lo anterior, pretende que todos los conocimientos, regularidades y teorías de la biología sean reducibles a las leyes y teorías de la física y la química. Todos los hechos biológicos tendrían explicaciones meramente físicas y cada tesis de la ciencia biológica sería deducible de leyes y principios exclusivamente físico-químicos. El reduccionismo epistemológico es bastante más problemático que el ontológico, tiene menos partidarios y, desde luego, está lejos de ser un programa realizable. Por un lado, la inmensa complejidad de los sistemas biológicos no es accesible por ahora desde la física fundamental, que más bien se ocupa de las regularidades más simples del Universo. Por otro lado, gran parte de la biología es histórica en carácter, fruto del azar y la contingencia, y difícilmente recuperable a partir de principios generales, como los de la física. La biología está sometida a la física en el sentido de que nada de lo que la física prohíbe tiene lugar en el mundo biológico. Pero la física

permite muchos cursos de desarrollo de la naturaleza y no determina cuál de ellos en concreto siguen los organismos.

refracción (A. *Refraktion*, F. *réfraction*, I. *refraction*). Cambio de dirección de un rayo de luz al pasar de un medio a otro. Snel descubrió en 1621 la ley de *refracción* que lleva su nombre y que puede formularse así. Sea *N* la recta que corta perpendicularmente la frontera entre los dos medios en el punto *P* en que el rayo de luz pasa de uno al otro; si θ_1 y θ_2 son, respectivamente, los ángulos formados entre *N* y la dirección del rayo de luz antes y después de pasar por *P*, entonces

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

donde n_i (i = 1,2) es el *índice de refracción* característico de cada medio y es igual al cociente c/v_i entre la velocidad *c* de la luz en el vacío y su velocidad v_i en el medio en cuestión.

Descartes derivó la ley de Snel del supuesto falso de que la luz se mueve más rápidamente en los medios más densos (aunque, por otra parte, sostenía que su propagación es instantánea). Fermat la derivó del supuesto contrario, empleando su PRINCIPIO DEL TIEMPO MÍNIMO.

regla de formación (A. *Bildungsregel*, F. *règle de formation*, I. *formation rule*). Diversos tipos de expresiones o entidades sintácticas (como los TÉRMINOS o las FÓRMULAS) de un lenguaje formal suelen definirse mediante reglas de formación que indican cómo construirlos sucesivamente, paso a paso. Se parte de los signos primitivos que componen el alfabeto del lenguaje formal y, una vez obtenidas ciertas hileras (o secuencias finitas) de signos, se aplican a ellas las reglas de formación para formar expresiones cada vez más complejas. El tipo de expresiones de que se trate queda definido como el conjunto de todas y solas las hileras de signos formables, construibles o permisibles de acuerdo con esas reglas de formación.

regla de inferencia (A. *Schlussregel*, F. *règle d'inférence*, I. *rule of inference*). Cuando razonamos o argumentamos o demostramos algo, vamos infiriendo secuencialmente unas proposiciones de otras. La validez del razonamiento o de la demostración depende de que las premisas primeras de las que partamos sean verdaderas y de que las pautas de inferencia que empleemos sean correctas. Averiguar la verdad de las premisas es asunto de la ciencia o la epistemología. Indagar en la corrección de las pautas de inferencia es una tarea típicamente lógica. La corrección de una pauta de inferencia no depende del contenido de las proposiciones a las que se aplique, sino solo de su

forma. Por eso la indagación lógica de la corrección de las pautas de inferencia pasa por su formalización como reglas de inferencia entre fórmulas. Una regla de inferencia es un permiso convencional para pasar de una fórmula de un cierto tipo (la premisa) a otra nueva (la conclusión), es decir, para escribir esta última, si ya disponemos de la primera. De hecho, no es necesario que la regla de inferencia parta de una premisa; también puede partir de dos o de tres o incluso de ninguna. Por ejemplo, la regla del MODUS PONENS nos da permiso para escribir φ como conclusión, una vez que contemos con $(\beta \Rightarrow \varphi)$ y β como premisas. Esto se suele representar trazando una raya horizontal entre las premisas, que se escriben arriba, y la conclusión, que se escribe debajo, así:

$$\frac{\begin{array}{l}(\beta \Rightarrow \varphi)\\ \beta\end{array}}{\varphi}$$

Una regla de inferencia sin premisas constituye un esquema axiomático y nos permite escribir directamente cualquier fórmula que tenga la forma de ese esquema. Por ejemplo, la regla de inferencia de la autoidentidad nos permite escribir en cualquier momento

$$\tau = \tau$$

donde τ es un término cualquiera.

Una regla de inferencia es *correcta* si y solo si la conclusión siempre es una CONSECUENCIA lógica de las premisas. En el caso de una regla de inferencia sin premisas, la corrección coincide con la validez lógica de la fórmula que nos autoriza a escribir. Como fácilmente se aprecia, las dos reglas de inferencia consideradas son correctas. Sin embargo, es posible, aunque ocioso, formular reglas de inferencia incorrectas, como

$$\frac{\begin{array}{l}(\beta \Rightarrow \varphi)\\ \varphi\end{array}}{\beta}$$

donde las premisas no implican la conclusión. Una regla de inferencia correcta no garantiza la verdad de las premisas, pero sí la preservación de su eventual verdad o validez en el tránsito a la conclusión. Si la regla es correcta y las premisas son verdaderas o incluso válidas, la conclusión es también ver-

dadera o incluso válida. Un cálculo deductivo es básicamente un conjunto de reglas de inferencia. Si todas ellas son correctas, el cálculo es también correcto. Un cálculo deductivo es correcto si todas las sentencias que permite deducir sin premisas son válidas y todas las sentencias que permite deducir a partir de premisas son consecuencias de esas premisas.

regla omega de inferencia (A. ω-*Schlussregel*, F. *règle d'inférence* ω, I. ω-*rule*). Regla propuesta por Hilbert (1931) para el cálculo deductivo de la aritmética elemental, como suplemento de las reglas de inferencia de la lógica ordinaria (*modus ponens*, *modus tollens*, *ejemplificación universal*, etc.). Hilbert la enunció así:

> Si se ha comprobado que la fórmula $\varphi(\mathfrak{z})$ —donde $\mathfrak{z}$ es un numeral dado— es siempre una fórmula numérica correcta, puede usarse como premisa la fórmula $\forall x\varphi(x)$.

Tarski —que ya la había mencionado en una reunión de filósofos polacos en 1927— la llamó "regla de inducción infinita" (1933b). Hoy se la llama *regla* ω porque autoriza a deducir una conclusión de un conjunto infinito numerable de premisas. Simbólicamente, si usamos 0, 1, 2... como numerales:

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2), \ldots \vdash \forall x\varphi(x)$$

Como advierte Hilbert, la fórmula cerrada $\forall x\varphi(x)$ es más fuerte que la fórmula abierta $\varphi(\mathfrak{z})$, con $\mathfrak{z}$ un numeral cualquiera, puesto que aquélla autoriza para inferir toda oración que se obtenga reemplazando en $\varphi(x)$ la variable libre x por *cualquier término* que denote un número y no solo por *cualquier numeral*. Esa mayor fuerza se manifiesta en la siguiente consecuencia importantísima: si agregamos la regla ω al cálculo aritmético que Gödel (1931) considera en la prueba de su TEOREMA DE INCOMPLETUD, obtenemos un sistema deductivo para la aritmética elemental al cual este teorema no se aplica.

Junto con enunciar la *regla* ω, Hilbert declara que es una regla "finitaria", como se requiere para aplicarla en la ejecución del PROGRAMA DE HILBERT. En cambio, Tarski (1933) se apresura a señalar su carácter "infinitista", que la distingue de todas las reglas de inferencia empleadas hasta entonces. En contraste con estas, la regla ω solo puede aplicarse "si hemos logrado mostrar que todos los enunciados de una determinada secuencia infinita pertenecen al sistema construido"; pero esto, obviamente, no puede establecerse por inspección del sistema, sino "solo mediante consideraciones metamatemáticas".

relación (A. *Beziehung*, F. *relation*, I. *relation*). Sea *A* un conjunto cualquiera. Desde el punto de vista extensional adoptado en la lógica moderna, una *relación* binaria en *A* es un conjunto de pares ordenados de elementos de *A*; una *relación n*-aria en *A* es un conjunto de *n*-TUPLOS de elementos de *A*. Una *relación* en esta acepción del término es lo que, desde la perspectiva intensional del sentido común y la filosofía tradicional, se vería como la extensión del concepto relacional considerado.

relatividad (A. *Relativität*, F. *relativité*, I. *relativity*). En la física y la filosofía de la ciencia este término —usado a veces con mayúscula— designa las dos teorías de Einstein conocidas como *teoría especial de la relatividad* y *teoría general de la relatividad*. El adjetivo *relativista* se aplica a lo relacionado con una de estas teorías o con ambas (por ejemplo, 'masa relativista', 'cosmología relativista', 'literatura relativista') y, por lo tanto, no tiene en el presente contexto absolutamente nada que ver con el llamado relativismo axiológico o epistemológico. La teoría especial de la relatividad debe su nombre a que adopta sin restricción alguna el clásico PRINCIPIO DE RELATIVIDAD, según el cual todos los marcos de referencia inerciales son dinámicamente equivalentes y no es posible distinguir a uno de ellos como estándar de reposo absoluto. Se la apellidó "especial" para distinguirla de la teoría de la gravitación que Einstein llamó "teoría general de la relatividad", presumiblemente porque en un comienzo pensó que la equivalencia de todos los sistemas de coordenadas, característica de la geometría diferencial empleada por esta teoría, reflejaba una equivalencia dinámica entre todos los marcos de referencia físicos. (En todo caso, la teoría especial es un caso particular de la teoría general, por cuanto la MÉTRICA DE MINKOWSKI, propia de aquella, es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein, que son la base de esta. Aunque solo procedería como solución global si no existiese ni una brizna de materia o energía, se la puede utilizar localmente, como solución aproximada, en la medida en que sea dable ignorar la gravedad.)

La *teoría especial de la relatividad* o *relatividad especial* responde a una dificultad que afrontaba la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA. En el contexto de la física newtoniana esta teoría no podía satisfacer el PRINCIPIO DE RELATIVIDAD proclamado por el propio Newton, según el cual todos los MARCOS DE REFERENCIA inerciales son físicamente equivalentes. Antes bien, al postular la existencia de fuerzas dependientes de la velocidad de los cuerpos sobre los cuales ellas actúan e incluir en sus ecuaciones fundamentales una constante igual a la VELOCIDAD DE LA LUZ en el vacío, la electrodinámica presuponía al parecer la existencia de un marco de referencia privilegiado, al cual dichas velocidades estarían referidas. Se entendía que ese era el marco en que reposa

el ÉTER, el medio que vibra con las ondas electromagnéticas. Pero ningún experimento permitía detectar la velocidad de la Tierra en el éter (↗EXPERIMENTO DE MICHELSON Y MORLEY). Además, como Einstein señaló agudamente, el distingo entre el marco del éter y los demás marcos inerciales en movimiento con respecto a él obligaba a describir en términos artificialmente diferentes procesos que son fenomenológicamente indistinguibles, por ejemplo, la interacción entre un imán en reposo en el éter y un conductor en movimiento y la interacción entre un imán en movimiento y un conductor en reposo. Alentado por los escritos de Poincaré, Einstein (1905b) se resolvió a postular la validez irrestricta del clásico principio de relatividad, extendiéndolo también a los fenómenos electromagnéticos. Al mismo tiempo, postuló la constancia de la velocidad de la luz en el vacío —cualquiera que sea la velocidad de su fuente— para un marco de referencia inercial y, por lo tanto, para todos.

Einstein pudo conciliar estos postulados aparentemente incompatibles gracias a su examen crítico de la variable *tiempo* que figura en las ecuaciones de la física (↗SIMULTANEIDAD). Si en cada marco de referencia inercial el tiempo se define según el método propuesto por Einstein, los eventos que son simultáneos en uno de esos marcos generalmente no lo son en los demás, lo cual hace posible que la luz se propague relativamente a todos ellos a la misma velocidad c. Consideremos, por ejemplo, una señal luminosa emitida en todas direcciones desde el punto O de un marco inercial $\mathfrak{R}$, en el instante en que dicho punto coincide con el punto O' de otro marco inercial $\mathfrak{R}'$; después de trascurridos n segundos en $\mathfrak{R}$ el frente de la onda llena la superficie de la esfera con centro O y radio ρ (medido en $\mathfrak{R}$), y después de trascurridos n segundos en $\mathfrak{R}'$ el frente de la onda llena la superficie de la esfera con centro O' y radio ρ' (medido en $\mathfrak{R}'$). Esto sería evidentemente imposible si las clases de eventos simultáneos en el tiempo de $\mathfrak{R}$ coincidiesen con las clases de eventos simultáneos en el tiempo de $\mathfrak{R}'$. Pero es perfectamente posible si el tiempo se define en cada marco inercial por el método de Einstein. Entonces, la llegada del frente de la onda a todos los puntos de la primera esfera (con centro en O), aunque simultánea en $\mathfrak{R}$, no lo es en $\mathfrak{R}'$, y la llegada del frente de la onda a todos los puntos de la segunda esfera (con centro en O'), aunque simultánea en $\mathfrak{R}'$, no lo es en $\mathfrak{R}$.

Sean (x,y,z) y (x',y',z') sistemas de coordenadas cartesianas adaptados, respectivamente, a los marcos inerciales $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$, y sean t y t' coordenadas temporales definidas en ellos por el método de Einstein. Supongamos que ambos sistemas utilizan las mismas unidades de tiempo y longitud y que su origen coincide, esto es, que un mismo evento E tiene coordenadas $x(E) = y(E) = z(E) = t(E) = x'(E) = y'(E) = z'(E) = t'(E) = 0$. En tal caso, la aseveración conjunta del principio de relatividad y el principio de la constancia de la ve-

locidad de la luz implica que la transformación de coordenadas entre los sistemas (t,x,y,z) y (t',x',y',z') es una TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ. Si el origen de ambos sistemas no coincide, la transformación es el producto de una transformación de Lorentz por una traslación, esto es, una *transformación de Poincaré*. Por lo tanto, si λ_0 es la longitud de una vara en reposo en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ se mueve relativamente a $\mathcal{R}'$ con velocidad v, la longitud λ_v de la vara en $\mathcal{R}'$ —esto es, la distancia entre dos posiciones simultáneas de los extremos de la vara en R'— está dada por

$$\lambda_v = \lambda_0\sqrt{1-(v/c)^2}$$

En otras palabras, si $v \neq 0$, λ_v es menor que λ_0, y se acerca a 0 cuando $v \rightarrow c$. Asimismo, si $\Delta t = t(E_2) - t(E_1)$ es el tiempo transcurrido entre dos eventos, medido en $\mathcal{R}$, el tiempo $\Delta t' = t'(E_2) - t'(E_1)$ entre los mismos eventos, medido en $\mathcal{R}'$, está dado por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

En otras palabras, si $v \neq 0$, $\Delta t'$ es mayor que Δt, y crece ilimitadamente cuando $v \rightarrow c$.

Si ningún experimento permite distinguir un marco inercial como "sistema en reposo" respecto al cual los otros se mueven, y si la luz se propaga en el vacío con la misma velocidad en todos ellos, las ecuaciones de la física escritas en términos del tiempo einsteiniano y las coordenadas cartesianas (t,x,y,z) o (t',x',y',z'), adaptadas, respectivamente, a los marcos inerciales $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, tienen que revestir la misma forma. La única diferencia entre estos dos modos de escribirlas consistirá en los acentos que en un caso acompañan a las variables y en el otro no. En otras palabras, *las ecuaciones de la física, así escritas, son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz y Poincaré.* Las ECUACIONES DE MAXWELL de la electrodinámica clásica satisfacen esta exigencia de suyo, pues el grupo de Poincaré es el grupo de SIMETRÍA de este sistema de ecuaciones. También la cumple, por cierto, la MECÁNICA RELATIVISTA que Einstein y sus continuadores desarrollaron justamente con ese propósito. Entre las características peculiares de esta cabe destacar la *relatividad de la inercia* —que crece con la velocidad y sobrepasa todo límite cuando esta última tiene a c— y la *equivalencia de masa y energía* expresada por la conocida ecuación $E = mc^2$.

De la afirmación conjunta del principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz se deducen fórmulas más exactas que las tradicionales

para describir la ABERRACIÓN DE LA LUZ y el EFECTO DOPPLER, que la relatividad especial concibe como efectos puramente cinemáticos. (Otro tanto cabe decir del aparente arrastre parcial del medio luminífero por el agua corriente en el experimento de Fizeau.)

Minkowski (1907, 1908, 1909) mostró que la relatividad especial y sus desconcertantes implicaciones se entienden más clara y naturalmente si el espacio y el tiempo asociados por Einstein a cada marco inercial se consideran producto de la descomposición del ESPACIOTIEMPO de Minkowski desde un cierto punto de vista. "De ahora en adelante el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo se reducirán completamente a sombras y solo una suerte de unión de ambos conservará una subsistencia independiente." Aunque esta reformulación geométrica de la relatividad especial no fue recibida con mucha simpatía por Einstein, que la percibió inicialmente solo como un artificio formal, es obvio que sin ella no habría sido posible la concepción de la relatividad general.

La *teoría general de la relatividad* o *relatividad general* es, propiamente, la teoría de la GRAVITACIÓN de Einstein. Tuvo que desarrollarla porque la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON, aunque espléndidamente respaldada por las observaciones astronómicas, no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz y por lo tanto es incompatible con la relatividad especial. Mientras otros investigadores perseguían una nueva ley de gravitación que cumpliese con la invariancia requerida, Einstein concluyó muy pronto que debía salirse del lecho de Procusto de la relatividad especial. En su búsqueda, que duró ocho años, lo guiaron sobre todo dos intuiciones: (1) Una persona encerrada en un laboratorio sin ventanas no podría, aparentemente, determinar si este reposa en un campo gravitacional uniforme dirigido hacia el suelo o si está siendo acelerado uniformemente en la dirección contraria, como un ascensor, en un espacio exento de toda influencia gravitacional. (2) No puede ser que las trayectorias de los cuerpos dependan de un campo que no dependa a su vez de las posiciones y movimientos de los cuerpos. Einstein traduce estas intuiciones en dos principios, respectivamente: (1) el PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA (fuerte), según el cual no es posible distinguir mediante experimentos físicos de ninguna clase entre dos laboratorios que difieran solamente en el respecto señalado; o, lo que es lo mismo, que no es posible distinguir mediante experimentos físicos de ninguna clase entre un laboratorio en caída libre en un campo gravitacional uniforme y un laboratorio en movimiento inercial; (2) lo que Einstein llama *principio de Mach*, según el cual la inercia, no menos que la gravitación, depende de la distribución de la materia en el Universo. La conjunción de estos dos principios sugiere inmediatamente la idea medular de la relatividad general: inercia y gravitación son

una y la misma cosa, que reviste aspectos diversos según varían las circunstancias. Darle cuerpo a esta idea demandaba originalidad y arrojo. La equivalencia postulada entre caída libre y movimiento inercial valía exclusivamente para el caso de un campo gravitacional uniforme, un ideal realizado a lo sumo aproximadamente sobre regiones pequeñas. ¿Cómo combinar estas regiones en un solo campo gravitacional universal? En este punto, resultó decisiva la perspectiva geométrica introducida por Minkowski. La COSMOLÍNEA de una partícula en movimiento inercial es una recta, esto es, una GEODÉSICA del espaciotiempo de Minkowski. Por el principio de equivalencia cabe decir otro tanto de una partícula en caída libre en un campo gravitacional uniforme. Estudiando los campos gravitacionales estáticos, Einstein derivó también para ellos esta "ley geodésica" del movimiento. Con característica audacia, la extendió al caso general. Cuenta que en el verano de 1912, recordando cómo Gauss determinaba la geometría "intrínseca" de una superficie curva componiéndola de trocitos casi planos, visualizó de pronto un campo gravitacional cualquiera como un espaciotiempo curvo compuesto de muchos trocitos casi uniformes, esto es, como una VARIEDAD DIFERENCIABLE 4-dimensional cuya MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA es aproximada localmente (tangencialmente) por la MÉTRICA DE MINKOWSKI. La métrica del espaciotiempo determina por cierto sus geodésicas y guía, por lo tanto, a las partículas en caída libre; pero Einstein exige, en consonancia con el "principio de Mach", que esa métrica dependa de la distribución de la materia. Aunque bien orientado por su amigo Grossmann sobre los recursos matemáticos que le permitirían definir tales relaciones dinámicas sobre un espaciotiempo curvo —el cálculo diferencial absoluto de Ricci y Levi-Civita (1901), más conocido como *cálculo tensorial*—, Einstein tardará todavía tres años en hallar las ecuaciones diferenciales que las expresan en su teoría de la relatividad general.

Aparentemente, al comienzo Einstein no entendió bien que la covariancia general de las ecuaciones entre tensores —esto es, la propiedad que poseen de preservar su validez cuando se las somete a transformaciones arbitrarias de coordenadas— era una característica matemática a la vez ineludible y trivial de esta clase de ecuaciones. Así, por un lado, a pesar de que en el estudio de un espaciotiempo curvo se utilizan sistemas de coordenadas arbitrarios y que generalmente carecen de todo significado físico, Einstein se refiere varias veces a la covariancia general como si esta implicase la *equivalencia física* de todos ellos, esto es, una genuina *relatividad general*. Por otro lado, después de rechazar por razones desconocidas la sugerencia de Grossmann de que procurara relacionar el TENSOR DE ENERGÍA con el tensor de Ricci (↗CURVATURA), Einstein adoptó un sistema de ecuaciones de campo que no es generalmente covariante (Einstein y Grossmann, 1913) e incluso alegó mediante el ARGUMENTO DEL AGUJERO que una teoría

generalmente covariante de la gravitación es imposible porque tendría que ser indeterminista.

Por fin, el 28 de noviembre de 1915 aparecieron las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN, con el tensor de Ricci R_{ik} correspondiente a la métrica g_{ik} al lado izquierdo y al lado derecho un tensor construido a partir de esta y el tensor de energía T_{ik}:

$$R_{ik} = \kappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T_r^r\right) \quad (1)$$

En esta expresión, los índices recorren el conjunto {0,1,2,3} y se aplica la CONVENCIÓN DE EINSTEIN (de modo que $T_r^r = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$); la constante $\kappa = 8\pi Gc^{-4}$, donde G es la CONSTANTE DE GRAVITACIÓN; y g_{ik} es una MÉTRICA LORENTZIANA. Esto significa que g_{ik} define sobre el espacio tangente en cada punto del espaciotiempo un PRODUCTO ESCALAR idéntico al que determinaría una MÉTRICA DE MINKOWSKI η_{ik}, y que, por lo mismo, g_{ik} concuerda con η_{ik} hasta las cantidades de primer orden en un entorno de cada punto. (Es oportuno señalar, además, que en el texto de Einstein el lado derecho de (1) va precedido por un signo menos, que aquí suprimimos porque nuestra definición del tensor de Ricci difiere de la suya.)

Las ecuaciones (1) no son lineales, lo cual hace muy difícil su solución y tiene además serias consecuencias con respecto a la ley del movimiento: ya no es lícito postular simplemente, como Einstein al comienzo de su indagación, que las partículas en caída libre tienen cosmolíneas geodésicas; antes bien cabe suponer que en un sistema cerrado, no expuesto a influencias externas arbitrariamente especificables, las cosmolíneas de las partículas estarán constreñidas por su interacción gravitacional no lineal según las ecuaciones (1). Uno debe preguntarse entonces si tales constreñimientos son compatibles o no con la ley geodésica del movimiento. No se conoce una respuesta general a esta pregunta y quizás no exista, pero en diversos casos se ha establecido exactamente o mediante aproximaciones que la ley geodésica —aplicada a partículas eléctricamente neutras y sin SPIN— es una *consecuencia necesaria* de las ecuaciones (1). En particular, es geodésica la cosmolínea de un cuerpo tan pequeño que la contribución del mismo al campo gravitacional no influye significativamente sobre su propio movimiento (Geroch y Jang, 1975).

En enero de 1916, Schwarzschild produce la primera solución exacta de las ecuaciones (1), pensada para aplicarse al sistema solar (↗SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD). Ella confirma lo que ya había descubierto Einstein mediante una solución aproximada, a saber, que el residuo de la PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO inexplicado por la teoría newtoniana (≈ 43″ por siglo) se deduce de la ecuación (1). La teoría predice también la DESVIACIÓN GRA-

VITACIONAL DE LA LUZ, que Eddington consideró confirmada por sus observaciones del eclipse total de Sol de 1919, y el CORRIMIENTO HACIA EL ROJO GRAVITACIONAL, confirmado por Pound y sus colaboradores hacia 1960.

Schwarzschild impuso a su solución condiciones de frontera que Einstein juzgó incompatibles con el "principio de Mach", a saber, que la métrica sea minkowskiana en el infinito espacial. (Hoy sabemos que este requisito es superfluo, pues se deduce de la simetría esférica inevitable en un modelo idealizado del campo gravitacional del Sol.) No pudiendo demostrar que a infinita distancia de toda materia la métrica se torna indefinida, Einstein pensó que su dificultad con el infinito espacial se resolvía suprimiéndolo, lo que logró con su primer modelo cosmológico (1917), en que el espacio tiene curvatura positiva constante y por lo tanto es finito (aunque ilimitado). Parece ser que durante la investigación conducente a este modelo, Einstein se dio cuenta de que una solución de las ecuaciones (1) con las propiedades que buscaba no podía ser estática, sino que representaría un universo en expansión. Antes que aceptar una conclusión tan chocante, Einstein reformó sus ecuaciones, agregando un nuevo término al lado izquierdo:

$$R_{ik} - \Lambda g_{ik} = \kappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T_r^r\right) \qquad (2)$$

donde Λ es la llamada CONSTANTE COSMOLÓGICA. (Una vez más, omitimos el signo menos al lado derecho de (2)). Años más tarde, cuando se puso en evidencia que el Universo sí se expande, Einstein comprendió que un prejuicio filosófico le había privado de hacer con la sola inteligencia el descubrimiento cosmológico más grande la historia y dijo, según cuenta Gamow, que el reemplazo de (1) con (2) había sido el máximo error de su vida. Por otra parte, ni aun con $\Lambda \neq 0$ se salva el "principio de Mach", pues, como pronto mostró de Sitter, las ecuaciones (2) admiten una solución no minkowskiana con el tensor de energía igual a 0 en todas partes. En todo caso, con sus consideraciones cosmológicas, Einstein había abierto una línea de investigación científica que desde entonces no ha hecho sino ganar importancia, sobre todo en los últimos cuarenta años, fortaleciendo el respaldo empírico a la teoría general de la relatividad y el interés del público por ella (↗COSMOLOGÍA, MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER).

reloj (A. *Uhr*, F. *horloge*, I. *clock*). Instrumento que mide lapsos de TIEMPO. Un reloj comprende un proceso físico de duración invariable que se repite ininterrumpidamente y un dispositivo que cuenta el número de veces que este proceso cronométrico se ha repetido desde cierto momento. Por ejemplo, un

reloj de pulsera corriente consta de un cristal de cuarzo que, estimulado por la pequeña corriente eléctrica generada por una batería, vibra a razón de varios miles de oscilaciones por SEGUNDO, y un dispositivo que, cada tantas oscilaciones del cristal, causa un desplazamiento de las manecillas que "dan la hora"; habitualmente estas se programan para indicar en cada momento el lapso trascurrido desde la última medianoche o desde el último mediodía (lo que haya ocurrido más tarde), según "la hora del lugar", o sea, la cronología legal a que se haya ajustado el reloj.

Esta definición no se aplica a los relojes de sol. La sombra proyectada por el Sol en el dial de uno de estos instrumentos va marcando el transcurso de lo que los romanos llamaban *horae temporales*, cada una de las cuales es igual a la duodécima parte del intervalo entre la salida y la puesta del Sol, y por eso tienen cada día una duración diferente.

La idea misma de reloj suscita un problema filosófico: ¿cómo sabemos que las realizaciones sucesivas de un proceso cronométrico efectivamente duran todas lo mismo? Obviamente no es posible ponerlas lado a lado y compararlas, como se hace con varias copias de una vara de medir. Pero la ocurrencia sincrónica de ciertos procesos —desaguado de las clepsidras, escurrido de la arena en los relojes de este material, oscilaciones pendulares, etc.— garantiza la coherencia de los datos cronométricos recogidos mediante ellos y autoriza a postular su uniformidad.

Hasta comienzos del siglo XX se pensaba que todos los relojes medían, mejor o peor, el trascurso de un mismo tiempo absoluto, en el que se suponía que vivimos y nos movemos y somos. Las teorías de la RELATIVIDAD de Einstein pusieron fin a esta noción. A la luz de ellas, es claro que cada reloj solo puede medir el TIEMPO PROPIO sobre su COSMOLÍNEA, esto es, la longitud de la curva temporaloide que él traza en el espaciotiempo. Confirma este modo de ver la constatación de una discrepancia entre el tiempo medido por tres grupos de relojes atómicos, uno de los cuales permanece en un aeropuerto a nivel del mar, mientras los otros dos le dan una vuelta completa a la Tierra, en sentidos opuestos, en sendos aviones que vuelan a gran velocidad y mucha altura. Se lee a veces que la discrepancia se debe a que la marcha de los relojes es afectada por el movimiento y por las diferencias de potencial gravitacional; pero la relatividad especial y general no la explican así. Según estas teorías, justamente si los relojes miden bien lo que tienen que medir, esto es, el tiempo propio de cada uno, es inevitable una discrepancia cuya magnitud predicha es aproximadamente igual a la observada. Porque, obviamente, las cosmolíneas de cada avión no son idénticas entre sí ni con la del aeropuerto; y a 10.000 metros de altura el campo gravitacional —esto es, la métrica del espaciotiempo— no es el mismo que a nivel del mar.

restricción (A. *Einschränkung*, F. *restriction*, I. *restriction*).
a. *De una función.* Si $f : A \rightarrow B$ es una FUNCIÓN cualquiera y $U \subseteq A$, entonces la función $g : U \rightarrow B$, definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in U$ se llama la *restricción* de f a U, simbólicamente $f \upharpoonright U$. Este distingo entre una función y sus restricciones se pasa normalmente por alto, salvo en aquellos casos especiales en que resulta significativo. En particular, la imagen de U por $f \upharpoonright U$ se simboliza simplemente $f[U]$.
b. *De una relación.* Sea R una relación. La *restricción* de R al conjunto A, escrita $R|A$, es una relación entre elementos de A que coincide con R respecto a esos elementos. Por tanto, si R es una relación binaria, $R|A = R \cap A^2$. Si R es una relación n-aria cualquiera, $R|A, = R \cap A^n$. Si R es la restricción de S a A, entonces S es una extensión de R.

retículo (A. *Verband*, F. *treillis*, I. *lattice*). Un *retículo* es un orden parcial reflexivo, en el cual cada par de elementos posee un ÍNFIMO y un SUPREMO. Es decir, $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ es un *retículo* si y solo si (1) $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ es un orden parcial y (2) cualquier par x, y de elementos de A posee un ínfimo y un supremo, es decir, hay en A elementos u y w tales que $u = \inf(x,y)$ y $w = \sup(x,y)$. De esta definición se sigue como corolario que en un retículo $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ cada subconjunto finito no vacío de A posee un ínfimo y un supremo. La palabra 'retículo' alude a que todos sus elementos forman una red. No hay elementos desconectados o cúmulos aislados unos de otros, como puede ocurrir en los órdenes parciales que no son retículos.

La noción de retículo generaliza la de ÁLGEBRA DE BOOLE y su teoría se desarrolló en los años treinta, especialmente por Garrett Birkhoff, que en 1948 le dio su presentación clásica. Tanto las álgebras de Boole como los ÓRDENES LINEALES son retículos.

En un retículo cada par de elementos tiene un (y solo un) ínfimo, y un (y solo un) supremo. Por tanto, hay una función que a cada par de elementos x, y asigna unívocamente un elemento $\inf(x,y)$, también simbolizado como $x \sqcap y$, así como una función que a cada par de elementos x, y asigna unívocamente un elemento $\sup(x,y)$, también simbolizado como $x \sqcup y$. Así, pues, para cada $x, y \in A$, $\inf(x,y) = x \sqcap y$; $\sup(x,y) = x \sqcup y$. Además de la noción de retículo basada en una relación binaria de orden, hay otra definición equivalente de tipo algebraico, basada en esas dos operaciones binarias $\sqcap$ y $\sqcup$.

Sea A un conjunto cualquiera, y sean $\sqcap$ y $\sqcup$ dos operaciones en A (es decir, dos funciones de A^2 en A). $\langle A, \sqcap, \sqcup \rangle$ es un *retículo* (en sentido algebraico) si y solo si cada una de esas dos operaciones es conmutativa y asociativa, y para ambas vale la ley de absorción. Más formalmente, $\langle A, \sqcap, \sqcup \rangle$ es un *retículo* si y solo si para cualesquiera x, y, $z \in A$:

(1) $x \sqcap y = y \sqcap x$ (1′) $x \sqcup y = y \sqcup x$
(2) $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ (2′) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$
(3) $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ (3′) $x \sqcup (x \sqcap y) = x$

Las fórmulas (1) y (1′) expresan las leyes conmutativas; las (2) y (2′), las leyes asociativas; y las (3) y (3′), las leyes de absorción. En cada uno de los casos, la segunda es la fórmula dual de la primera (es decir, la que resulta de sustituir $\sqcap$ por $\sqcup$ y a la inversa, dejando el resto igual). Como corolario se sigue que en todo retículo $\langle A, \sqcap, \sqcup \rangle$ para cada $x \in A$: $x \sqcap x = x$, y $x \sqcup x = x$.

Cada retículo concebido como una estructura algebraica $\langle A, \sqcap, \sqcup \rangle$, o *retículo algebraico*, da lugar a un correspondiente retículo $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ caracterizado como orden parcial, o *retículo de orden*. Para ello basta con definir la relación de orden $\preccurlyeq$ para cada x, $y \in A$ así: $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x$. Con ello se cumple que, si $\langle A, \sqcap, \sqcup \rangle$ es un retículo algebraico, entonces $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ es un retículo de orden. A la inversa, cada retículo de orden $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ da lugar a un correspondiente retículo algebraico $\langle A, \sqcap, \sqcup \rangle$. Para ello basta con definir las operaciones $\sqcap$ y $\sqcup$ para cada x, $y \in A$ así: $x \sqcap y = \inf(x,y)$, $x \sqcup y = \sup(x,y)$. Con ello se cumple que si $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ es un retículo de orden, entonces $\langle A, \sqcap, \sqcup \rangle$ es un retículo algebraico. Debido a que hay esta correspondencia biunívoca entre los retículos caracterizados de un modo y del otro, en la práctica no se distingue entre retículos algebraicos y retículos de orden.

En un retículo cada elemento *minimal* (es decir, tal que ningún otro es menor que él) es *mínimo* (es decir, él es menor que todos los demás) y cada elemento maximal es máximo. Eso no ocurre en los otros órdenes parciales. Aunque todos los subconjuntos finitos no vacíos de un retículo infinito tienen un ínfimo y un supremo, otros subconjuntos (el subconjunto vacío y los subconjuntos infinitos) pueden no tenerlos. Consideremos el retículo $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, formado por los números enteros y la relación de ser menor o igual. El subconjunto vacío $\varnothing$ carece de ínfimo y de supremo. Tampoco tiene ínfimo o supremo el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, o el subconjunto de los enteros pares.

Un retículo es *completo* si y solo si cada subconjunto no vacío tiene un ínfimo y un supremo. Todo retículo finito es completo. Un retículo infinito puede ser o no ser completo. Para los retículos completos vale el *teorema del punto fijo*: todo HOMOMORFISMO f de un retículo completo en sí mismo posee al menos un punto fijo, es decir, un x, tal que $f(x) = x$.

Un retículo $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ es *modular* si y solo si para cada x, y, $z \in A$, $x \preccurlyeq z \Rightarrow x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap z$. Un retículo $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ es *distributivo* si y solo si para cada x, y, $z \in A$, $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$, de donde también se sigue la condición dual, $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$. Todo retículo distributivo es modular. Un retículo $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ es *complementado* si y solo si ese retículo posee un mínimo, 0, y un máximo, 1, y, además, cada uno de sus elementos tiene un *com-*

plemento, es decir, para cada $x \in A$ hay un $y \in A$ tal que: $\inf(x,y) = x \sqcap y = 0$; $\sup(x,y) = x \sqcup y = 1$. Un retículo distributivo y complementado es un ÁLGEBRA DE BOOLE.

retrodicción (A. *Retrodiktion*, F. *rétrodiction*, I. *retrodiction*). ↗PREDICCIÓN.

revolución científica (A. *wissenschaftliche Revolution*, F. *révolution scientifique*, I. *scientific revolution*). La palabra 'revolución' denotaba en astronomía la vuelta completa que dan los astros, con diversos periodos, alrededor del polo celeste. A comienzos del siglo XVIII Fontenelle se refirió con ella al vuelco completo que habían tenido las matemáticas durante el siglo anterior, y pronto se la usó asimismo para designar los grandes cambios que estaban ocurriendo en las ciencias naturales. Empleada también a veces, ya por ese entonces, para referirse a cambios de gobierno, adquirió la connotación de cambio político radical y violento que primordialmente tiene hoy, al ser aplicada a los vuelcos políticos supuestamente totales iniciados en América en 1776 y en Francia en 1789. Hasta mediados del siglo XX se entendía comúnmente por *revolución científica* el paso decisivo que habrían dado Copérnico (o más bien, Kepler) en astronomía, Galileo (¿o fue Newton?) en mecánica, Lavoisier en química, en virtud del cual cada una de estas disciplinas se habría deshecho de golpe del lastre de enfoques erróneos y métodos extraviados heredado de la Edad Media, y emprendido de una vez por todas lo que Kant llamó "la marcha segura de una ciencia". El libro de Kuhn *La estructura de las revoluciones científicas* (1962) difunde una visión de la historia de las ciencias que entiende de un modo muy diferente la índole, envergadura y durabilidad de una revolución científica. Según Kuhn la investigación científica se desenvuelve en cada especialidad de acuerdo con un PARADIGMA aceptado por la comunidad de los científicos practicantes en ese campo; la acumulación de ANOMALÍAS no resueltas por la CIENCIA NORMAL gobernada por ese paradigma da lugar a la creación de un nuevo paradigma capaz de superarlas, el cual, si es aceptado por la comunidad, desplaza y reemplaza al anterior. Una revolución científica es el proceso de sustitución de paradigmas que separa dos formas de ciencia normal. La revolución marca una ruptura entre dos modos de hacer ciencia en un mismo campo que —según el dicho de Kuhn— son INCONMENSURABLES. Como el científico corriente formado en un paradigma usualmente no quiere o no puede "convertirse" a otro, la revolución prospera con la adhesión de los jóvenes y triunfa finalmente solo cuando ha fallecido la mayoría de los científicos de la generación anterior (o se han jubilado). Obviamente, la revolución científica entendida así no puede tener carácter definitivo; la ciencia normal fundada por ella habrá de verse afectada por nuevas anomalías conducentes a una nueva revolución.

Se ha pretendido ver en el reemplazo de la mecánica newtoniana por la mecánica relativista a partir de 1905 y por la mecánica cuántica desde 1925 dos ejemplos elocuentes de revolución científica en el sentido de Kuhn. Pero la idea se aplica también, junto con sus conceptos de paradigma y de ciencia normal, a cualquier cambio importante en especialidades científicas mucho más estrechas y menos fundamentales. Así, la adopción de la hipótesis de Wegener sobre el movimiento de los continentes ha sido llamada una revolución de la geología. No es claro, sin embargo, en qué sentido preciso podrían considerarse *inconmensurables* dos hipótesis radicalmente opuestas, digamos, sobre la bioquímica de la enfermedad de Alzheimer o sobre el origen de las úlceras gástricas.

RNA (A. *RNA*, F. *ARN*, I. *RNA*). Ácido ribonucleico, un POLÍMERO compuesto por una secuencia de NUCLEÓTIDOS (adenina, uracil, citosina y guanina) con el azúcar ribosa, generalmente formada por transcripción a partir del DNA. El RNA también se conoce en castellano como ARN. Es un componente de los ribosomas y participa en la síntesis de las proteínas. El RNA consta de una "columna vertebral" de elementos repetitivos (el azúcar y el fosfato), portadores de las diversas bases, cuya secuencia codifica y almacena la información. Dentro de la célula el DNA almacena la información genética y dirige la síntesis de proteínas, que tiene lugar en los ribosomas. Las instrucciones para hacer una proteína están en un *gen* (un cierto fragmento de DNA). Primero se hace una copia de trabajo del gen en RNA mensajero. Luego se transporta esa copia hasta un ribosoma, donde se ensambla la proteína. La secuencia de bases del RNA mensajero determina la secuencia de aminoácidos de la proteína ensamblada, que a su vez induce el pliegue y estructura tridimensional de la proteína, lo que determina su función.

En 1961 Jacob y Monod introdujeron la noción de *RNA mensajero*. Puesto que los genes están en el núcleo de la célula eucariota, pero las proteínas se sintetizan fuera del núcleo, en los ribosomas, que están en el citoplasma, Jacob y Monod pensaron que tenía que haber un mensajero, un transmisor de la información genética desde los genes hasta los ribosomas. Descubrieron su pista durante el estudio de la síntesis de proteínas en *Escherichia coli*, la bacteria omnipresente en nuestro intestino. Su descubrimiento fue decisivo para entender cómo se expresan los genes, es decir, cómo se transcribe su información y cómo se traduce en proteínas. La síntesis del RNA mensajero consume energía, y sería un despilfarro fatal estar transcribiendo genes todo el tiempo sin necesidad. En las células de los seres vivos los genes están como dormidos y sólo se despiertan o activan (es decir, sólo son transcritos) cuando sus productos se necesitan. El tema de la regulación de la expresión génica es fundamental para la comprensión de los mecanismos de la vida.

rotación (A. *Rotation*, *Drehbewegung*, F. *rotation*, I. *rotation*). El CUERPO RÍGIDO *K rota* en torno al eje ξ si ξ es una recta que intersecta a *K* y cada punto $P \in K$ reposa en ξ o traza la circunferencia de un círculo perpendicular a ξ. La *rotación* de *K* en torno a ξ en el instante *t* queda completamente caracterizada por la *velocidad angular* $\omega(t)$ definida así: (i) $\omega(t)$ es un vector paralelo a ξ y (ii) para cualquier punto $P \in K$, $\omega(t) = \mathbf{r}_p(t) \times \mathbf{v}_p(t)$, donde $\mathbf{r}_p(t)$ es la distancia de *P* a ξ y $\mathbf{v}_p(t)$ la velocidad de *P* en el instante *t* ($\times$ es el símbolo del PRODUCTO VECTORIAL). El movimiento de un cuerpo rígido puede representarse en cada momento (de distintas maneras) como resultante de *una* rotación y *una* TRASLACIÓN.

En geometría euclídea, una *rotación* del espacio en torno al punto *O* es una isometría *f* del espacio cuyo único punto fijo es *O*: $f(O) = O$ y $f(P) \neq P$ para todo punto $P \neq O$. Convencionalmente, la identidad del espacio se cuenta entre las rotaciones; visto así, el conjunto de las rotaciones en torno al punto *O* es un GRUPO —con la identidad como elemento neutro y la composición de rotaciones como operación de grupo— que actúa transitiva y efectivamente sobre el espacio (↗ACCIÓN DE UN GRUPO). El término *rotación* se extiende también analógicamente, con o sin un epíteto ad hoc, a otras transformaciones geométricas (vgr. la *rotación hiperbólica* en un espacio provisto de la MÉTRICA DE MINKOWSKI).

S

σ-álgebra (A. *Borelsche Mengenkörper*, F. *tribu*, I. *Borel field*, *σ-ring*, *σ-algebra*). Sea M un conjunto cualquiera. Un conjunto $\mathfrak{B} \subseteq \wp M$ de subconjuntos de M es una *σ-álgebra* sobre M si cumple las condiciones siguientes:

B1 $M \in \mathfrak{B}$.
B2 Si $B \in \mathfrak{B}$, el complemento de B en M, $M - B \in \mathfrak{B}$.
B3 Si $(B_k)_{k\in\omega}$ es una FAMILIA numerable de elementos de $\mathfrak{B}$, su unión $\bigcup_{k\in\omega} B_k \in \mathfrak{B}$.

salvar los fenómenos (A. *die Phänomene retten*, F. *sauver les phénomènes*, I. *to save the phenomena*). Un texto que Simplicio atribuye a Platón asigna a la astronomía la tarea de "salvar los fenómenos" (σῴζειν τὰ φαινόμενα), reconstruyendo los movimientos aparentemente irregulares de los astros como el efecto visible de una combinación de movimientos circulares uniformes. La frase fue revivida por Duhem y más recientemente por van Fraassen (1980), conforme a cuyo EMPIRISMO CONSTRUCTIVO ella expresa bien la meta de las ciencias empíricas y, en particular, de la física. En efecto, aunque la física describe mucho más de lo que puede observarse, su propósito queda satisfecho, según van Fraassen, si es "empíricamente adecuada", esto es, si lo que dice sobre lo observable concuerda con lo que efectivamente se observa; sin que importe mayormente la verdad o falsedad de sus asertos sobre cualquier objeto, proceso o relación que caiga fuera del ámbito de los fenómenos observables. Este modo de ver supone que ese ámbito esté definido en forma clara y autosuficiente. Sin pretender que van Fraassen lo haya logrado, es oportuno señalar que rechaza expresamente tanto el dicho de Einstein de que 'lo observable' es fijado en cada caso por la teoría física en juego como la tesis de Grover Maxwell de que el lindero entre lo observable y lo inobservable es vago, gradual y movedizo y depende, entre otras cosas, de las técnicas de observación.

satisfacible (A. *erfüllbar*, F. *satisfaisable*, I. *satisfiable*). Una fórmula α puede interpretarse de diversas maneras. Si al menos una de ellas la satisface o

verifica, α es satisfacible. Si ninguna la satisface, α es insatisfacible. Sea α una fórmula de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ y sea Γ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$. Usemos la variable $\mathfrak{I}$ del metalenguaje para referirnos indistintamente a interpretaciones cualesquiera de ese lenguaje $\mathcal{L}$. El conjunto Γ es satisfacible si hay al menos una misma interpretación que satisface todas sus fórmulas. En caso contrario, Γ es insatisfacible.

α es *satisfacible* si y solo si hay una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{I}$ satisface α. α es *insatisfacible* si y solo si, para cada interpretación $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}$ no satisface α.

Γ es *satisfacible* si y solo si hay una interpretación $\mathfrak{I}$ tal que, para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{I}$ satisface γ. Γ es *insatisfacible* si y solo si para cada interpretación $\mathfrak{I}$ hay una fórmula $\gamma \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{I}$ no satisface γ.

La satisfacibilidad puede definirse en función de la validez lógica. Una fórmula α es satisfacible si y solo si su negación, ¬α, no es lógicamente válida. α es insatisfacible si y solo si ¬α es lógicamente válida.

En la lógica proposicional y en la lógica de primer orden (pero no en la de segundo orden), la propiedad semántica de ser satisfacible es equivalente a la propiedad sintáctica de ser consistente, y la de ser insatisfacible equivale a la de ser contradictorio. Para cualquier fórmula α de la lógica proposicional o de primer orden: α es satisfacible si y solo si α es consistente. α es insatisfacible si y solo si α es contradictoria.

sección de un fibrado (A. *Schnitt eines Faserbündels*, F. *section d'un fibré*, I. *section of a fibre bundle*). Sea $\langle \mathcal{F}, \mathcal{M}, \pi \rangle$ un FIBRADO. Una *sección* de $\langle \mathcal{F}, \mathcal{M}, \pi \rangle$ es una FUNCIÓN LISA $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ tal que la FUNCIÓN COMPUESTA $\pi \circ \varphi$ es la IDENTIDAD en $\mathcal{M}$.

secuencia (A. *Folge*, F. *séquence*, I. *sequence*). Sea M un conjunto. Una *secuencia* en M es una FAMILIA de elementos de M parametrizada por el conjunto ω de los ordinales finitos o por un segmento inicial del mismo, $\{0,1,\ldots,n\}$. En este último caso, se habla de una *secuencia finita*. En castellano también decimos *sucesión* en vez de *secuencia*.

secuencia de Cauchy (A. *Cauchysche Folge*, F. *séquence de Cauchy*, I. *Cauchy sequence*). La SECUENCIA $(a_i)_{i\in\omega}$ en el ESPACIO MÉTRICO $\langle S,\delta \rangle$ es una *secuencia de Cauchy* si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ hay un entero N_ε tal que, para todo $m, n \geq N_\varepsilon$, $\delta(a_m,a_n) \leq \varepsilon$. El espacio $\langle S,\delta \rangle$ se dice *completo* si y solo si toda secuencia de Cauchy $(a_i)_{i\in\omega}$ ($a_i \in S$) converge a un punto $a \in S$; esto es, si y solo si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ hay un entero N_ε tal que, para todo $n \geq N_\varepsilon$, $\delta(a,a_n) \leq \varepsilon$. Como cualquier ESPACIO VECTORIAL NORMALIZADO $\mathcal{V}$ es un espacio métrico (con la MÉTRICA definida por $\delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$), estos conceptos son inmediatamente aplicables a $\mathcal{V}$.

segmento inicial (A. *Anfangsstück*, F. *segment initial*, I. *initial segment*). $\langle B,<\rangle$ es un segmento inicial de un orden lineal $\langle A,<\rangle$ si y solo si $B \subseteq A$ y todos los elementos de A menores que algún elemento de B son también elementos de B, es decir, vale $\forall x \forall y (x \in B \wedge y \in A \wedge y < x \Rightarrow y \in B)$. En la teoría de los ordinales de von Neumann, cada número natural es un segmento inicial de ω (el conjunto de los ordinales finitos) y cada número ordinal es un segmento inicial de Ω (la clase de todos los ordinales).

segundo (A. *Sekunde*, F. *seconde*, I. *second*). Unidad de tiempo en el SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES de medida. Al principio se definió el segundo en función del movimiento rotacional de la Tierra como la fracción 1/86 400 (= 1/24 × 1/60 × 1/60) del día solar medio. Pero el día solar medio no es constante, va creciendo lentamente. Por ello en 1956 el segundo fue redefinido oficialmente en función del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol. El segundo sería la fracción 1/315 569 259 74 del año solar 1900. Finalmente, en 1967 se dio una nueva definición del segundo, todavía vigente, que aprovecha los avances de la ciencia y la tecnología atómicas. El segundo pasó a ser definido en función de un cierto número de oscilaciones de la radiación generada por un reloj atómico basado en el comportamiento del isótopo cesio-133. Los átomos no pueden encontrarse más que en ciertos niveles de energía bien determinados. Toda transición entre dos de estos niveles se acompaña de la emisión o de la absorción de un fotón u onda electromagnética de frecuencia invariable. El *segundo* es la duración de 9 192 631 770 ciclos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del átomo de cesio-133.

semántica (A. *Semantik*, F. *sémantique*, I. *semantics*). En la SEMIÓTICA general se llama *semántica* al estudio de los signos en su relación con los objetos por ellos significados o denotados. En la semántica lingüística el énfasis se pone en el significado o uso de las palabras y oraciones, más que en la referencia o denotación, que sin embargo constituye el centro de interés de la semántica lógica. Los pioneros de la lógica actual, como Frege y Russell, no se plantearon explícitamente el tema de la INTERPRETACIÓN. Suponían que las VARIABLES de las fórmulas lógicas se refieren indistintamente a cualquier cosa. Sin embargo, no está nada claro lo que sea "cualquier cosa". A partir de los años treinta, por obra de Tarski y otros autores, se considera que es necesario especificar exactamente el ámbito o universo del discurso al que queremos que se refieran las variables. La semántica lógica o teoría de modelos surge del estudio de las interpretaciones que pueden darse de los lenguajes formales. Interpretar un LENGUAJE FORMAL significa fijar un universo del discurso sobre el que varían las variables y asignar entidades (individuos,

relaciones y funciones) sobre ese universo a los parámetros del lenguaje. Dada una fórmula φ del lenguaje formal $\mathcal{L}$ y una interpretación $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{L}$, tiene que estar definido si $\mathfrak{I}$ satisface o verifica φ o no. En función de tales interpretaciones la semántica define nociones como las de referencia, verdad, validez lógica, consecuencia, implicación y satisfacibilidad. El universo y las entidades distinguidas forman un sistema o estructura concreta. Si las interpretaciones del lenguaje sobre esa estructura satisfacen o verifican todas las sentencias de una teoría, decimos que ese sistema es una REALIZACIÓN de la teoría. Una realización se llama también un *modelo* (en un sentido distinto al usual que la palabra tiene en la ciencia empírica); de ahí que hablemos de *teoría de modelos*. Por ejemplo, la relación de EQUIVALENCIA ELEMENTAL es una relación entre realizaciones típica de la teoría de modelos.

semiótica (A. *Semiotik*, F. *sémiotique*, I. *semiotics*). Aunque numerosos filósofos de todas las épocas, empezando por Aristóteles y los estoicos, se han interesado por los signos y las relaciones simbólicas, la semiótica en el sentido actual, concebida como intento de una teoría general de los signos, empieza con Peirce y con Saussure (que la llamó *semiología*). El lingüista Saussure recalcó que, además del lenguaje, hay otros muchos sistemas de signos que también sirven para comunicarnos, desde la escritura hasta los toques de trompeta militares, pasando por los gestos faciales y las señales de tráfico, y propuso estudiar lo que tienen de común. Peirce pensaba que lo común a todos los signos es una relación ternaria, que él llamó *semiosis*, entre un signo o significante, un objeto o significado del signo y un intérprete para el que ese signo significa ese objeto. Morris (1938) sistematizó las ideas (no siempre claras) de Peirce y dio a la semiótica su forma actual. La ciencia general de los signos debería tratar de los signos desde la perspectiva de los tres componentes de la semiosis. Por un lado, trataría de los signos en sí mismos (su forma y combinación) y en sus relaciones con otros signos. Eso constituiría la SINTAXIS. Por otro lado, trataría de los signos en su relación con los objetos por ellos denotados. Ello daría lugar a la SEMÁNTICA. Finalmente, la *pragmática* estudiaría las relaciones de los signos con su intérprete o usuario, para el que estos signos significan algo. La semiótica ha seguido desarrollándose y ramificándose según los diversos intereses (lógicos, lingüísticos, estéticos, sociológicos, etc.) de los autores que han tratado de ella.

sentencia (A. *Aussage*, F. *proposition*, I. *sentence*). La noción de sentencia desempeña el mismo papel en el lenguaje formal que la de enunciado en el lenguaje natural. Una *sentencia* es una fórmula sin variables libres. También se llama fórmula cerrada, en contraposición a la fórmula abierta, que contie-

ne variables libres. Una sentencia puede carecer de variables, como $2 + 7 = 9$, o puede contener solo variables ligadas, como $\forall x \exists y Rxy$.

La verdad de una fórmula abierta, en una interpretación $\mathfrak{I}$, depende de cómo interprete $\mathfrak{I}$ las variables libres de la fórmula. Así, la ecuación $3 + x = 8$ es una fórmula abierta, que será verdad (esto es, será satisfecha) si interpretamos x como 5 y será falsa si interpretamos x de cualquier otra manera. Solucionar una ecuación en x es encontrar la interpretación de x que la satisface. Sin embargo, la satisfacción o verdad de una sentencia no depende de cómo interpretemos sus variables, sino solo del universo de la interpretación y de cómo estén interpretadas sus constantes o parámetros no lógicos (constantes individuales, functores y relatores); por tanto, solo depende de la estructura sobre la que la interpretamos. Si fijamos como universo el conjunto de los números naturales e interpretamos el relator R como la relación de ser menor entre números, entonces $\forall x \exists y Rxy$ resulta satisfecha o verdadera en esta estructura $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ con independencia de cómo interpretemos las variables x e y. Si una interpretación $\mathfrak{I}$ sobre una estructura $\mathcal{A}$ satisface una sentencia α, entonces cualquier interpretación sobre $\mathcal{A}$ satisface α. Por eso en el caso de una sentencia α hablamos de que una estructura $\mathcal{A}$ satisface α, pero no lo hacemos en el caso de una fórmula abierta.

serie (A. *Reihe*, F. *série*, I. *series*). Sea $(a_i)_{i \in \omega}$ una SECUENCIA de números reales o una secuencia de números complejos. La *serie* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es la secuencia $\left(\sum_i\right)_{i \in \omega}$ cuyo n-ésimo término $\sum_n$ es la suma de los primeros n términos de la secuencia $(a_i)_{i \in \omega}$. Si esta secuencia converge al límite s (↗CONVERGENCIA), decimos que la serie es *convergente* y escribimos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$. No obstante la apariencia en contrario, con esta notación no se quiere decir que existe una suma con infinitos sumandos $a_1, a_2, \ldots$, tal que $a_1 + a_2 + \ldots = s$.

Este concepto de *serie* se extiende naturalmente a cualquier secuencia $(a_i)_{i \in \omega}$ de elementos de un conjunto M sobre el cual se ha definido una operación de suma. En particular, si M tiene una TOPOLOGÍA —por ejemplo, si es un ESPACIO DE BANACH—, cabe preguntarse si una serie de elementos de M converge o no a un límite en M.

serie de Balmer (A. *Balmersche Reihe*, F. *série de Balmer*, I. *Balmer series*). Serie de LÍNEAS ESPECTRALES del hidrógeno, pertenecientes al espectro visible o al bajo ultravioleta, que —como Balmer mostró en 1885— satisfacen una fórmula simple, a saber,

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

donde λ es la longitud de onda correspondiente a la línea, $\mathfrak{R}$ es la CONSTANTE DE RYDBERG y n = 2, 3, 4... (un entero distinto para cada línea). La derivación teórica de la fórmula empírica de Balmer fue uno de los mayores logros del modelo atómico de Bohr (1913).

serie de Fourier (A. *Fouriersche Reihe*, F. *série de Fourier*, I. *Fourier series*). Llámase *serie de Fourier* (o *serie trigonométrica*) a una SERIE de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \qquad (1)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx \qquad (n = 1,\ 2,\ldots)$$

Recordando que $\cos x = ½(e^{ix} + e^{-ix})$ y $\operatorname{sen} x = ½\, i(e^{ix} - e^{-ix})$, vemos que la fórmula (1) equivale a esta otra:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx} \qquad (2)$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

signatura (A. *Signatur*, F. *signature*, I. *signature*). Sea f un PRODUCTO ESCALAR en el ESPACIO VECTORIAL real n-dimensional $\mathcal{V}$. Entonces existe una base $\langle \mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$ de $\mathcal{V}$ con la propiedad siguiente: para cualquier $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$,

$$f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \varepsilon_1(x^1)^2 + \ldots + \varepsilon_n(x^n)^2$$

donde $\varepsilon_i = \pm 1$ para cada índice i. El número m de índices para los cuales $\varepsilon_i = 1$ y el número r de índices para los cuales $\varepsilon_i = -1$ ($m + r = n$) están determinados por el producto escalar f; la diferencia $m - r$ se llama la *signatura* del producto escalar f y del espacio $\langle \mathcal{V}, f\rangle$.

Sea $\mathcal{M}$ una VARIEDAD DIFERENCIABLE real de *n* dimensiones, provista de la MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA g. El producto escalar determinado por g en cada ESPACIO TANGENTE a $\mathcal{M}$ tiene la misma signatura para cada $p \in \mathcal{M}$. Es legítimo, pues, referirse a ella como la *signatura de la métrica* g o la *signatura de la variedad* $\langle \mathcal{M}, g \rangle$.

Según la convención adoptada en este diccionario, las MÉTRICAS LORENTZIANAS de la teoría de la RELATIVIDAD tienen signatura 2. Corrientemente, esta signatura se representa mediante la lista de signos negativos y positivos de los factores ε_i $(1 \leq i \leq 4)$, en ese orden: (– + + +). Bajo la convención de signatura opuesta a la adoptada aquí, la signatura de una métrica lorentziana es igual a –2 y suele representarse así: (+ – – –).

silogismo (A. *Syllogismus*, F. *syllogisme*, I. *syllogism*). Sean *P* y *Q* conceptos o predicados unarios. Llamemos enunciados genéricos a los enunciados del tipo 'todo *P* es *Q*' o 'ningún *P* es *Q*' o 'algún *P* es *Q*' o 'algún *P* no es *Q*'. Un *silogismo* es un razonamiento en el que inferimos un enunciado genérico, llamado *conclusión*, a partir de dos enunciados genéricos, llamados *premisas*. Las dos premisas han de contener tres conceptos, de los cuales uno, llamado el *término medio*, se repite en ambas premisas, y los otros dos, llamados *extremos*, aparecen en la conclusión. Este razonamiento puede ser correcto o incorrecto, según que la conclusión sea o no una consecuencia de las premisas. Si un silogismo es correcto, todos los silogismos cuyas premisas y conclusión compartan su forma lógica serán también correctos. Esta forma o pauta constituye un modo silogístico válido. Los modos silogísticos pueden representarse como leyes lógicas, tal y como lo hacía Aristóteles, su descubridor, o como reglas de inferencia, práctica más habitual entre los lógicos posteriores. Los lógicos medievales asignaron nombres mnemotécnicos a los modos silogísticos válidos; por ejemplo, asignaron el nombre *Barbara* al modo silogístico representado por la ley lógica

Si todo *P* es *M* y todo *M* es *Q*, entonces todo *P* es *Q*

Este modo silogístico también puede formularse como regla de inferencia:

todo *P* es *M*
todo *M* es *Q*
___
todo *P* es *Q*

Ejemplos de silogismos en *Barbara* son: "todo bávaro es alemán; todo alemán es europeo; por consiguiente, todo bávaro es europeo" y "todos los

delfines son cetáceos; todos los cetáceos son mamíferos; por tanto, todos los delfines son mamíferos". Los modos silogísticos válidos e inválidos constituyen el objeto de estudio de la SILOGÍSTICA. En la lógica actual, el estudio de los silogismos queda integrado en la lógica de predicados unarios de primer orden. Por ejemplo, un silogismo en *Barbara* es una fórmula válida de la lógica de primer orden, a saber,

$$\forall x(Px \Rightarrow Mx) \land \forall x(Mx \Rightarrow Qx) \Rightarrow \forall x(Px \Rightarrow Qx)$$

silogística (A. *Syllogistik*, F. *syllogistique*, I. *syllogistics*). La rama más antigua de la lógica formal, creada por Aristóteles hace veinticuatro siglos. La silogística no es una lógica general, pues su aplicabilidad está limitada a un tipo especial de enunciados o proposiciones, los enunciados que aquí (a falta de una terminología canónica) llamaremos *enunciados genéricos*. Sean P y Q conceptos o predicados unarios cualesquiera. Un enunciado genérico en P y Q dice que todo (o algún) P es (o no es) Q, lo cual da lugar a cuatro tipos de enunciados genéricos, caracterizados como universales o particulares y como afirmativos o negativos. El siguiente cuadro resume los cuatro tipos. La primera columna indica sus denominaciones, la segunda los formula con palabras, la tercera los formula en el simbolismo formal establecido por la silogística postaristotélica y la cuarta columna los traduce a la simbología lógica actual.

Universal afirmativo	Todo P es Q	PaQ	$\forall x(Px \Rightarrow Qx)$
Universal negativo	Ningún P es Q	PeQ	$\forall x(Px \Rightarrow \neg Qx)$
Particular afirmativo	Algún P es Q	PiQ	$\exists x(Px \land Qx)$
Particular negativo	Algún P no es Q	PoQ	$\exists x(Px \land \neg Qx)$

La formulación en palabras puede variar ligeramente. Así, el enunciado universal afirmativo puede expresarse como 'todo P es Q' o como 'todos los P son Q' o como 'Q se predica de todo P', que es el giro más frecuente en el texto aristotélico. En los enunciados genéricos así formulados el primer concepto, P, se llama el *sujeto*, y el segundo, Q, el *predicado*. Obsérvese que tanto P como Q son predicados unarios, en la terminología de la lógica actual.

En su libro *Sobre la interpretación*, Aristóteles distingue dos tipos de *oposición* entre enunciados genéricos: la oposición contradictoria y la oposición contraria. La oposición *contradictoria* se da entre dos enunciados uno de los cuales es la negación del otro, por lo que uno de ellos ha de ser verdadero y el otro falso. Hay cuatro tipos de pares contradictorios de enunciados gené-

ricos. 'Todo *P* es *Q*' es el contradictorio de 'algún *P* no es *Q*'. 'Ningún *P* es *Q*' es el contradictorio de 'algún *P* es *Q*'. 'Algún *P* es *Q*' es el contradictorio de 'ningún *P* es *Q*'. 'Algún *P* no es *Q*' es el contradictorio de 'todo *P* es *Q*'. Cada enunciado es equivalente a la negación de su contradictorio. Por tanto, si negamos un enunciado, hemos de afirmar su contradictorio. Si afirmamos un enunciado, hemos de negar su contradictorio. La oposición *contraria* o contrariedad se da entre dos enunciados que no pueden ser ambos verdaderos, sino que al menos uno de ellos ha de ser falso. También los dos pueden ser falsos. Si el uno es verdadero, el otro es falso. Pero si el uno es falso, el otro puede ser tanto verdadero como falso. Hay dos tipos de pares contrarios de enunciados genéricos. 'Todo *P* es *Q*' es el contrario de 'ningún *P* es *Q*'. 'Ningún *P* es *Q*' es el contrario de 'todo *P* es *Q*'. Del estudio de la oposición Aristóteles obtuvo las siguientes leyes lógicas:

(1) Si no (todo *P* es *Q*), entonces (algún *P* no es *Q*).
(2) Si no (ningún *P* es *Q*), entonces (algún *P* es *Q*).
(3) Si no (algún *P* es *Q*), entonces (ningún *P* es *Q*).
(4) Si no (algún *P* no es *Q*), entonces (todo *P* es *Q*).
(5) Si (todo *P* es *Q*), entonces no (ningún *P* es *Q*).
(6) Si (ningún *P* es *Q*), entonces no (todo *P* es *Q*).

También consideró que los enunciados universales implican sus correspondientes enunciados particulares y formuló estas dos leyes de *subalternación*:

(7) Si todo *P* es *Q*, entonces algún *P* es *Q*.
(8) Si ningún *P* es *Q*, entonces algún *P* no es *Q*.

Desde el punto de vista de la lógica actual —que incluye los conceptos vacíos, bajo los que no cae individuo alguno— las dos leyes 5) y 6) de la oposición contraria y las dos leyes 7) y 8) de la subalternación son inválidas: no valen precisamente para los enunciados cuyo sujeto *P* es un concepto vacío. Si excluimos de nuestra consideración lógica los conceptos vacíos, las leyes de la oposición contraria y de la subalternación resultan válidas. Estas leyes de la oposición justifican otras tantas reglas de inferencia. Así, por ejemplo, correspondiendo a la primera ley de la oposición contradictoria podemos formular la regla de inferencia

no (todo *P* es *Q*)
___
algún *P* no es *Q*

que nos permite pasar (en una argumentación) de la negación de un enunciado universal afirmativo al correspondiente enunciado particular negativo.

La *conversión* de un enunciado genérico consiste en la permutación de su sujeto y su predicado. La permutación de conceptos del enunciado 'todas las sillas son muebles' da el enunciado 'todos los muebles son sillas'. Naturalmente no siempre la verdad de un enunciado garantiza la verdad del enunciado que resulta de la permutación de sus conceptos. El ejemplo que acabamos de poner muestra un caso de enunciado no convertible, es decir, de un enunciado verdadero que, por permutación de sujeto y predicado, se transforma en un enunciado falso. Aristóteles investigó en qué casos los enunciados pueden convertirse, es decir, pueden permutar su predicado y su sujeto, conservando la verdad, y en qué otros casos ello no ocurre. El resultado de su investigación es que los enunciados universales negativos y los particulares afirmativos pueden convertirse siempre, que los enunciados particulares negativos no pueden convertirse nunca y que los enunciados universales afirmativos pueden convertirse sólo a condición de transformar su cuantificación de universal en particular (por ejemplo, 'todas las sillas son muebles' puede convertirse en 'algunos muebles son sillas'). Así pues, Aristóteles obtiene las siguientes leyes lógicas de la conversión:

(1) Si (ningún P es Q), entonces (ningún Q es P).
(2) Si (algún P es Q), entonces (algún Q es P).
(3) Si (todo P es Q), entonces (algún Q es P).

Si admitimos que las letras P y Q pueden representar también conceptos vacíos (como se hace en la lógica actual), las dos primeras leyes de la conversión son válidas, pero la tercera es inválida. Si restringimos el ámbito de referencia de las letras mayúsculas a los conceptos no vacíos, entonces las tres leyes de la conversión son válidas.

Aristóteles investigó sistemáticamente en qué casos dos enunciados genéricos implican un tercero y en qué casos no. Expuso sus resultados en el libro I de los *Analíticos Anteriores*. La teoría lógica que desarrolló al respecto se conoce como la silogística o teoría de los silogismos. Un SILOGISMO es un razonamiento en el que inferimos un enunciado genérico, la conclusión, a partir de dos enunciados genéricos, las premisas. Las dos premisas han de contener tres conceptos, de los cuales uno, llamado el *término medio*, se repite en ambas premisas y no aparece en la conclusión; cada uno de los otros dos, llamados *extremos*, aparece en una de las premisas y en la conclusión. Este razonamiento puede ser correcto o incorrecto, según que la conclusión sea o no una consecuencia de las premisas. Si un silogismo es correcto, todos los silogismos cuyas premisas y conclusión compartan su for-

ma lógica serán también correctos. Esta forma o pauta constituye un modo silogístico válido.

Aristóteles clasifica los modos silogísticos en figuras. La *primera figura* se da cuando el sujeto de la conclusión es sujeto de una premisa, el predicado de la conclusión es predicado de otra premisa y el término medio es predicado de una premisa y sujeto de otra. Cuatro son las combinaciones de la primera figura que Aristóteles reconoce explícitamente como modos silogísticos válidos, y éstas son sus correspondientes leyes lógicas:

1.1 Si todo *P* es *M* y todo *M* es *Q*, entonces todo *P* es *Q*.
1.2 Si todo *P* es *M* y ningún *M* es *Q*, entonces ningún *P* es *Q*.
1.3 Si algún *P* es *M* y todo *M* es *Q*, entonces algún *P* es *Q*.
1.4 Si algún *P* es *M* y ningún *M* es *Q*, entonces algún *P* no es *Q*.

La *segunda figura* se da cuando el sujeto de la conclusión es sujeto de una premisa, el predicado de la conclusión es sujeto de la otra premisa y el término medio es predicado de ambas premisas. También en la segunda figura reconoce Aristóteles cuatro combinaciones como modos silogísticos válidos, que dan lugar a la implicación de la conclusión por las premisas. He aquí las correspondientes leyes lógicas:

2.1 Si todo *P* es *M* y ningún *Q* es *M*, entonces ningún *P* es *Q*.
2.2 Si ningún *P* es *M* y todo *Q* es *M*, entonces ningún *P* es *Q*.
2.3 Si algún *P* es *M* y ningún *Q* es *M*, entonces algún *P* no es *Q*.
2.4 Si algún *P* no es *M* y todo *Q* es *M*, entonces algún *P* no es *Q*.

La *tercera figura* se da cuando el sujeto de la conclusión es predicado de una premisa, el predicado de la conclusión es predicado de la otra premisa y el término medio es sujeto de ambas premisas. En esta tercera figura reconoce Aristóteles seis combinaciones en las cuales las premisas implican la conclusión, seis modos silogísticos válidos. He aquí las correspondientes leyes lógicas:

3.1 Si todo *M* es *P* y algún *M* es *Q*, entonces algún *P* es *Q*.
3.2 Si todo *M* es *P* y algún *M* no es *Q*, entonces algún *P* no es *Q*.
3.3 Si algún *M* es *P* y todo *M* es *Q*, entonces algún *P* es *Q*.
3.4 Si algún *M* es *P* y ningún *M* es *Q*, entonces algún *P* no es *Q*.
3.5 Si todo *M* es *P* y todo *M* es *Q*, entonces algún *P* es *Q*.
3.6 Si todo *M* es *P* y ningún *M* es *Q*, entonces algún *P* no es *Q*.

Éstas son todas las leyes silogísticas explícitamente reconocidas por Aristóteles: en total, catorce, de las cuales cuatro en la primera figura, cuatro en

la segunda y seis en la tercera. Desde el punto de vista de la lógica actual (que admite también conceptos vacíos), las doce primeras —es decir, todas las de la primera y segunda figuras y las cuatro primeras de la tercera— son válidas, mientras que las dos últimas —3.5 y 3.6— son inválidas. Adoptando una semántica sin conceptos vacíos, como implícitamente hacía Aristóteles, todas son válidas.

Aristóteles caracterizó a los silogismos de la primera figura como perfectos o evidentes por sí mismos y redujo los silogismos válidos imperfectos (los de las otras figuras) a los perfectos, deduciéndolos a partir de ellos. En estas deducciones se admiten, además de las inferencias conectivas implícitas, las basadas en las leyes de la oposición, la subalternación y la conversión. Su silogística constituye así el primer sistema deductivo conocido, una especie de teoría axiomática en la que todos los silogismos o bien son perfectos (axiomas) o bien se pueden obtener a partir de los perfectos (teoremas). Incluso redujo el número de axiomas, mostrando que los dos silogismos perfectos particulares (1.3 y 1.4) son deducibles a partir de los universales (1.1 y 1.2). Aunque las deducciones silogísticas de Aristóteles son siempre correctas, lo que no hace es explicitar todas las reglas lógicas que usa. Sólo explicita las que se refieren a los cuantificadores. Las que tratan de los conectores son usadas correctamente, pero de un modo meramente implícito. Los lógicos estoicos serían más tarde los primeros en explicitarlas.

Aristóteles no se limitó a probar deductivamente los modos silogísticos válidos, sino que también se ocupó de analizar uno a uno y rechazar los inválidos. Para ello ofreció en cada caso una prueba de INDEPENDENCIA, mostrando que las letras conceptuales pueden interpretarse de tal manera que las premisas resulten verdaderas y la conclusión falsa, con lo que queda probado que las premisas no implican la conclusión. Aristóteles considera, por ejemplo, los modos silogísticos inválidos

* Si ningún *P* es *M* y todo *M* es *Q*, entonces todo *P* es *Q*.
** Si ningún *P* es *M* y todo *M* es *Q*, entonces algún *P* es *Q*.

Se percata de que no son válidos y lo comprueba interpretando *P* como *piedra*, *M* como *hombre* y *Q* como *animal*. En efecto, esta interpretación convierte a las dos premisas en enunciados verdaderos (ninguna piedra es hombre y todo hombre es animal) y a las conclusiones en enunciados falsos (toda piedra es animal, en *, o alguna piedra es animal, en **).

Los lógicos medievales introdujeron algunas modificaciones en la silogística. Desarrollaron un sistema mnemotécnico para designar y aprender de memoria los modos silogísticos válidos mediante palabras latinas inventadas

que contenían las mismas vocales que las letras que simbolizaban el tipo de premisas y conclusión del silogismo. Este sistema aparece ya perfectamente desarrollado en las *Summulae Logicales* de Petrus Hispanus, en el siglo XIII. Así, recordaban el modo silogístico 1.1, 'Si *PaM* y *MaQ*, entonces *PaQ*', mediante la palabra *Barbara*. Los lógicos medievales formulaban los modos silogísticos como reglas de inferencia más que como leyes lógicas.

Así formulaban el modo silogístico *Barbara* como la regla:

todo *P* es *M*
todo *M* es *Q*
____
todo *P* es *Q*

Si uno se toma en serio los principios lógicos formales de la silogística, fácilmente se da cuenta de que la exposición aristotélica es incompleta. Por un lado, los modos silogísticos válidos que se obtienen por subalternación no son explícitamente registrados por Aristóteles. Por ejemplo, si el modo silogístico *Barbara* es válido, también tiene que serlo *Barbari*, es decir,

Si todo *P* es *M* y todo *M* es *Q*, entonces algún *P* es *Q*.

Si se añaden los modos que faltan, cada figura cuenta con seis modos válidos. Por otro lado, el principio clasificatorio de los modos silogísticos que emplea Aristóteles permite definir cuatro figuras, las tres que él explicita y además una cuarta figura. La *cuarta figura* se da cuando el sujeto de la conclusión es predicado de una premisa, el predicado de la conclusión es sujeto de otra premisa y el término medio es predicado de una premisa y sujeto de otra. En total, pues, hay $4 \times 6 = 24$ modos silogísticos válidos, según reconoció Leibniz.

En el siglo XX se han realizado diversos intentos de presentar la silogística de un modo formalmente riguroso y completo. Quizás el intento más logrado haya sido el de Łukasiewicz. Su sistema formal utiliza las letras simbólicas a e i como primitivas y parte de dos definiciones, ($PeQ \Leftrightarrow \neg PiQ$) y ($PoQ \Leftrightarrow \neg PaQ$), y cuatro axiomas: *PaP*, *PiP*, ($PaM \wedge MaQ \Rightarrow PaQ$) [*Barbara*] y ($PaM \wedge QiM \Rightarrow PiQ$) [*Datisi*], usando las reglas de inferencia de sustitución y *modus ponens*. Łukasiewicz incluso inventó también un cálculo de rechazo, en que se deduce formalmente el rechazo de todos los modos inválidos.

Además de la silogística normal o asertórica, Aristóteles desarrolló también la silogística modal, que es la primera versión conocida de la lógica modal. Sin embargo, la silogística modal aristotélica está aquejada de ambigüe-

dades e inconsistencias y carece de la perfección formal que posee su silogística general. La silogística asertórica ha constituido durante más de dos mil años la lógica formal por antonomasia y ha gozado de un gran prestigio. Leibniz la consideraba un arte de infalibilidad y Kant pensaba que la lógica había salido ya perfecta de las manos de Aristóteles, por lo que no podía progresar más. Todo esto ha cambiado desde finales del siglo XIX, cuando la lógica "tradicional" o silogística fue siendo desplazada por la lógica "moderna" o matemática. El interés actual de la silogística es meramente histórico, pues ha quedado subsumida en la lógica de predicados unarios de primer orden, que es una parcela especialmente trivial (decidible) de la lógica de primer orden.

simetría (A. *Symmetrie*, F. *symmétrie*, I. *symmetry*). En física y matemáticas, un objeto —cuerpo, figura, situación, proceso— se dice *simétrico* si permanece invariante en algún respecto bajo la ACCIÓN DE UN GRUPO. El grupo responsable de la simetría de un objeto es su *grupo de simetría*. Considérese, por ejemplo, la figura llamada "estrella de David". Sea R_{60} la rotación de la estrella en 60° en torno a su centro, en la dirección de las manecillas del reloj. Cualquier transformación del GRUPO generado por $\{R_{60}\}$ aplica la estrella sobre sí misma de tal modo que no hay ninguna diferencia en la figura antes y después de la transformación. La *simetría* de la estrella de David consiste en su invariancia bajo la acción de este grupo.

Las simetrías son importantes en la física por diversas razones. Citamos algunas:

1° La presencia de simetrías en un modelo de una teoría física suele facilitar la solución de sus ecuaciones. Por ejemplo, en la RELATIVIDAD general, un campo gravitacional foliable en hipersuperficies o "lonchas" espacialoides esféricamente simétricas (el campo de un astro solitario) es un campo de Schwarzschild, cuya métrica es una de las pocas soluciones exactas que se conocen de las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN. Otra familia célebre de soluciones exactas, las MÉTRICAS DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER, también presupone simetrías.

2° La invariancia de los fenómenos físicos bajo traslaciones del espacio y del tiempo garantiza la repetibilidad de los experimentos y la aplicabilidad universal de las leyes naturales comprobadas en un lugar y época particulares.

3° Ya Galileo observó que los procesos físicos se desarrollan ostensiblemente del mismo modo en un laboratorio en reposo y en un laboratorio en movimiento uniforme. Esta simetría de la naturaleza es la base del PRINCIPIO DE RELATIVIDAD: newtoniana, si el grupo de simetría es el grupo de Galileo; einsteiniana, si el grupo de simetría es el grupo de Lorentz. La reflexión sobre la RELATIVIDAD, inspirada por la obra de Einstein, mueve a algunos a entender la invariancia, esto es, la *simetría*, como un criterio de rea-

lidad u objetividad (Winnie, 1986). Cantidades como el tiempo propio, la cosmovelocidad, la masa en reposo, que permanecen invariantes bajo las transformaciones de Lorentz, representarían por eso realidades físicas genuinas; no así las dimensiones espaciales (longitud, volumen), o el intervalo entre instantes del tiempo universal. Pero ¿qué diremos de la llamada MASA relativista, esto es, la resistencia de un cuerpo a la aceleración relativa al laboratorio? Dados los costos que su incremento con la velocidad impone a quienes construyen y administran aceleradores de partículas, no parece sensato considerarla irreal.

4° Cuando una teoría física es derivable de la aplicación de un principio variacional a un LAGRANGIANO cuyo grupo de simetría es un GRUPO DE LIE de *n* parámetros, la teoría implica la conservación de *n* cantidades físicas (primer TEOREMA DE NOETHER). Así, los principios de conservación de la energía, el momento cinético y el momento angular en la MECÁNICA CLÁSICA se deducen de la invariancia del lagrangiano clásico bajo las traslaciones temporales y espaciales y bajo las rotaciones espaciales.

5° La ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA y las TEORÍAS CUÁNTICAS DE CAMPOS que se inspiran en ella son invariantes bajo un característico grupo *GAUGE*, esto es, un grupo cuya acción sobre los objetos geométricos que representan la realidad física en cada punto del espaciotiempo varía de punto en punto. La simetría *gauge* propia de la teoría demanda la existencia de un campo *gauge* cuya excitación da nacimiento a cierto género de partículas *gauge*. Las propiedades matemáticas del grupo tienen entonces una estrecha correspondencia con el contenido físico representable en la teoría y lo constriñen rigurosamente. Según Henneaux y Teitelboim (1992), lo típico de esta clase de teorías es que utiliza en la descripción de un sistema físico un número de variables mayor que el número de grados de libertad físicamente independientes del sistema; las cantidades físicamente significativas son invariantes bajo las transformaciones *gauge*; el empleo de variables adicionales hace más perspicua la descripción y a la vez genera una simetría que señala y destaca el contenido físico de la teoría.

simplicidad (A. *Einfachkeit*, F. *simplicité*, I. *simplicity*). Para muchos filósofos y científicos, la *simplicidad* es un criterio adecuado para elegir entre teorías o hipótesis igualmente compatibles con la experiencia (↗INFRADETERMINACIÓN DE LAS TEORÍAS POR LOS HECHOS), no porque piensen con Leibniz que Dios es el perfecto ingeniero que obtiene la máxima riqueza de efectos con un mínimo expendio de recursos, sino más bien porque una teoría más simple es más fácil de aplicar (↗ECONOMÍA DE PENSAMIENTO). Por ejemplo, cuando Einstein buscaba un nuevo sistema de ecuaciones del campo gravitacional excluyó de partida las de tercer orden, porque en el estado contemporáneo

del conocimiento físico y matemático esa complicación habría sido inútil. Por otra parte, cada filósofo que se ha ocupado con este asunto ha propuesto un criterio de simplicidad diferente, todos muy vulnerables. De hecho, la simplicidad puede perseguirse en distintas direcciones, y la preferencia por una u otra forma de simplicidad depende del propósito que se quiera cumplir con ella y puede ser hasta cuestión de gusto. Imaginemos dos teorías, aplicables a un mismo grupo de fenómenos, tales que las ecuaciones de una son de un grado más bajo pero contienen más parámetros ajustables que las de la otra. ¿Cuál es la más simple de las dos?

simultaneidad (A. *Gleichzeitigkeit*, F. *simultaneité*, I. *simultaneity*). Relación entre dos eventos que ocurren al mismo tiempo. La física da por supuesta la posibilidad de constatar sin más la simultaneidad entre eventos que ocurren en el mismo lugar; determinar, por ejemplo, que el ganador de la carrera llegó a la meta en el instante en que el cronógrafo del juez marcaba 9,6 s después de la partida. Distinto es el caso de los eventos que ocurren en lugares separados. Por ejemplo ¿cómo establecer que el juez puso en marcha el cronógrafo en el momento mismo en que a 100 m de distancia, en el otro extremo de la pista, se dio la señal de partir? Mal que mal, el estampido de la pistola tarda casi 0,25 s en recorrer 100 m. Se puede, claro, corregir el cronógrafo teniendo en cuenta esta tardanza; pero solo si se conoce la velocidad de propagación de la señal. Y esta solo puede averiguarse midiendo la distancia entre los puntos de emisión y recepción y el tiempo trascurrido mientras la señal viaja de uno al otro; lo cual, a su vez, exige saber en el punto de recepción el instante preciso en que la señal fue emitida. Esta dificultad fue señalada, quizás antes que nadie, por James Thomson (1884) y comentada luego extensamente por Poincaré (1898); pero el primero en abordarla con decisión y resolverla fue Einstein (1905b, §1). En último término, dice, hay que acordar una convención. Confiando en que no hay señales más rápidas que las luminosas, podríamos asignarle a cada suceso lejano el tiempo en que lo vemos ocurrir. Pero las relaciones de simultaneidad y sucesión establecidas por este método dependerían de la posición del observador. Propone en cambio el método siguiente para sincronizar relojes que reposan en distintos puntos de un MARCO DE REFERENCIA INERCIAL: si se envía a través del espacio vacío una señal luminosa del reloj A al reloj B donde rebota inmediatamente y retorna a A, el reloj B se ajustará de modo que, al tiempo de rebotar, la señal indique el tiempo t' igual al registrado en A al completarse la mitad del intervalo entre el momento de emisión t_1 y el momento de recepción final t_2; esto es, de modo que

$$t' = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{2} \qquad (1)$$

Sin disimular el carácter estrictamente convencional de su método, Einstein subraya ciertos hechos empíricos que lo hacen viable: si el reloj *B* se ajusta al reloj *A* del modo explicado, y luego se utiliza el mismo procedimiento para ajustar el reloj *A* al reloj *B*, los resultados concuerdan; también, si *A* y *B* se ajustan a un tercer reloj *C*, y enseguida *A* se ajusta a *B* o viceversa. Asimismo, es un hecho empírico que el método es estable: si todos los relojes se sincronizan ajustándolos por el método de Einstein al reloj *A*, lucirán sincronizados —dentro del margen de error permisible— si el mismo procedimiento se repite más tarde. Estas condiciones empíricas de viabilidad restringen severamente las estipulaciones convencionales posibles. De hecho, en la inmensa literatura sobre el tema solo se ha considerado seriamente una alternativa al método de Einstein, a saber, la propuesta por Reichenbach (1928; no 1924), y que consiste en reemplazar el denominador 2 en el último término de la ecuación (1) por un factor ε^{-1} que varía con la dirección del vector $\overline{AB}$. Si exigimos que toda partícula libre cuyo movimiento relativo a un marco inercial $\mathfrak{R}$ se controle mediante relojes sincronizados de este modo exhiba una velocidad constante (conforme al principio de inercia), tendremos que cada una de las infinitas estipulaciones permitidas por esta propuesta —cada elección posible de la función $\varepsilon \neq ½$— redunda, a fin de cuentas, en aplicar a $\mathfrak{R}$ la coordenada temporal que el método de Einstein prescribe para otro marco inercial $\mathfrak{R}(\varepsilon)$.

Es claro que, si el denominador de la fracción al lado derecho de la ecuación (1) no es igual a 2, la señal luminosa utilizada para sincronizar los relojes se propaga a distinta velocidad de *A* a *B* y de *B* a *A*. Esta libertad para fijar convencionalmente la velocidad *unidireccional* de la luz existía en vida de Reichenbach, cuando la unidad de longitud era la distancia entre dos marcas en una barra metálica conservada en París. Pero dejó de existir desde que la Conferencia General de Pesos y Medidas, en 1983, definió el metro como la longitud del trayecto que recorre la luz en el vacío durante un lapso de 1/299 792 458 s. Con esta definición, inevitablemente, toda señal luminosa se trasmite en el vacío a la velocidad unidireccional de 299 792 458 m/s. Cualquier método de sincronizar relojes fijos en un marco inercial que sea compatible con este resultado concuerda infaliblemente con el método de Einstein. La definición del metro es, por cierto, convencional, pero está avalada por los hechos empíricos que llevaron a los metrólogos a preferirla sobre otras anteriores.

sincategoremático (A. *synkategorematisch*, F. *syncatégorématique*, I. *syncategorematic*). Adjetivo griego no documentado en la literatura antigua conocida. En la lógica y la gramática medieval y moderna se lo usa para designar las palabras y expresiones que solo tienen significado combinadas con nom-

bres y verbos, las únicas partes de la oración que son supuestamente "categoremáticas", esto es, portadoras de un significado por sí mismas. Obviamente las preposiciones y conjunciones son *sincategoremáticas*, pero también, si se lo piensa bien, algunos adjetivos y adverbios. Por ejemplo, 'una mera opinión' no es algo que es *mero* y además *una opinión*. Ahora bien, es claro que en las formas más maduras del pensamiento tampoco los nombres y verbos comunican nada aislados unos de otros. Para un matemático actual, el vocablo 'recta' separado de todo sistema de geometría es un sonido huero, un "predicado no interpretado"; en cambio, incrustado en los AXIOMAS DE HILBERT, no adquiere automáticamente una interpretación, pero estos restringen a tal punto las interpretaciones posibles que todas ellas son isomorfas (↗ISOMORFISMO).

singularidad (A. *Singularität*, F. *singularité*, I. *singularity*). En la teoría de las funciones de una variable compleja se dice que una función f, con argumentos y valores en $\mathbb{C}$, tiene una *singularidad* en un punto $z \in \mathbb{C}$ si las dos condiciones siguientes se cumplen en cada entorno U de z: (i) f es analítica en un subconjunto abierto de U; (ii) f no puede extenderse a una FUNCIÓN ANALÍTICA definida en todo U. Si f tiene una singularidad en z, se dice que z es un *punto singular* de f.

Este concepto matemático inspiró el uso tradicional del término *singularidad* en las teorías físicas de CAMPOS. Considérese, por ejemplo, el campo electrostático $\mathbb{E}$ generado, conforme a la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA, por una carga eléctrica positiva q localizada en un punto P del espacio euclídeo-newtoniano. Obviamente, la fuerza repulsiva ejercida por q sobre una carga 1 localizada en P tendría, según la LEY DE COULOMB, una intensidad infinita y apuntaría en todas direcciones a la vez. Por lo tanto, el campo $\mathbb{E}$, aunque bien definido en un subconjunto abierto de cualquier entorno U de P, no puede definirse en todo U. Ello no compromete la existencia del punto P, sostenida por sus relaciones geométricas con el resto del espacio, las cuales, en la teoría citada, no dependen para nada de las fuerzas eléctricas. Cabe, pues, referirse a P como un *punto singular* del campo $\mathbb{E}$.

Este modo de hablar se extendió naturalmente a los campos gravitacionales de la teoría general de la RELATIVIDAD. Así, se dice que en el campo de Schwarzschild hay una *singularidad* en el eje espaciotemporal de simetría. Se expresa así el hecho de que cuando nos acercamos a ese eje desde cualquier dirección el escalar de CURVATURA crece sin límite, de modo que la métrica no puede estar definida sobre ese eje. Sin embargo, en una VARIEDAD SEMIRIEMANNIANA como la que postula esta teoría, la métrica tiene que estar bien definida en cada punto. En un espaciotiempo de Schwarzschild descrito con el sistema de coordenadas habitual (↗SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD), la ecuación $r = 0$ tiene ciertamente soluciones en el codominio de la carta utilizada

(esto es, en $\mathbb{R}^4$ o en una región de $\mathbb{R}^4$), pero ellas no representan ningún punto del espaciotiempo físico, aunque están rodeadas (en $\mathbb{R}^4$) por cuádruplos de números que sí los representan.

Se ha buscado dar una definición de *singularidad* en un ESPACIOTIEMPO relativista que eluda la dificultad ilustrada en el párrafo anterior. Se intentó enriquecer el espaciotiempo con una frontera ficticia formada por los puntos singulares. Esto es muy fácil en el caso de nuestro ejemplo, pero las definiciones generales de este tipo que no son relativas al sistema de coordenadas adoptado redundan en patologías. Por eso, ha prevalecido otra estrategia para afrontar nuestro problema, consistente en clasificar como *espaciotiempos singulares* a los espaciotiempos GEODÉSICAMENTE INCOMPLETOS. Estos son espaciotiempos que contienen al menos una GEODÉSICA definida en un intervalo finito que no es la restricción de otra definida sobre $\mathbb{R}$. Si una geodésica incompleta es la COSMOLÍNEA de una partícula existente ahora, su pasado o su futuro ocupa un lapso de tiempo finito que, respectivamente, empieza o acaba en nada. Conforme a los *teoremas sobre singularidades* demostrados en 1965-1970 por Penrose, Hawking y Geroch, casi todo espaciotiempo que satisfaga las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN y cumpla ciertas condiciones físicas altamente plausibles —esto es, casi todo modelo físicamente admisible de la relatividad general— es geodésicamente incompleto y, por ende, singular en este sentido.

Consideraciones físicas han motivado el distingo entre singularidades ocultas o "vestidas" y singularidades manifiestas o "desnudas". Un cosmonauta que ingresa, en caída libre, en un AGUJERO NEGRO describe una cosmolínea geodésica que no puede extenderse hacia el futuro más allá de un lapso finito de tiempo propio. Pero ninguna señal emitida por él será observable desde fuera del agujero negro, e incluso las que envíe al cruzar la frontera de éste habrán sufrido tal CORRIMIENTO AL ROJO (gravitacional) que, en el límite, resultarán inobservables. La singularidad constituida por dicha geodésica incompleta permanece, pues, oculta. En cambio, una singularidad desnuda estaría a la vista. Penrose y Hawking patrocinaron un postulado de "censura cósmica" en virtud del cual en un universo relativista no hay singularidades desnudas, excepto el *Big Bang* primordial. Sin embargo, la aplicación de la mecánica cuántica a los agujeros negros por el propio Hawking (1975) indica que cuando uno de estos termina de evaporarse podría ocurrir que deje como único vestigio una pequeña singularidad desnuda.

sintaxis (A. *Syntax*, F. *syntaxe*, I. *syntax*, *syntactics*). En la SEMIÓTICA general se llama *sintaxis* al estudio de los signos en sí mismos (su forma y combinación) y en sus relaciones con otros signos, sin referencia a sus significados u objetos denotados y sin referencia tampoco a los intérpretes o usuarios

de dichos signos. En la lingüística es habitual llamar *sintaxis* al estudio de la estructura o forma de las oraciones, mientras que el estudio de la estructura de las palabras recibe el nombre de *morfología*. En la lógica la *sintaxis* cubre tanto la gramática de los lenguajes formales (su alfabeto, las combinaciones de signos que constituyen TÉRMINOS y FÓRMULAS, relaciones como las de subfórmula o sustitución, etc.) como el estudio de las relaciones de DEDUCIBILIDAD entre fórmulas en función de un cálculo deductivo, así como la *teoría de la prueba* o estudio de los cálculos deductivos mismos. Lo que tienen en común todas estas consideraciones es el énfasis en la mera forma o estructura de las hileras de signos, consideradas en sí mismas y con independencia de cualquier interpretación que se pueda dar de ellas.

sintético / analítico. ↗ANALÍTICO / SINTÉTICO.

sistema de referencia (A. *Bezugsystem*, F. *référentiel*, I. *reference system*). ↗MARCO DE REFERENCIA.

sistema internacional de unidades (A. *Internationales System von Einheiten*, F. *Système international d'unités*, I. *International System of Units*). Sistema de UNIDADES DE MEDIDA adoptado en el Tratado del Metro de 1875. Su administración está confiada a la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, con sede en Sèvres (París), que conserva el prototipo internacional de la unidad de masa (↗KILOGRAMO) y coordina el trabajo de los laboratorios nacionales de estándares. Las definiciones de las unidades son ajustadas a los progresos de la metrología por la Conferencia General de Pesos y Medidas, que se reúne cada cuatro años. El Sistema Internacional (SI) reposa sobre siete unidades básicas: el METRO de longitud, el KILOGRAMO de masa, el SEGUNDO de tiempo, el AMPERE de corriente eléctrica, el KELVIN de temperatura, el MOL de cantidad de sustancia, y la CANDELA de intensidad luminosa; y dos unidades suplementarias: el RADIÁN de medida angular plana y el ESTEREORRADIÁN de medida angular sólida. Las demás unidades físicas de medida se definen en función de estas nueve, de acuerdo con la definición —en términos de dichas cantidades— de la cantidad física que miden. Las definiciones de algunas de estas unidades figuran en este diccionario bajo el nombre respectivo (↗HERTZ, JOULE, NEWTON, VOLTIO, WATT) o en otras entradas apropiadas (el *ohm*, por ejemplo, bajo LEY DE OHM). Salvo indicación contraria, siempre utilizamos las unidades del SI en las fórmulas físicas que varían con el sistema de unidades adoptado.

El SI utiliza una lista común de prefijos para designar las unidades que se forman a partir de una unidad dada, multiplicándola por potencias de 10. En la tabla siguiente, cada prefijo aparece en la columna central, entre la po-

tencia de 10 que le corresponde (a la izquierda) y la letra utilizada para abreviarlo (a la derecha). Como se sabe, la abreviatura se antepone a la abreviatura de la unidad; por ejemplo, el prefijo kilo-, abreviado k, corresponde al factor 10^3; "metro" se abrevia m; por lo tanto, mil metros, esto es, 1.000 m = 1 km.

FACTOR	PREFIJO	ABREVIATURA	FACTOR	PREFIJO	ABREVIATURA
10^{24}	yotta-	Y	10^{-1}	deci-	d
10^{21}	zetta-	Z	10^{-2}	centi-	c
10^{18}	exa-	E	10^{-3}	mili-	m
10^{15}	peta-	P	10^{-6}	micro-	μ
10^{12}	tera-	T	10^{-9}	nano-	n
10^{9}	giga-	G	10^{-12}	pico-	p
10^{6}	mega-	M	10^{-15}	femto-	f
10^{3}	kilo-	k	10^{-18}	atto-	a
10^{2}	hecto-	h	10^{-21}	zepto-	z
10^{1}	deca-	da	10^{-24}	yocto-	y

Estos prefijos y abreviaturas suelen aplicarse también a unidades no pertenecientes al SI; así, se habla comúnmente de MeV (megaELECTRÓN-VOLTIOS), GB (gigabytes), etc. En el caso de las unidades de masa, los prefijos se anteponen a la palabra 'gramo' y las correspondientes abreviaturas a la letra g. 1 gramo es igual a 10^{-3} kilogramos (y, por ende, 1 kg = 1.000 g). En la medida en que ello sea práctico, se recomienda evitar las unidades correspondientes a los prefijos *hecto-*, *deca-*, *deci-* y *centi-*.

solución de Schwarzschild (A. *Schwarzschildlösung*, F. *solution de Schwarzschild*, I. *Schwarzschild solution*). Las primeras soluciones exactas de las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN fueron descubiertas por Schwarzschild poco antes de morir en el frente durante la Primera Guerra Mundial. Distinguimos 1° la *solución exterior de Schwarzschild* (1916a), concebida como modelo del campo gravitacional que generaría una masa puntual rodeada por un espacio completamente vacío; 2° la *solución interior de Schwarzschild* (1916b), que ofrece un modelo simplista del interior de una estrella. La importancia de estas soluciones estriba en que las predicciones mejor confirmadas de la teoría de la RELATIVIDAD general se basan en ellas (↗DESVIACIÓN GRAVITACIONAL DE LA LUZ, PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO). La solución interior ha permitido asimismo predecir la existencia de AGUJEROS NEGROS y desarrollar su teoría.

La *solución exterior de Schwarzschild* satisface las condiciones siguientes:

(1) El campo es estático.
(2) El campo es esféricamente simétrico en el espacio.
(3) A infinita distancia del centro de simetría, la métrica espaciotemporal converge a la MÉTRICA DE MINKOWSKI.
(4) Fuera del centro de simetría, todo el espacio está vacío.

Estas condiciones determinan un modelo del espacio vacío que rodea al Sol, si se prescinde de los otros cuerpos del sistema solar, por ser demasiado pequeños, y de las otras estrellas, por estar demasiado lejanas. G. D. Birkhoff (1923) demostró que las condiciones (1) y (3) se infieren de la condición (2) y son, por lo tanto, superfluas.

Si t es la coordenada temporal y r, θ y φ son coordenadas polares con origen en el centro de simetría espacial, el ELEMENTO DE LÍNEA de la solución exterior de Schwarzschild está dado por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$$

donde utilizamos unidades tales que la velocidad de la luz c y la constante gravitacional G sean ambas iguales a 1, y m es una constante de integración que se identifica con la masa del cuerpo central. Se advertirá que el denominador del segundo término es igual a 0 si $r = 2m$. Por lo tanto, ds no está definido en ningún punto que satisfaga esta condición. Pero hay otras cartas (sistemas de coordenadas) del campo de Schwarzschild que están definidas en esos puntos. El conjunto de dichos puntos forma el *horizonte de Schwarzschild*, que deslinda un AGUJERO NEGRO generado por colapso gravitacional. Como es obvio, ds tampoco está definido si $r = 0$, esto es, sobre el eje de simetría del espaciotiempo. Esta SINGULARIDAD no puede eliminarse mediante un cambio de coordenadas.

La *solución interior de Schwarzschild* prescinde de la condición (4) y supone que el espacio esféricamente simétrico está ocupado por un fluido perfecto, sin convección y sin rotación. Aunque esta representación del interior de una estrella entraña una idealización brutal, Oppenheimer y Snyder (1939) la utilizaron con provecho en su trabajo pionero sobre colapso gravitacional. La solución interior se deja fundir con la solución exterior si sus dos constantes de integración cumplen ciertas condiciones. Estas implican que la presión del fluido cae a 0 en la superficie finita y perfectamente esférica de la estrella y que el TENSOR DE ENERGÍA es continuo sobre esa superficie y a ambos lados de ella.

spin (A. *Spin*, F. *spin*, I. *spin*). Momento angular intrínseco de las partículas. La palabra inglesa *spin* significa giro o rotación en torno a un eje central (como en el caso de una peonza), pero en física de partículas se usa para designar una propiedad cuántica sin contrapartida en el mundo clásico. En contraste con el momento angular orbital, el spin no es continuo, sino discreto, cuantizado en unidades enteras (0, 1) o semienteras (½,¾) de $\hbar = h/2\pi$, donde h es la CONSTANTE DE PLANCK. Las partículas se clasifican en BOSONES y FERMIONES, según que su spin sea entero o semientero. Las partículas que constituyen la materia corriente son fermiones; las que transmiten las fuerzas son bosones. En la física cuántica relativista (↗ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA, TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS), el spin determina cómo se transforman los campos cuánticos bajo una TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ.

Hasta 1920, la "vieja teoría cuántica" caracterizaba cada estado estacionario de un electrón —en el que este supuestamente orbita, sin ganar ni perder energía, alrededor del núcleo de un átomo— mediante tres "números cuánticos", n, k y m, que dependen respectivamente del radio de la órbita, del momento angular orbital y de la inclinación de este respecto a la dirección del campo magnético. En 1920, Sommerfeld introdujo el número cuántico j, que hizo depender de la *suma* del *momento angular orbital* y el momento angular del núcleo atómico. Esperaba que, al caracterizar los estados estacionarios del electrón mediante cuatro números podría explicar finalmente las complicaciones del EFECTO ZEEMAN (anómalo) que se observa en las líneas espectrales originadas en la transición de un estado estacionario a otro cuando esta ocurre en presencia de un campo magnético. Sommerfeld no alcanzó la explicación buscada, pero Pauli (1925a,b) logró darla gracias a dos radicales innovaciones: por una parte, desligó el cuarto número de toda asociación con cantidades clásicas y lo interpretó como expresivo de una "peculiar duplicidad (*Zweideutigkeit*) en las propiedades cuánticas del electrón luminoso, no descriptible en términos clásicos"; por otra, postuló el PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN, en virtud del cual no puede haber dos electrones a la vez en un estado caracterizado por los mismos cuatro números. También en 1925, Uhlenbeck y Goudsmit adelantaron la hipótesis de que el electrón posee un momento angular intrínseco, o *spin*, cuantizado en unidades semienteras de $\hbar$, la cual permitiría explicar "los importantes resultados alcanzados por Pauli sin tener que suponer una 'dualidad' no mecánica en los enlaces del electrón". Uhlenbeck y Goudsmit concibieron dicho momento angular clásicamente, atribuyéndolo a la rotación del electrón —una pequeña bolita— en torno a su eje (de donde el término *spin*). Esta suposición presentaba enormes dificultades; desde luego, para tener un momento angular igual a ½$\hbar$ el electrón tendría que rotar con una velocidad ecuatorial superior a la de la luz. Pero la MECÁNICA CUÁNTICA fundada en ese mismo año prescinde de tales re-

presentaciones. Aunque el concepto de *spin* no forma parte de ella —tal como fue creada por Heisenberg y Schrödinger—, se le pudo adjuntar la elegante teoría de los operadores de spin, mutuamente incompatibles, S_x, S_y y S_z, cuyos valores propios miden —en múltiplos enteros o semienteros de $\hbar$— el componente de spin de una partícula referida a las coordenadas cartesianas *x*, *y*, *z*, en la dirección del eje de la coordenada respectiva. La decisión de añadirle este parche a la mecánica cuántica original (no relativista) fue brillantemente vindicada en 1928, con la aparición de la ecuación (relativista) de Dirac, de la cual se deduce que el electrón tiene spin (↗ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA). La concepción del spin como una propiedad irreductible, que caracteriza a cada partícula elemental —como la masa o la carga eléctrica—, se ha consolidado con el desarrollo de la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS y sus exitosas predicciones: Pauli (1940) demostró la conexión entre el spin y la ESTADÍSTICA DE PARTÍCULAS, en virtud de la cual la clasificación de estas últimas como bosones o como fermiones depende de la índole del spin respectivo.

subconjunto (A. *Teilmenge*, F. *sous-ensemble*, I. *subset*). Un conjunto *A* es subconjunto de otro conjunto *B* si y solo si *A* está incluido en *B*, $A \subseteq B$, es decir, si y solo si cada elemento de *A* es elemento de *B*: $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Adviértase que, según esta definición, si *A* es un conjunto cualquiera, *A* mismo y el conjunto vacío $\varnothing$ son ambos subconjuntos de *A*: $\varnothing \subseteq A \subseteq A$. Un *subconjunto propio* de *A* es un subconjunto de *A* que es distinto de *A*. El conjunto de todos los subconjuntos de *B* constituye el conjunto potencia de *B*, $\wp B = \{X : X \subseteq B\}$. A veces se usa 'parte' como sinónimo de 'subconjunto'.

subteoría (A. *Untertheorie*, F. *sous-théorie*, I. *subtheory*). Una teoría T es una subteoría de otra teoría Σ si y solo si cada sentencia de T es también una sentencia de Σ, es decir, si $T \subseteq \Sigma$. Si T es una subteoría de Σ, entonces Σ es una extensión de T.

subvariedad lineal (A. *lineare Untermannigfaltigkeit*, F. *sous-variété linéaire*, I. *linear submanifold*). Sea $\mathcal{Y}$ una parte no vacía de un ESPACIO DE HILBERT $\mathcal{H}$. $\mathcal{Y}$ es una *subvariedad lineal* de $\mathcal{H}$ si toda combinación lineal de vectores en $\mathcal{Y}$ está contenida en $\mathcal{Y}$. $\mathcal{Y}$ es entonces un espacio vectorial (con las operaciones de $\mathcal{H}$ restringidas a $\mathcal{Y}$). Sin embargo, $\mathcal{Y}$ puede no ser un espacio de Hilbert (con dichas operaciones), ya que puede haber una SECUENCIA DE CAUCHY en $\mathcal{Y}$ que no converge a un vector en $\mathcal{Y}$. Si la subvariedad lineal $\mathcal{Y}$, con las operaciones de $\mathcal{H}$ restringidas a $\mathcal{Y}$, es un espacio de Hilbert, se dice que $\mathcal{Y}$ es un *subespacio* de $\mathcal{H}$.

sucesión. ↗SECUENCIA.

supernova (A. *Supernova*, F. *supernova*, I. *supernova*). Muerte explosiva de una estrella que durante un periodo (de unos días) la hace brillar más luminosamente que toda la galaxia que la contiene. Hay diversos tipos de supernovas. Las de tipo II son estrellas masivas (por ejemplo, la 1987A tenía 18 veces más masa que nuestro Sol) que, tras convertir casi todo su material por fusiones sucesivas en hierro (un elemento especialmente estable) y careciendo de combustible que fusionar, colapsan por la acción de la gravedad, produciendo una onda de choque que transforma y lanza al espacio exterior las capas exteriores de la estrella. Todos los elementos químicos más pesados que el hierro se forman en explosiones de supernovas. Las supernovas de tipo I*a* son inicialmente enanas blancas de un sistema binario que van atrayendo materia de su estrella compañera hasta sobrepasar el límite de Chandrasekhar (1,4 masas solares, aproximadamente), momento en que la enana blanca colapsa sobre sí misma y explota completamente, formando una cáscara luminosa expansiva. Lo interesante es que todas las supernovas de tipo I*a* parecen tener casi la misma luminosidad intrínseca, por lo que pueden servir como candelas estándar para medir distancias (comparando su luminosidad aparente con la intrínseca) a las galaxias en que se encuentran, por muy alejadas que estén.

superposición (A. *Überlagerung*, F. *superposition*, I. *superposition*). Dos o más FUERZAS aplicadas en un mismo punto, varias ONDAS coexistentes en una misma región del espacio, y otras entidades físicas por el estilo, se *superponen* para formar juntas otra de la misma clase. Tales objetos se suelen representar mediante vectores, y su *superposición*, mediante otro vector que es una combinación lineal de aquellos (↗ESPACIO VECTORIAL). Cuando se habla de tales superposiciones, conviene no perder de vista que, si $\mathscr{E}$ es un espacio vectorial n-dimensional real o complejo, cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathscr{E}$ igual a una combinación lineal o superposición de los vectores $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in \mathscr{E}$ es igual asimismo a infinitas combinaciones lineales diferentes de otros tantos n-tuplos de vectores de $\mathscr{E}$. (↗MECÁNICA CUÁNTICA, PROBLEMA CUÁNTICO DE LA MEDICIÓN.)

supremo (A. *Supremum, obere Grenze*, F. *suprême*, I. *supremum, least upper bound*). Sea K un conjunto parcialmente ordenado por la relación $x \preccurlyeq y$ (↗ORDEN PARCIAL). Sea $C \subseteq K$ un conjunto no vacío. $m \in K$ es el *supremo* de C si y solo si (i) $x \preccurlyeq m$ para todo $x \in C$, y (ii) $m \preccurlyeq r$ para cualquier $r \in K$ tal que $x \preccurlyeq r$ para todo $x \in C$.

T

tabla de verdad (A. *Wahrheitstafel*, F. *table de vérité*, I. *truth table*). Procedimiento de decisión para la validez de las fórmulas de la lógica proposicional. Una tal fórmula es válida si y solo si es satisfecha o verificada por todas las asignaciones posibles de valores veritativos (0 o 1) a sus letras proposicionales. Escribamos en forma de tabla primero todas las posibles asignaciones de valores veritativos a las letras proposicionales de la fórmula dada, luego el resultado de calcular los valores que las funciones veritativas representadas por los conectores asignan a las subfórmulas y finalmente el valor de la fórmula misma. Así obtenemos una tabla de verdad que nos permite comprobar o decidir si la fórmula dada es válida (una tautología), insatisfacible (una antilogía) o semánticamente neutral. Si en la columna situada bajo la fórmula se repite en cada fila el 1, se trata de una tautología. Si lo que se repite es el 0, se trata de una antilogía. Si en la columna aparece tanto el 0 como el 1, la fórmula es semánticamente neutral. Por ejemplo, echemos un vistazo a la tabla de verdad de $\neg(A \wedge B \Rightarrow B)$:

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B \Rightarrow B)$	$\neg(A \wedge B \Rightarrow B)$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

La tabla permite comprobar que $(A \wedge B)$ es un fórmula semánticamente neutral, mientras que $(A \wedge B \Rightarrow B)$ es una tautología y $\neg(A \wedge B \Rightarrow B)$ es una antilogía.

tabla periódica de los elementos químicos (A. *Periodensystem der Elemente*, F. *tableau périodique des éléments*, I. *Periodic table of chemical elements*). En una lista de los elementos químicos en el orden ascendente de los respectivos NÚMEROS ATÓMICOS, puede observarse la aparición periódica de

elementos con propiedades químicas similares. Este fenómeno notable ha sido totalmente explicado por la teoría cuántica de la estructura atómica iniciada por Niels Bohr (1913) y perfeccionada después de 1925 con los recursos de la MECÁNICA CUÁNTICA. El arreglo de dicha lista en líneas sucesivas, de modo que los elementos similares aparezcan reunidos en columnas, se llama *tabla periódica*. Según se la presenta normalmente, los elementos inertes, helio, neón, argón, kriptón, xenón y radón, forman la última columna de la tabla; fluor, cloro, bromo, yodo y astatino, la penúltima, etc.

Poco antes de 1870, varios químicos advirtieron independientemente la repetición periódica de las propiedades químicas en una lista de elementos ordenados según el PESO ATÓMICO. Pero solo Mendeleieff vio en ello la clave de la química y se atrevió a predecir la existencia y ofrecer descripciones bastante precisas de elementos a la sazón desconocidos, que llenarían vacíos en la lista. El descubrimiento del escandio (Sc) en 1879 le ganó el reconocimiento de sus pares.

En unos cuantos casos, la tabla periódica de los elementos tiene que desviarse del orden de los pesos atómicos. Así, para quedar en la columna pertinente, el cobalto, con peso atómico 58,93, debe enumerarse antes que el níquel (58,91). Estas anomalías se resolvieron con el descubrimiento de los ISÓTOPOS. En el caso citado, ahora sabemos que el cobalto, elemento N° 27, precede justamente al níquel (N° 28), mientras que su peso atómico, igual a la masa atómica de su único isótopo ^{59}Co, supera al peso atómico del níquel, que es el promedio ponderado de las masas atómicas de cinco isótopos, ^{58}Ni (68,27%), ^{60}Ni (26,1%), ^{61}Ni (1,13%), ^{62}Ni (3,59%) y ^{64}Ni (0,91%). La teoría cuántica del átomo resuelve también otra importante anomalía de la tabla periódica, a saber, que los quince elementos lantánidos (N°s. 57-71) tienen que colocarse todos en un solo lugar de la tabla, entre el bario (N° 56) y el hafnio (N° 72), y los quince elementos actínidos (N°s. 89-103) van todos entre el radio (N° 88) y el rutherfordio (N° 104).

tabula rasa. Esta expresión latina significa 'tablilla lisa' y alude a las tablillas cubiertas de cera que los romanos usaban para escribir. Vale tanto, pues, como 'hoja de papel en blanco'. Se la emplea metafóricamente para describir el estado del intelecto humano al nacer, de acuerdo con cierta filosofía empirista. Como nadie ha sostenido nunca que el recién nacido sea una hoja en blanco también en lo que respecta a sus apetitos y emociones, es claro que la metáfora de la *tabula rasa* supone una separación injustificada entre las funciones teóricas y prácticas de la mente.

tautología (A. *Tautologie*, F. *tautologie*, I. *tautology*). La palabra 'tautología' significa etimológicamente 'repetición de lo mismo'. Una tautología es una verdad vacía, una proposición que es trivialmente verdadera en función de su

mera forma lógica elemental, una proposición compatible con cualquier situación posible, que no excluye nada y por tanto no es informativa. Esta noción informal se precisa formalmente diciendo que una tautología es una proposición representable mediante una fórmula tautológica, suponiendo que la lógica formal ya ha definido lo que es una fórmula tautológica. La lógica formal clásica tiene varios niveles y en todos ellos pueden definirse las tautologías. Básicamente la noción de tautología es una noción de la lógica proposicional, pero puede extenderse a la lógica de primer orden (y, *mutatis mutandis*, a las de orden superior) mediante el procedimiento abajo indicado.

En la lógica proposicional la noción de *tautología* coincide con la de fórmula lógicamente válida, es decir, con la de fórmula verificada por todas las asignaciones posibles de valores veritativos a sus letras proposicionales. Por ejemplo, la fórmula que corresponde al principio clásico de no contradicción, $\neg(A \wedge \neg A)$, es una tautología. En este nivel proposicional de la lógica también la consecuencia tautológica coincide con la consecuencia a secas, y la equivalencia tautológica coincide con la equivalencia lógica.

Una fórmula insatisfacible (o contradictoria) de la lógica proposicional puede ser llamada una *antilogía*. Así como una tautología es verificada por todas las asignaciones de valores veritativos a sus letras proposicionales, una antilogía no es verificada por ninguna asignación. Una fórmula cualquiera φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ es una antilogía, y, a la inversa, decir que φ es una antilogía equivale a decir que $\neg\varphi$ es una tautología.

En la lógica de primer orden, la noción de tautología requiere una introducción más compleja, que pasa por la simulación o representación de la lógica proposicional en la lógica de primer orden. En esa simulación, el papel de las letras proposicionales lo desempeñan las FÓRMULAS PRIMAS.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal de primer orden. Sea Φ el conjunto de sus fórmulas primas. Una asignación veritativa w es una función w: $\Phi \rightarrow \{0,1\}$ que asigna un valor veritativo (0 o 1) a cada fórmula prima de $\mathcal{L}$. Cualquier asignación veritativa w a las fórmulas primas de $\mathcal{L}$ determina una interpretación veritativa $\mathfrak{I}_w$: $\mathcal{L} \rightarrow \{0,1\}$ de todas las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$ del siguiente modo:

$\mathfrak{I}_w(\varphi)$	$= w(\varphi)$	si φ es una fórmula prima
$\mathfrak{I}_w(\neg\varphi)$	$= 1$	si $\mathfrak{I}_w(\varphi) = 0$
	$= 0$	si $\mathfrak{I}_w(\varphi) = 1$
$\mathfrak{I}_w(\varphi \wedge \psi)$	$= 1$	si $\mathfrak{I}_w(\varphi) = \mathfrak{I}_w(\psi) = 1$
	$= 0$	en otro caso
$\mathfrak{I}_w(\varphi \vee \psi)$	$= 0$	si $\mathfrak{I}_w(\varphi) = \mathfrak{I}_w(\psi) = 0$
	$= 1$	en otro caso
$\mathfrak{I}_w(\varphi \Rightarrow \psi)$	$= 0$	si $\mathfrak{I}_w(\varphi) = 1$ y $\mathfrak{I}_w(\psi) = 0$
	$= 1$	en otro caso

$\Im_w(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ si $\Im_w(\varphi) = \Im_w(\psi)$
$= 0$ en otro caso

Una fórmula de primer orden φ es una *tautología* si y solo si para cada asignación veritativa w, $\Im_w(\varphi) = 1$. Si φ es una tautología, φ es también una fórmula válida. Si una fórmula φ carece de cuantificadores y signo de identidad, entonces φ es una tautología si y solo si φ es lógicamente válida. Si en la fórmula φ no hay cuantificadores ni signo de identidad, entonces $\forall x_1 ... \forall x_n \varphi$ es lógicamente válida si y solo si φ es una tautología.

Una fórmula de primer orden φ es una *antilogía* si y solo si para cada asignación veritativa w, $\Im_w(\varphi) = 0$. Si φ es una antilogía, φ es también una fórmula insatisfacible.

φ es una *consecuencia tautológica* de Σ si y solo si para cada asignación veritativa w, si $\Im_w(\psi) = 1$ para cada $\psi \in \Sigma$, entonces $\Im_w(\varphi) = 1$. La fórmula φ es una tautología si y solo si φ es una consecuencia tautológica del conjunto vacío. ψ es una consecuencia tautológica de φ si y solo si $(\varphi \Rightarrow \psi)$ es una tautología. Si la fórmula de primer orden φ es una consecuencia tautológica de Σ, entonces φ es también una consecuencia de Σ.

φ y ψ son *tautológicamente equivalentes* si y solo si para cada asignación veritativa w, $\Im_w(\varphi) = \Im_w(\psi)$. Las fórmulas φ y ψ son tautológicamente equivalentes si y solo si $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ es una tautología. Si las fórmulas de primer orden φ y ψ son tautológicamente equivalentes, entonces también son lógicamente equivalentes.

taxón (A. *Taxon*, F. *taxon*, I. *taxon*). Grupo de organismos reconocido como una unidad en un nivel cualquiera de la jerarquía de clasificaciones propuesta por la taxonomía. Según su categoría taxonómica, un taxón puede ser, por ejemplo, una ESPECIE, o un género, o una familia, o un orden, o una clase, o un filo, o un reino. La sistemática biológica clasifica los organismos en taxones de diversa categoría. Todas estas clasificaciones pretenden ser naturales en el sentido de reflejar las relaciones de parentesco y descendencia realmente existentes en la naturaleza. La taxonomía es la teoría de la clasificación sistemática. Hay diversas escuelas de taxonomía. Una de las más importantes es la cladista, fundada por Hennig. Según la *taxonomía cladista*, un taxón aceptable (de categoría superior a especie) ha de ser monofilético y holofilético. Un taxón es *monofilético* si todos sus miembros descienden de una especie ancestral común. Un taxón es *holofilético* si incluye a todos los descendientes de una especie ancestral común. Un taxón monofilético, pero no holofilético, se llama parafilético; es lo que ocurre, por ejemplo, con la clase de los reptiles. Según la taxonomía cladista, los taxones parafiléticos no son aceptables.

temperatura (A. *Temperatur*, F. *température*, I. *temperature*). Concepto desarrollado desde el siglo XVII para especificar cuantitativamente la condición o cualidad de los cuerpos en virtud de la cual provocan, al tocarlos, la sensación de calor o de frío. Llamemos 'sensaciones térmicas' a estas sensaciones y 'estado térmico' a esa condición. La índole y la intensidad de las sensaciones térmicas reflejan respectivamente la *dirección* y la *velocidad* a que el CALOR atraviesa nuestra piel, variables que, a su vez, dependen del estado térmico tanto de nuestro cuerpo como de ese cuerpo contiguo que se quiere juzgar. Por ejemplo, si sostengo la mano derecha sobre una fogata mientras empuño cubos de hielo con la izquierda y enseguida introduzco ambas manos en una olla llena de agua potable, sentiré a la vez frío en la derecha y tibieza en la izquierda. Un concepto útil de temperatura no puede, entonces, basarse simplemente en nuestras sensaciones térmicas. Pero estas nos permiten construir un orden tosco entre los estados térmicos, que facilita el establecimiento de criterios objetivos y un orden preciso. Si A y B son dos cuerpos que tocamos alternativamente con la misma mano, y A nos da frío mientras que B nos da calor, decimos que la *temperatura* $t(A)$ de A es menor que la *temperatura* $t(B)$ de B (y que $t(B)$ es mayor que $t(A)$). Decimos lo mismo si ambos nos dan frío pero A causa una sensación de frío más intenso que B, o si ambos nos dan calor pero B causa una sensación de calor más intenso que A. Si es imposible distinguir entre las sensaciones térmicas que nos causa el contacto descrito con A y B, decimos que $t(A) = t(B)$. Entonces se puede establecer que, con la imprecisión inherente a tales constataciones: (1) la relación de igualdad entre temperaturas es una equivalencia; (2) la relación 'mayor que' es transitiva; (3) si A y B son puestos en contacto en circunstancias en que $t(A) < t(B)$, sus respectivas temperaturas varían hasta igualarse al cabo de un tiempo; (4) los cambios de temperatura tienen efectos cuya observación no depende de nuestras sensaciones térmicas, el más familiar de los cuales consiste en que todos los cuerpos se dilatan con los aumentos y se contraen con las disminuciones de temperatura, en una proporción característica de las sustancias de que constan (si bien el agua tiene el comportamiento contrario entre 0 °C y 3,8 °C). Midiendo la dilatación y contracción del aire encerrado en un recipiente, Galileo (hacia 1597) pudo asignar valores numéricos (*grados*) a la temperatura de la atmósfera circundante. Hacia 1624 los instrumentos para medir la temperatura ya se llamaban *termómetros*. El termómetro de mercurio —basado en los cambios de volumen de una columna de mercurio encerrada en un tubo capilar de vidrio sellado al vacío— fue inventado probablemente por Fernando II, duque de Toscana. Como es obvio, mediante un termómetro solo puede asignarse un grado de temperatura a un objeto contiguo que no le quita ni le cede calor, esto es, un objeto que forma con el termómetro un sistema *en equilibrio térmico*. Es claro, además, que una escala de temperatura definida del modo descrito tiene que ser relativa al termómetro

utilizado para definirla. En todo caso, el uso de termómetros confirma y afina las constataciones (1)-(4) y confiere precisión al orden basado en ellas.

Hacia 1715 Fahrenheit fabricó los primeros termómetros comparables entre sí; la escala de temperatura definida por él se utiliza aún en Estados Unidos. En el resto del mundo se usa comúnmente la introducida por Celsius en 1641, la cual, en su forma original, puede caracterizarse como sigue. Sea V el mayor volumen que adquiere la columna de mercurio de un termómetro a nivel del mar, cuando pasa de un recipiente con agua en vías de congelarse a otro con agua en ebullición; se fija en cero grados el "punto de congelación" del agua —esto es, la temperatura del primer recipiente— y se estipula que la temperatura aumenta en un grado cada vez que en el volumen de la columna de mercurio crece en 0,01 V; por consiguiente, el "punto de ebullición" del agua —esto es, la temperatura del segundo recipiente— queda fijado en cien grados. Actualmente, claro, los termómetros graduados según la escala Celsius no se calibran de este modo, sino por termómetros ajustados a la escala TERMODINÁMICA de temperatura absoluta que se explica enseguida.

La escala termodinámica de temperatura definida por Lord Kelvin descansa en los resultados sobre *máquinas térmicas* obtenidos por Sadi Carnot. Una máquina térmica es un aparato que extrae de una fuente de energía A cierta cantidad de calor Q_A y entrega una cantidad menor de calor Q_B a un medio B más frío que A, después de convertir en TRABAJO mecánico la diferencia $W = Q_A - Q_B$. Por definición, la *eficiencia* de la máquina es igual a $W/Q_A = 1 - (Q_B/Q_A)$. Carnot concibió la máquina térmica ideal que lleva su nombre y demostró que (1) todas las MÁQUINAS DE CARNOT que trabajan entre dos temperaturas dadas son igualmente eficientes y (2) cualquier otra máquina térmica que trabaje entre esas mismas temperaturas es menos eficiente que las máquinas de Carnot. Ello implica que la eficiencia de una máquina de Carnot depende exclusivamente de las dos temperaturas entre las cuales trabaja; hay pues una función φ tal que, con el simbolismo utilizado arriba, $Q_B/Q_A = \varphi(t_A,t_B)$. Fijando una temperatura cualquiera t_0, es posible introducir una función de la temperatura $\theta(t) = k\varphi(t_0,t)$, donde k es una constante arbitraria, igual a un número real positivo. k es el único ingrediente convencional en esta definición. Entonces, $Q_B/Q_A = \theta(t_B)/\theta(t_A)$, y la eficiencia de una máquina de Carnot alcanza el valor 1 (rendimiento del 100%) si y solo si entrega calor a la temperatura t tal que $\theta(t) = 0$. La función θ preserva el orden de las temperaturas: $\theta(t_1) > \theta(t_2) \Leftrightarrow t_1 > t_2$. De otro modo, una máquina de Carnot en marcha atrás podría extraer una cantidad de calor Q_2 de una fuente a temperatura t_2 y entregar una cantidad igual o menor de calor Q_1 a una temperatura mayor t_1, sin tomar energía de fuentes externas, contrariando el segundo principio de la termodinámica. Por lo tanto, hay una correspondencia biunívoca entre los valores de θ y las temperaturas asignadas por

cualquier escala. La escala termodinámica de temperatura T se define simplemente mediante la ecuación $\theta(T) = T$. Tal escala es *absoluta*: depende de la naturaleza de las cosas y no de la elección de un termómetro. Para facilitar la conversión de las temperaturas medidas en la escala Celsius, la unidad de la escala termodinámica, hoy llamada KELVIN (abreviado K), se definió de modo que una diferencia de 1 K sea igual a una diferencia de 1°C. Ello se logra estipulando que 1 K es igual a la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua, esto es, de aquel estado del agua en que ella subsiste en sus tres fases, sólida, líquida y gaseosa, dentro de un recipiente que no cede ni recibe calor.

A volumen constante, un GAS IDEAL ejerce una presión proporcional a su temperatura termodinámica; por lo tanto, si tal gas existiera podría fabricarse con él un termómetro perfecto para medir temperaturas absolutas. Otro ente ideal cuyo comportamiento se ajusta por definición a la escala termodinámica es la RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO, cuya intensidad se distribuye entre las distintas frecuencias, conforme a la ley de Planck, según una curva diferente para cada temperatura. De hecho, según una convención internacional adoptada en 1948, las temperaturas superiores a 1337,58 K se entienden definidas por la ley de Planck. Las temperaturas más accesibles —entre 13,81 K y 1337,58 K— se determinan mediante un conjunto de instrumentos precisamente especificado (resistencias eléctricas, termocuplas, pirómetros ópticos) y calibrados, en principio, por la escala termodinámica a través de una serie de puntos fijos, como el punto triple del hidrógeno (13,81 K), el punto de ebullición del neón (27,102 K), el punto triple del agua (273,16 K = 0,01°C), el punto de congelación del oro (1337,58 K) y otros.

La MECÁNICA ESTADÍSTICA ha permitido reconcebir la *temperatura* como una propiedad de enormes colecciones de moléculas: la temperatura de un sistema en equilibrio térmico es el promedio de las energías cinéticas de las moléculas que lo forman.

tensor (A. *Tensor*, F. *tenseur*, I. *tensor*). Llámase *tensor de rango r* a cualquier elemento del PRODUCTO TENSORIAL de r ESPACIOS VECTORIALES sobre un mismo CUERPO.

Por su figuración en la física contemporánea, nos interesa particularmente el concepto de tensor en un punto p de una VARIEDAD DIFERENCIABLE $\mathcal{M}$. Diremos que τ es un *tensor de tipo* (r,s) en $p \in \mathcal{M}$ si τ es un elemento del producto tensorial de r copias del ESPACIO TANGENTE a $\mathcal{M}$ en p por s copias del espacio cotangente a $\mathcal{M}$ en p; vale decir, si

$$\tau \in \underbrace{T_p\mathcal{M} \otimes \ldots \otimes T_p\mathcal{M}}_{r \text{ veces}} \otimes \underbrace{T_p\mathcal{M}^* \otimes \ldots \otimes T_p\mathcal{M}^*}_{s \text{ veces}}$$

Entonces τ es un tensor de rango $r+s$. Como $T_p\mathcal{M}$ se identifica con el ESPACIO DUAL de $T_p\mathcal{M}^*$, τ resulta ser una FUNCIÓN MULTILINEAL (específicamente, $(r+s)$-lineal) definida en $(T_p\mathcal{M}^*)^r \times (T_p\mathcal{M})^s$, con valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, según $\mathcal{M}$ sea una variedad real o compleja. Si $s = 0$, se dice comúnmente que τ es un tensor *contravariante* de rango r; si $r = 0$, se dice que τ es un tensor *covariante* de rango s. Según estas estipulaciones, es claro que un covector en p es un tensor de tipo (0,1), covariante de rango 1, y que, en virtud de la identificación de $T_p\mathcal{M}$ con $T_p\mathcal{M}^{**}$, un vector tangente en p puede verse como un tensor de tipo (1,0), contravariante de rango 1.

Hay también, por cierto, tensores de rango $(r+s)$ en $p \in \mathcal{M}$ que son elementos del producto tensorial de r copias de $T_p\mathcal{M}$ y s copias de $T_p\mathcal{M}^*$ dispuestas en otro orden que el arriba descrito. En tales casos, la clasificación de cada tensor debe especificarse de un modo menos simple que el utilizado hasta aquí. Por ejemplo, si $r = 2$ y $s = 3$ y nuestro tensor pertenece a $T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M}^* \otimes T_p\mathcal{M}^* \otimes T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M}^*$, se dice que es un tensor de rango 5, contravariante en los índices primero y cuarto y covariante en los índices segundo, tercero y quinto.

En la literatura —también en este diccionario— se llama a veces *tensor en la variedad* $\mathcal{M}$ a lo que se ha definido, en el artículo CAMPO, como un *campo tensorial* en $\mathcal{M}$, esto es, una función lisa que asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un tensor en p (de un tipo determinado).

tensor de energía (A. *Energie-Tensor*, F. *tenseur d'energie*, I. *energy tensor*). Campo tensorial simétrico de rango 2 utilizado en la teoría general de la RELATIVIDAD para representar la distribución de la materia y la energía no gravitacional en el espaciotiempo.

Max von Laue (1911) mostró que, en el marco de la teoría especial de la relatividad, un continuo material debería representarse mediante un campo tensorial simétrico de rango 2 sobre el espaciotiempo de Minkowski, el cual se concibe por analogía con el tensor de tensión de la mecánica clásica de continuos (sobre el espacio euclídeo de tres dimensiones), añadiendo a los nueve componentes espaciales de este tensor un componente temporal y seis componentes mixtos. Los componentes espaciales $T_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu,\nu \leq 3$) del tensor de von Laue representan —tal como en el tensor clásico— las tensiones operantes en cada punto del continuo si $\mu = \nu$, y las fuerzas de cizalladura si $\mu \neq \nu$; el componente temporal T_{00} representa la densidad de energía, y los componentes mixtos $T_{0\mu} = T_{\mu 0}$, la densidad del flujo de momento cinético. El *tensor de energía* de la teoría general de la RELATIVIDAD es la generalización del tensor de von Laue al espaciotiempo de esta teoría; de ahí que en la literatura más antigua se lo llame *tensor de tensión, energía y momento* o, más concisamente, *tensor de tensión y energía*. Sin embargo, no debe perderse de

vista que, como en esta teoría las coordenadas no tienen una significación física clara e invariable, tampoco se le puede atribuir una significación física única a los componentes de un campo tensorial.

En las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN, el tensor de energía representa las fuentes del campo gravitacional. Hacia el fin de sus días, Einstein criticó severamente esta práctica suya; cualquier especificación del tensor de energía es, según él, puramente provisional, "un truco más o menos fenomenológico para representar la estructura de la materia, y su figuración en las ecuaciones impide determinar hasta qué punto los resultados obtenidos son independientes del supuesto especial sobre la constitución de la materia que se haya adoptado" (Einstein, Infeld y Hoffmann, 1938, p. 65).

tensor de Ricci (A. *Ricci-Tensor*, F. *tenseur de Ricci*, I. *Ricci tensor*). ↗CURVATURA.

tensor de Riemann (A. *Riemannscher Tensor*, F. *tenseur de Riemann*, I. *Riemann tensor*). ↗CURVATURA.

teorema (A. *Lehrsatz*, F. *théorème*, I. *theorem*). En matemáticas suele llamarse *teorema* a un resultado teórico importante que ha sido ya demostrado y del que conviene tomar buena nota como punto de partida de otras pruebas y aplicaciones. Así hablamos del teorema de Pitágoras, o del teorema de Taylor, o del teorema de incompletud de Gödel. Los teoremas en este sentido son relativamente pocos y con frecuencia llevan el nombre de su descubridor. Una teoría formal es un conjunto de sentencias (de un lenguaje formal) clausurado respecto a la relación de consecuencia. Cada una de esas sentencias es un teorema de la teoría. En este sentido, la teoría se identifica con el conjunto de sus teoremas, toda teoría tiene una infinidad de teoremas y tan teoremas son los axiomas como los teoremas en el primer sentido (los importantes) y la multitud de resultados triviales que puedan obtenerse en la teoría.

teorema de Bayes (A. *Bayessches Theorem*, F. *théorème de Bayes*, I. *Bayes's theorem*). Teorema del CÁLCULO DE PROBABILIDADES que fue utilizado por Thomas Bayes (1763) y que, según el llamado BAYESIANISMO, juega un papel central en la INFERENCIA ESTADÍSTICA.

Denotamos con $p(X)$ la PROBABILIDAD del aserto X, y con $p(X|Y)$ la PROBABILIDAD CONDICIONAL de X, dado Y. En su forma más simple, el *teorema de Bayes* dice que, dado un evento E, cuya probabilidad $p(E)$ previa a su comprobación no sea nula, la probabilidad $p(H|E)$ de la hipótesis H está dada por

$$p(H \mid E) = p(H)\frac{p(E \mid H)}{p(E)} \quad (1)$$

Si las hipótesis mutuamente excluyentes $H_1, \ldots, H_n$ abarcan todas las alternativas posibles, la probabilidad previa de E es igual a la suma $\sum_{i=1}^{n} p(E \mid H_i)p(H_i)$ de las probabilidades condicionales de E bajo cada una de estas hipótesis, multiplicadas por la probabilidad de la hipótesis respectiva. Por lo tanto, si, para algún entero positivo $k \leq n$, $H = H_k$, la ecuación (1) pasa a ser:

$$p(H_k \mid E) = \frac{p(E \mid H_k)p(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(E \mid H_i)p(H_i)} \tag{2}$$

El teorema de Bayes se extiende asimismo al caso en que p es una distribución continua de probabilidades.

teorema de Bell (A. *Bellsche Satz*, F. *théorème de Bell*, I. *Bell's theorem*). Teorema del CÁLCULO DE PROBABILIDADES descubierto por J. S. Bell (1964) en virtud del cual las estadísticas generadas por ciertos experimentos —del tipo ideado por EPR (↗PARADOJA DE EINSTEIN, PODOLSKY Y ROSEN)— satisfacen necesariamente ciertas desigualdades, a menos que se descarten ciertos supuestos muy arraigados sobre los objetos físicos, sus propiedades y relaciones. No hay unanimidad en la caracterización de estos supuestos, pero, sin mayor precisión, podemos describirlos así: tradicionalmente se sobrentiende que los objetos físicos que ocupan una extensión en el espacio constan de partes distantes entre sí y que la intervención sobre una de esas partes no puede afectar a las demás sin que los efectos de esa intervención se propaguen de un modo físicamente viable a través del espacio intermedio; se sobrentiende también que el valor de una cantidad física en un lugar P del espacio en un momento dado no puede depender de la decisión de medir o no esa u otra cantidad en otro lugar Q que en ese momento no esté comunicado con P. La importancia del teorema de Bell reside en que dichas desigualdades *no son satisfechas* por las predicciones estadísticas de la MECÁNICA CUÁNTICA, ni por los resultados de los mejores experimentos de ese tipo diseñados para ponerlas a prueba (Aspect *et al.*, 1981, 1982a, 1982b).

Hoy suele llamarse *teorema de Bell* a todo un género de teoremas afines, inspirados por el resultado inicial de Bell, que tienen implicaciones similares. Las explicaciones siguientes se basan en los trabajos de Clauser y Horne, Shimony y Holt (1969) y Clauser y Horne (1974). La demostración depende de un lema algebraico fácil de probar: si a, a', b, b', A y B son números reales tales que $0 \leq a,a' \leq A$ y $0 \leq b,b' \leq B$, estos números satisfacen la siguiente desigualdad:

$$-AB \leq ab - ab' + a'b + a'b' - Ba' - Ab \leq 0 \tag{1}$$

Consideremos una serie larga de experimentos en cada uno de los cuales un par de objetos O_1 y O_2, tras interactuar y quedar preparados de un modo estándar, se alejan respectivamente en la dirección de dos detectores, D_1 y D_2, suficientemente distantes para que (i) la interacción de D_1 con O_1 no pueda afectar a O_2 cuando interactúa con D_2, (ii) la interacción de D_2 con O_2 no pueda afectar a O_1 cuando interactúa con D_1 y (iii) el ajuste del detector D_k (k = 1,2) en el modo $\mathbf{m}_k$ no pueda afectar al ajuste simultáneo del otro detector. La probabilidad de que D_k reaccione a la llegada de O_k y la registre depende del ajuste controlable $\mathbf{m}_k$ impuesto al detector, y de parámetros incontrolables, que denotamos con λ; dicha probabilidad puede entonces denotarse con $p_k(\mathbf{m}_k,\lambda)$. Designemos con $p_{12}(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2,\lambda)$ a la probabilidad de una *coincidencia*, esto es, una detección simultánea de O_1 por D_1 ajustado en el modo $\mathbf{m}_1$ y de O_2 por D_2 ajustado en el modo $\mathbf{m}_2$. Conforme a los supuestos arraigados aludidos arriba, los requisitos de separación (i), (ii) y (iii) implican que la detección de O_1 por D_1 y de O_2 por D_2 son eventos independientes (↗INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA):

$$p_{12}(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2,\lambda) = p_1(\mathbf{m}_1,\lambda)p_2(\mathbf{m}_2,\lambda) \qquad (2)$$

Sea $\rho(\lambda)$ la distribución probabilística de los parámetros incontrolables sobre una larga serie de experimentos. Entonces la probabilidad de que el detector D_k, ajustado en el modo $\mathbf{m}_k$, registre el paso del objeto O_k está dada por

$$P_k(\mathbf{m}_k) = \int p_k(\mathbf{m}_k)\rho(\lambda)\,d\lambda \qquad (3)$$

y la probabilidad de detectar una coincidencia, por

$$P_{12}(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2) = \int p_{12}(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2,\lambda)\rho(\lambda)\,d\lambda \qquad (4)$$

Sean a y a′ dos ajustes posibles del detector D_1 y b y b′ dos ajustes posibles de D_2. En la desigualdad (1) ponemos $a = p_1(\mathrm{a},\lambda)$, $a' = p_1(\mathrm{a}',\lambda)$, $b = p_2(\mathrm{b},\lambda)$, $b' = p_2(\mathrm{b}',\lambda)$, y $A = B = 1$. Multiplicando la expresión así obtenida por $\rho(\lambda)$ e integrando sobre λ, se obtiene la *desigualdad de Clauser-Horne*, perteneciente al género *"teorema de Bell"*:

$$-1 \le P_{12}(\mathrm{a},\mathrm{b}) - P_{12}(\mathrm{a},\mathrm{b}') + P_{12}(\mathrm{a}',\mathrm{b}) + P_{12}(\mathrm{a}',\mathrm{b}') - P_1(\mathrm{a}') - P_2(\mathrm{b}) \le 0 \qquad (5)$$

De ella se infiere inmediatamente que

$$\frac{P_{12}(\mathrm{a},\mathrm{b}) - P_{12}(\mathrm{a},\mathrm{b}') + P_{12}(\mathrm{a}',\mathrm{b}) + P_{12}(\mathrm{a}',\mathrm{b}')}{P_1(\mathrm{a}') + P_2(\mathrm{b})} \le 1 \qquad (6)$$

Nuestra descripción abstracta se deja adaptar a diversos experimentos concernientes a la mecánica cuántica, cuyas predicciones no satisfacen la desigualdad (6). Tampoco la satisfacen los resultados experimentales efectivamente obtenidos con sistemas cuánticos. Aspect y sus colaboradores investigaron pares de fotones emitidos por un haz de átomos de calcio y polarizados correlativamente. Sean $N_{12}(\mathrm{a,b})$, $N_{12}(\mathrm{a,b'})$, $N_{12}(\mathrm{a',b})$ y $N_{12}(\mathrm{a',b'})$ las coincidencias registradas con los detectores D_1 y D_2 ajustados, respectivamente, a los planos de polarización alternativos **a** o **a′** y **b** o **b′**. Sean $N_1(\mathrm{a'})$ y $N_2(\mathrm{b})$, respectivamente, el número total de fotones detectados, por D_1 en el modo **a′** y por D_2 en el modo **b**. Dividiendo cada uno de estos seis números por el total N de fotones emitidos, se obtienen las frecuencias relativas de los eventos correspondientes, las cuales, si N es grande, deberían diferir poco de las respectivas probabilidades. En otras palabras, si N es grande,

$$\frac{N_{12}(\mathrm{a,b})-N_{12}(\mathrm{a,b'})+N_{12}(\mathrm{a',b})+N_{12}(\mathrm{a',b'})}{N_1(\mathrm{a'})+N_2(\mathrm{b})}\approx \frac{P_{12}(\mathrm{a,b})-P_{12}(\mathrm{a,b'})+P_{12}(\mathrm{a',b})+P_{12}(\mathrm{a',b'})}{P_1(\mathrm{a'})+P_2(\mathrm{b})} \quad (7)$$

donde el número N (que no se conoce, pues incluye un sinnúmero de fotones que escapan a la detección) ha sido eliminado simplificando la fracción del lado izquierdo. Para ciertos valores de los ángulos formados por los planos **a** y **a′** y por los planos **b** y **b′**, la fracción observada es mayor que 1, conforme a las predicciones de la mecánica cuántica y en franca violación de la desigualdad (6). Con dos simples aplicaciones del *modus tollens* caen entonces por tierra la ecuación (4) y los supuestos que la implican.

teorema de Bernoulli. ↗LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

teorema de Bernstein (A. *Bernsteinscher Satz*, F. *théorème de Bernstein*, I. *Bernstein's theorem*). Para cualesquiera conjuntos A y B, si hay una inyección de A en B y hay otra inyección de B en A, entonces A y B son biyectables entre sí. De aquí se sigue que si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$. Este teorema es trivial para los conjuntos finitos, pero difícil de probar para los infinitos. Fue conjeturado por Cantor y luego probado por Bernstein en 1905. Dedekind ya lo había probado antes, pero su prueba permaneció inédita.

teorema de Cantor (A. *Cantorscher Satz*, F. *théorème de Cantor*, I. *Cantor's theorem*). El conjunto potencia de un conjunto dado siempre tiene una cardinalidad mayor que ese conjunto dado. Para cada conjunto A, $|A| < |\wp A| = 2^{|A|}$.

Cantor (1890/1891) probó este teorema por el MÉTODO DIAGONAL. De aquí y del axioma del CONJUNTO POTENCIA se sigue que para cada cardinal κ siempre hay otro cardinal mayor, $|\wp\kappa| = 2^{\kappa} > \kappa$.

teorema de compacidad (A. *Endlichkeitssatz*, F. *théorème de finitude*, I. *compactness theorem*). Sea Γ un conjunto de fórmulas de primer orden. Si cada subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ entero es también satisfacible. Este teorema puede también formularse equivalentemente en función de la consecuencia: una fórmula α no puede ser una consecuencia de un conjunto infinito de fórmulas Γ sin ser a la vez una consecuencia de algún subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$. Si $\Gamma \vDash \beta$, entonces hay un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vDash \beta$. El teorema se llama de compacidad porque, reformulado en lenguaje topológico, afirma que cierta "topología elemental" de clases de realizaciones es compacta. También se conoce como teorema de finitud.

El teorema de compacidad es uno de los teoremas más fecundos de la semántica lógica o teoría de modelos. Fue probado por Gödel (1930) y reforzado por Mal'cev (1936). Del teorema se sigue que una teoría de primer orden con realizaciones infinitas no puede ser categórica, es decir, tiene que tener modelos no isomorfos entre sí. Skolem (1933) descubrió las realizaciones o modelos no estándar de la aritmética, que cumplen cuanto exigen los axiomas (de primer orden) de la aritmética pero no son isomorfos al sistema estándar de los números naturales (por ejemplo, por tener un elemento mayor que todos los demás). Abraham Robinson (1961) usó este teorema para probar la existencia de ciertas realizaciones no estándar de la teoría de los números reales, sentando así la base del ANÁLISIS NO ESTÁNDAR y de la reivindicación de los infinitesimales.

teorema de completud semántica (A. *Vollständigkeitssatz*, F. *théorème de complétude sémantique*, I. *completeness theorem*). Hilbert y Ackermann (1928) se preguntaron si el cálculo deductivo de primer orden es semánticamente completo o no, esto es, si permite deducir todas las fórmulas de primer orden lógicamente válidas. Gödel (1930) dio respuesta a esta pregunta, probando lo que se conoce como el *teorema de completud* (semántica) *de Gödel*: el cálculo deductivo de la lógica de primer orden es semánticamente completo, es decir, basta para deducir sin premisas todas las sentencias válidas de primer orden y para deducir a partir de premisas todas las consecuencias de esas premisas. Gödel tomó como referencia el fragmento de primer orden del cálculo de Whitehead y Russell, pero una prueba similar vale para el cálculo de Hilbert y Ackermann, y para cualquiera de los cálculos deductivos propuestos para la lógica de primer orden. Henkin (1949) ofreció una prueba más

simple del mismo resultado que ha tenido gran aceptación (aunque ella presupone el AXIOMA DE ELECCIÓN).

El hecho de que todas las fórmulas válidas de primer orden sean deducibles implica que todas pueden ser generadas sucesivamente (y por tanto enumeradas) mediante la aplicación convenientemente programada de las reglas del cálculo deductivo. El conjunto de las fórmulas lógicamente válidas de primer orden es recursivamente enumerable. El teorema de completud semántica vale *a fortiori* para la lógica proposicional, pero no vale para la lógica de segundo orden, que es semánticamente incompleta. El conjunto de las fórmulas lógicamente válidas de segundo orden no es recursivamente enumerable.

El *teorema de corrección* dice que el cálculo deductivo de primer orden es correcto en el sentido de que todas las fórmulas deducibles a partir de ciertas premisas son consecuencias de esas premisas. Uniendo ambos teoremas, obtenemos: para cualquier conjunto Γ de fórmulas de primer orden y cualquier fórmula α: $\Gamma \vdash \alpha$ si y solo si $\Gamma \vDash \alpha$. De aquí se sigue el resultado equivalente: para cualquier conjunto Γ de fórmulas de primer orden, Γ es satisfacible si y solo si Γ es consistente. Por tanto, Γ es insatisfacible si y solo si Γ es contradictorio. Estos resultados nos permiten obtener información semántica a partir de hechos sintácticos y a la inversa, así como probar teoremas como el de compacidad y el de Löwenheim-Skolem.

teorema de definibilidad de Beth (A. *Bethscher Definierbarkeitssatz*, F. *théorème de définissabilité de Beth*, I. *Beth's definability theorem*). Sea Σ una teoría con lenguaje $\mathcal{L}$. El predicado n-ario P es *explícitamente definible* en Σ si y solo si Σ contiene entre sus teoremas una definición explícita de P, es decir, una sentencia $\forall x_1 \ldots \forall x_n (Px_1 \ldots x_n \Leftrightarrow \beta(x_1, \ldots, x_n))$, donde β es una fórmula de $\mathcal{L}$ cuyas variables libres están entre $x_1, \ldots, x_n$ y el predicado P no aparece en β. Sea P' un predicado n-ario que no pertenece a $\mathcal{L}$. Para cada fórmula α sea α' la fórmula obtenida al reemplazar cada aparición de P por P' en α. Sea $\Sigma' = \{\alpha' : \alpha \in \Sigma\}$. El predicado n-ario P es *implícitamente definible* en Σ si y solo si $\Sigma \cup \Sigma' \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n (Px_1 \ldots x_n \Leftrightarrow P'x_1 \ldots x_n))$. Semánticamente esto equivale a decir que cualesquiera dos realizaciones de Σ con el mismo universo y la misma interpretación de los parámetros de $\mathcal{L}$ distintos de P tienen que coincidir también en la interpretación de P. Bajo las condiciones indicadas, el *teorema de definibilidad* de Beth dice: P es explícitamente definible en Σ si y solo si P es implícitamente definible en Σ.

El teorema fue formulado por Padoa en 1900 y fue probado por Beth en 1953. Ha sido usado por Suppes y otros filósofos de la ciencia para indagar hasta qué punto los conceptos de una teoría son primitivos o definibles. Así, para probar que un cierto predicado de una teoría es indefinible en función

de las otras nociones basta con encontrar dos realizaciones de los axiomas de la teoría que interpreten del mismo modo los otros parámetros, pero de modo distinto ese predicado.

teorema de Fermat [último] (A. *Fermats letzter Satz*, F. *dernier théorème de Fermat*, I. *Fermat's last theorem*). Si n es un entero mayor que 2, no hay tres enteros x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$. Al margen de su ejemplar de la *Aritmética* de Diofanto, Fermat anotó que tenía una prueba de esta aseveración que no cabía en ese sitio. Durante los tres siglos siguientes muchos matemáticos se afanaron en hallarla y su búsqueda dio lugar a importantes descubrimientos y adelantos. En la última década del siglo XX, Andrew Wiles encontró por fin una demostración, la cual utiliza conceptos y recursos a los que Fermat, con toda seguridad, no tuvo acceso.

teorema de incompletud de Gödel (A. *Gödelscher Unvollständigkeitssatz*, F. *théorème d'incomplétude de Gödel*, I. *Gödel's incompleteness theorem*). Desde 1922 David Hilbert había estado formulando el programa que lleva su nombre: para asegurar la consistencia de la matemática de una vez por todas habría que (1) axiomatizar de un modo completo todas las teorías matemáticas y (2) probar —por medios finitarios indudables— que todas las teorías matemáticas así axiomatizadas son consistentes. La aplicación del programa empezaría por la teoría más básica de todas, la aritmética elemental, y se iría extendiendo a otras teorías más potentes o avanzadas. La mayoría de los matemáticos interesados por los fundamentos creían en la viabilidad de este programa. Por ello cayó como una bomba la demostración por Kurt Gödel (1931) de que la aritmética no puede axiomatizarse de un modo consistente y completo (*primer teorema de incompletud*) y de que la consistencia de una teoría aritmética no puede probarse con sus propios medios (*segundo teorema de incompletud*).

Una teoría aritmética es una teoría cuyo lenguaje incluye parámetros para el cero, el siguiente, la suma, el producto, el exponente y la relación de ser menor, y tal que en ella son definibles las funciones primitivas recursivas (es decir, las funciones numéricas más elementales, tales como la adición, la multiplicación y la exponenciación). Una teoría aritmética es correcta si y solo si todos sus teoremas son verdaderos en el sistema estándar de los números naturales.

Obviamente tanto el ser consistente como el ser axiomatizable y el ser completa son propiedades deseables de una teoría. Sin embargo, las tres propiedades no pueden darse conjuntamente. El primer teorema de incompletud de Gödel dice que una teoría aritmética no puede ser a la vez consistente, axiomatizable y completa. Puede ser dos de esas cosas, pero no las tres. De aquí se sigue en especial para cualquier teoría aritmética T: si T es consis-

tente y axiomatizable, entonces T es incompleta. Por ejemplo, la aritmética de Peano de primer orden es axiomatizable y consistente, pero no es completa. Gödel nos indicó cómo construir una sentencia aritmética verdadera que no es un teorema de la aritmética de Peano.

Gödel llevó a cabo su demostración para un sistema formal P que venía a ser la unión de la lógica de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell con los axiomas aritméticos de Peano y resolvió el problema metamatemático dentro de la aritmética, es decir, recurriendo exclusivamente a razonamientos aritméticos elementales. Por un ingenioso procedimiento (ahora conocido como GÖDELIZACIÓN) asignó números naturales a las secuencias de signos, estableciendo un homomorfismo del lenguaje formal en el sistema de los números naturales. Moviéndose con habilidad entre las fórmulas y los números que las representan, logró construir una sentencia ω —codificada por el número (17 Gen r)— que, naturalmente interpretada, dice de sí misma que no es deducible en el sistema P y tal que, si P es consistente, ni φ ni ¬φ son deducibles en P, por lo que es verdadera. Por tanto, la teoría formal P es incompleta. Podríamos añadir esa sentencia φ como nuevo axioma, pero no adelantaríamos nada: en función de ese sistema axiomático así ampliado podríamos volver a construir otra sentencia verdadera que no sería un teorema. El proceso no se acabaría nunca. Mientras siguiese siendo axiomatizable y consistente, la nueva teoría siempre seguiría siendo incompleta. Gödel mostró cómo generalizar este resultado a cualquier teoría axiomatizable y ω-consistente en que sean definibles las funciones recursivas primitivas. En 1936 Rosser mostró que ni siquiera es necesaria la OMEGA-CONSISTENCIA para que el teorema se aplique, pues basta ya con la mera consistencia. La limitación así puesta de relieve por el primer teorema de incompletud de Gödel vale no solo para la aritmética elemental, sino para cualquier otra teoría matemática que la contenga, es decir, para casi todas las teorías matemáticas interesantes, incluido el análisis matemático, el cálculo vectorial, la teoría de conjuntos, etc.

En 1931 Gödel probó también su segundo teorema: si una teoría aritmética T es consistente, entonces la consistencia de T no puede probarse en T, es decir, es imposible demostrar la consistencia de una teoría o sistema formal que incluya la aritmética elemental con los propios recursos de la teoría. Desde luego, sigue siendo posible probar su consistencia desde otra teoría distinta y más potente, pero ello sería de dudosa utilidad. Gödel había probado que si la teoría P es consistente, entonces la sentencia que antes habíamos llamado φ es verdadera en la interpretación natural. Sea σ la fórmula que en esa interpretación dice que P es consistente. Los razonamientos aritméticos usados por Gödel pueden formalizarse en P. Por tanto, en el sistema formal P puede deducirse la fórmula (σ ⇒ φ), que en la interpretación natural dice que si P es consistente, entonces φ es verdad. Ahora bien, si pudiéramos de-

ducir la fórmula σ, también podríamos deducir (por *modus ponens*) φ. Pero habíamos probado que si la teoría P es consistente, entonces φ no es deducible. Por tanto, si P es consistente, tampoco será deducible σ, es decir, no será demostrable en P que P es consistente. Si la teoría P es contradictoria, entonces podemos deducir en ella cualquier cosa, tanto que es consistente como que no lo es. Pero si es consistente, no podemos deducir en ella que lo es. En definitiva, y uniendo los dos teoremas de incompletud, podemos concluir que una teoría aritmética (o cualquiera de sus extensiones) que sea axiomatizable y consistente no puede ser completa y tampoco puede probar su propia consistencia. Con ello, las esperanzas expresadas en el programa de Hilbert quedaban enterradas, al tiempo que el método metamatemático, también impulsado por Hilbert, entraba en una fase de fecunda madurez.

teorema de indefinibilidad de Tarski (A. *Tarskischer Undefinierbarkeitssatz*, F. *théorème de Tarski*, I. *Tarski's undefinability theorem*). Este teorema, demostrado por Tarski poco después de 1930, en el curso de sus investigaciones sobre la VERDAD en los lenguajes formales, dice que la noción de verdad en una teoría no puede definirse dentro de la teoría, con sus propios recursos; para definirla, hay que salir fuera de ella, a una metateoría con más recursos expresivos. Supongamos que T es una teoría aritmética, es decir, un teoría cuyo lenguaje incluye signos para los números y las funciones aritméticas más elementales. Sea $\mathcal{N}$ el sistema estándar de los números naturales cuyo universo es $\mathbb{N}$. Una sentencia $\varphi \in T$ es verdadera en T si y solo si es satisfecha por cualquier interpretación sobre $\mathcal{N}$. Supongamos que $\# : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathbb{N}$ es una GÖDELIZACIÓN del lenguaje de T. Bajo estas condiciones, el *teorema de indefinibilidad de Tarski* afirma lo siguiente: no hay una fórmula $\beta(x)$ tal que, para cualquier sentencia α de $\mathcal{L}(T)$, α es verdad en T si y solo si $\beta(\underline{\#\alpha}) \in T$, donde $\#\alpha$ es el número de Gödel de α y $\beta(\underline{\#\alpha})$ es la sentencia que resulta de sustituir la variable x en la fórmula $\beta(x)$ por el numeral $\underline{\#\alpha}$ que designa al número $\#\alpha$. Por tanto, la noción de verdad en una teoría aritmética T no es definible en T.

teorema de interpolación (A. *Interpolationssatz*, F. *lemme d'interpolation*, I. *Interpolation theorem*). Si una fórmula implica otra, entonces podemos interpolar entre ellas una tercera fórmula escrita en el vocabulario común a ambas y tal que es implicada por la primera y a su vez implica la segunda. Al menos, podemos hacerlo si la primera fórmula es consistente y la segunda no es lógicamente válida. Para cualesquiera dos fórmulas α y β de la lógica proposicional: si α es consistente y β no es lógicamente válida y $\alpha \vdash \beta$, entonces hay una fórmula proposicional φ tal que $\alpha \vdash \varphi$ y $\varphi \vdash \beta$ y cada letra proposicional que aparece en φ aparece también en α y en β. Para cualesquiera

dos fórmulas α y β de la lógica de primer orden: si α es consistente y β no es lógicamente válida y α ⊢ β, entonces hay una fórmula φ de primer orden tal que α ⊢ φ y φ ⊢ β y cada variable libre, cada constante individual y cada signo de función o de relación que aparece en φ aparece también en α y en β.

El teorema de interpolación fue probado por Craig en 1957 y extendido más tarde por Schütte y Henkin. Algunos filósofos de la ciencia han pretendido usarlo como argumento para probar que la ciencia empírica puede prescindir de los *términos teóricos* y arreglárselas solo con TÉRMINOS OBSERVACIONALES. En efecto, si de la conjunción de los axiomas (con términos teóricos) se siguen los enunciados observacionales (sin términos teóricos), entonces, por el teorema de interpolación, hay un "axioma" (la fórmula interpolante) sin términos teóricos del que ya se siguen todos los enunciados observacionales de la teoría. Por tanto, los axiomas teóricos serían prescindibles. De todos modos, la fórmula interpolante puede tener cualquier longitud y cualquier grado de complejidad, por lo que es dudoso que constituyera una alternativa practicable al sistema axiomático de partida.

El teorema de interpolación no debe confundirse con otro teorema, también demostrado por Craig (1953), según el cual todo conjunto recursivamente enumerable de enunciados de primer orden puede ser axiomatizado (en otras palabras: dado un tal conjunto *K* hay siempre un conjunto decidible de enunciados *A* tal que cada enunciado α ∈ *K* es deducible de *A*). Este teorema también se adujo para probar que es posible eliminar de una teoría científica formalizada todos los términos teóricos, reteniendo solo los observacionales.

teorema de la deducción (A. *Deduktionstheorem*, F. *théorème de la déduction*, I. *deduction theorem*). Teorema metalógico en virtud del cual si una proposición r es deducible en un cálculo lógico C de las premisas $p_1, \ldots, p_n$, q, entonces el condicional $(q \Rightarrow r)$ es deducible en C de las premisas $p_1, \ldots, p_n$. Ello implica que, si r es deducible de q, $(q \Rightarrow r)$ es un teorema del cálculo. Simbólicamente, esto puede expresarse así:

$$\text{Si } p \vdash_C q, \text{ entonces } \vdash_C (p \Rightarrow q)$$

donde '$\vdash_C$' significa deducibilidad en el cálculo C. Como es obvio, los cálculos deductivos no satisfacen automáticamente el *teorema de la deducción*, el cual debe demostrarse a la luz de la sintaxis prescrita para cada uno. Los cálculos estándar de la LÓGICA PROPOSICIONAL y la LÓGICA DE PRIMER ORDEN lo satisfacen. Por otra parte, como en estos cálculos vale la regla de inferencia *MODUS PONENS*, tenemos que, si C es uno de ellos, $\vdash_C (p \Rightarrow q)$ implica que $p \vdash_C q$, de modo que $\vdash_C (p \Rightarrow q)$ si y solo si $p \vdash_C q$.

teorema de Lindström (A. *Satz von Lindström*, F. *théorème de Lindström*, I. *Lindström's theorem*). La fuerza expresiva de una lógica se mide por su capacidad para caracterizar estructuras unívocamente (hasta isomorfía). El lugar central y privilegiado que la lógica de primer orden ocupa entre todas las lógicas propuestas hasta ahora se debe a su peculiar combinación de capacidades y limitaciones, que la hacen especialmente apta para el planteamiento y solución de problemas. En particular, el teorema de compacidad y el de Löwenheim-Skolem, que marcan las limitaciones de su poder expresivo, son también la base de la teoría de modelos y de sus múltiples aplicaciones en el álgebra y otras ramas de la matemática. Otras lógicas tienen más poder expresivo, como, por ejemplo, la de segundo orden o la infinitaria, pero carecen de las ventajas señaladas. La lógica de segundo orden es más expresiva que la de primer orden, pues permite caracterizar hasta isomorfía el modelo estándar de los números naturales, o el cuerpo ordenado de los números reales, o el espacio euclídeo, lo que la lógica de primer orden no puede hacer. Ello es así gracias a que el teorema de Löwenheim-Skolem no vale para la lógica de segundo orden; tampoco el de compacidad. La lógica infinitaria con disyunciones infinitas es también más expresiva que la de primer orden, pues, a diferencia de esta, permite caracterizar hasta isomorfía los grupos de torsión. Aunque satisface el teorema de Löwenheim-Skolem, para ella no vale el de compacidad. Lo mismo puede decirse de la lógica ampliada con el cuantificador 'hay un número finito de'. Por el contrario, la lógica ampliada con el cuantificador 'hay una cantidad innumerable de' cumple el teorema de compacidad, pero no el de Löwenheim-Skolem.

Esta situación se resume en el *teorema de Lindström*, probado por Per Lindström en 1969: la lógica de primer orden es la lógica con más fuerza expresiva que todavía satisface los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem. Otra versión del teorema dice: la lógica de primer orden es la lógica con más fuerza expresiva que todavía satisface el teorema de Löwenheim-Skolem y cuyo conjunto de sentencias válidas es recursivamente enumerable.

teorema de Łós-Vaught (A. *Satz von Łos-Vaught*, F. *théorème de Łos-Vaught*, I. *Łos-Vaught theorem*). Si una teoría T es κ-categórica para algún cardinal infinito κ y todas las realizaciones de T son infinitas, entonces T es una TEORÍA COMPLETA (sintácticamente).

Por ejemplo, la teoría del orden denso sin extremos es $\aleph_0$-categórica y, por ende, κ-categórica para algún cardinal infinito κ, a saber, $\kappa = \aleph_0$. Por otro lado, todas sus realizaciones son infinitas. Por tanto, la teoría del orden lineal denso sin extremos es sintácticamente completa. La inversa del teorema de Łos-Vaught no vale, pues hay teorías sintácticamente completas que no son κ-categóricas para ningún cardinal infinito κ.

teorema de Löwenheim-Skolem (A. *Satz von Löwenheim-Skolem*, F. *théorème de Löwenheim-Skolem*, I. *Löwenheim-Skolem theorem*). El teorema de Löwenheim-Skolem establece la imposibilidad de caracterizar unívocamente (hasta isomorfía) las estructuras infinitas en la lógica de primer orden. En efecto, cualquier caracterización de primer orden de una estructura innumerable tiene también realizaciones meramente numerables. La versión *descendente* del teorema de Löwenheim-Skolem dice: si un conjunto de sentencias de primer orden es satisfacible por alguna estructura infinita (aunque su universo *A* sea innumerable), entonces es también satisfacible por una subestructura numerable suya (con universo $B \subseteq A$ y cardinalidad de $B = \aleph_0$). De aquí se sigue que todo conjunto satisfacible de fórmulas de primer orden posee una realización numerable (de universo finito o infinito numerable). Además, todo conjunto satisfacible de fórmulas de primer orden posee una realización sobre el conjunto de los números naturales. Por tanto, ninguna teoría de primer orden con modelos infinitos innumerables es categórica. Por ejemplo, la teoría de primer orden del cuerpo ordenado de los números reales tiene, además de la realización o modelo estándar de los números reales, que es innumerable, también otra realización meramente numerable (y por ello no isomorfa a la primera). La aplicación del teorema de Löwenheim-Skolem a la teoría de conjuntos de primer orden da lugar a la PARADOJA DE SKOLEM. No solo no podemos acotar hacia abajo la cardinalidad de una estructura innumerable, sino que tampoco podemos acotarla hacia arriba. La versión *ascendente* del teorema dice: si un conjunto de sentencias de primer orden es satisfacible sobre alguna estructura infinita (con universo *A* de cardinalidad κ), por pequeña que sea, entonces es también satisfacible sobre una superestructura suya arbitrariamente grande (es decir, con universo *B* tal que $A \subseteq B$ y cardinalidad de $B = \lambda \geq \kappa$ para cualquier cardinal infinito λ).

Löwenheim probó en 1915 que una teoría finitamente axiomatizable de primer orden tiene una realización numerable. En 1920 Skolem presentó una prueba más rigurosa del mismo resultado y la extendió a teorías cualesquiera de primer orden. La versión ascendente del teorema se debe a Tarski. Por ello la versión completa se conoce como *teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski*: si un conjunto de sentencias de primer orden tiene alguna realización infinita, entonces tiene realizaciones de cualquier cardinalidad infinita. Todo lo dicho hasta aquí presupone un lenguaje formal de primer orden normal, es decir, con una infinidad numerable ($\aleph_0$) de fórmulas. Si consideramos extensiones de la lógica de primer orden con un lenguaje infinitario innumerable, entonces el teorema se reformula así: si un conjunto de cardinalidad λ de sentencias de primer orden tiene alguna realización infinita, entonces tiene realizaciones de cualquier cardinalidad infinita $\kappa \geq \lambda$.

teorema de Noether (A. *Noetherscher Satz*, F. *théorème de Noether*, I. *Noether's theorem*). Emy Noether (1918) demostró varios teoremas matemáticos que han resultado ser de capital importancia para la física. Usada en singular, la expresión se refiere habitualmente al primero de ellos, en virtud del cual las SIMETRÍAS del LAGRANGIANO propio de una teoría física corresponden a cantidades físicas que se conservan en los procesos a que esa teoría es aplicable.

Para dar una idea del alcance del *teorema de Noether*, recurrimos a los términos y símbolos introducidos bajo CÁLCULO DE VARIACIONES. Si la integral

$$I(C) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x^k(t), \dot{x}^k(t))dt \qquad (1)$$

allí definida es invariante bajo la ACCIÓN de un GRUPO DE LIE de n parámetros, hay n cantidades físicas (bien determinadas) que son constantes a lo largo de cualquier curva C tal que $I(C)$ sea estacionaria.

Por ejemplo, si L es el LAGRANGIANO de un sistema MECÁNICO CLÁSICO no disipativo, la variable de integración t representa el tiempo y las x^k son las coordenadas (generalizadas) de la posición del sistema en el espacio de configuración. La integral $I(C)$ es invariante bajo la acción del grupo generado por las siguientes transformaciones: (*a*) las traslaciones en el tiempo; (*b*) las traslaciones espaciales paralelas a tres vectores ortogonales cualesquiera, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$; (*c*) las rotaciones en torno a cualesquiera tres ejes ortogonales $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$. Estas simetrías determinan, respectivamente, la conservación de las siguientes cantidades: (*a*) la energía del sistema; (*b*) las componentes del momento cinético en las tres direcciones $\mathbf{e}_i$; (*c*) las componentes del momento angular con respecto a los tres ejes $\mathbf{J}_k$. Por el PRINCIPIO DE ACCIÓN MÍNIMA la integral I(C) es estacionaria sobre la curva representativa de la trayectoria C del sistema en el espacio de configuración. Por el (primer) *teorema de Noether*, las cantidades mencionadas son constantes a lo largo de C, esto es, durante toda la evolución del sistema entre t_1 y t_2.

teorema de Pitágoras (A. *pythagoreischer Lehrsatz*, F. *théorème de Pythagore*, I. *Pythagoras' theorem*). Dado un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en el vértice C, el cuadrado construido sobre la hipotenusa AB es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos AC y BC. Los griegos atribuyeron este teorema fundamental de la geometría plana (euclídea) al filósofo semilegendario Pitágoras de Samos; pero también fue conocido desde muy antiguo en otras tradiciones matemáticas (China, India, etc.).

teorema del buen orden (A. *Wohlordnungssatz*, F. *théorème du bon ordre*, I. *well-ordering theorem*). El teorema del buen orden dice que todo conjunto

puede ser bien ordenado, es decir, para todo conjunto A hay una relación R tal que $\langle A,R\rangle$ es un BUEN ORDEN. Cantor necesitaba este resultado para justificar su teoría de los cardinales transfinitos, pero, a pesar de sus desesperados intentos, nunca logró probarlo. Zermelo lo probó en 1904 a partir del AXIOMA DE ELECCIÓN, con el que de hecho es equivalente.

teoría (A. *Theorie*, F. *théorie*, I. *theory*). Al menos desde Platón, la palabra griega θεωρία ha significado *contemplación, mirada, visión*. Todavía lo significa en griego moderno. El camino que rodea la Acrópolis y desde el que se goza de una vista panorámica sobre Atenas se llama el camino de la teoría. Actualmente en el lenguaje coloquial se llama a veces teoría a cualquier hipótesis u opinión, como en "tengo una teoría: el asesino es el jardinero" o en "no me convence la teoría de que se duerme mejor boca abajo". Sin embargo, en el lenguaje culto solemos llamar teoría a un edificio conceptual formado por una colección organizada de nociones y proposiciones que codifica información acerca de cierto tipo de sistemas, fenómenos o procesos y típicamente sirve para dar explicaciones, hacer predicciones y resolver problemas.

La actividad científica culmina en la construcción y contrastación de teorías de gran alcance y poder explicativo y predictivo, como la teoría general de la relatividad, la teoría cinética de gases, la teoría de la evolución o la teoría microeconómica. Usamos las teorías para explicar lo sorprendente, para predecir el futuro y retrodecir el pasado, para sistematizar nuestros conocimientos, para recordar y comprender, para resumir las regularidades observadas y los datos de que disponemos, para construir modelos simples de la realidad complicada que nos rodea, para simular y diseñar, manejar y transformar, encontrar y resolver. Las teorías científicas en sí son algo muy complejo, variable en el tiempo y en el espacio. La teoría se desarrolla y evoluciona como un ser vivo a lo largo del tiempo y se presenta de modos distintos en diversos autores. Puede variar en el mismo autor e incluso en ediciones sucesivas del mismo libro. Una teoría en este sentido amplio o cultural no está extensionalmente definida.

Las teorías científicas son algo muy complejo que, al menos en parte, está en los cerebros de los científicos, pero la concreta plasmación neural de las teorías sobrepasa nuestra capacidad cognitiva, dado lo mal que entendemos el funcionamiento del cerebro. Si queremos caracterizarlas, tenemos que limitarnos a precisar más o menos formalmente algunos de sus rasgos característicos, dejando otros en la penumbra.

El *enfoque sintáctico* caracteriza las teorías como ciertos conjuntos de teoremas, fórmulas o enunciados, lo que permite una definición escueta y precisa de sus propiedades. Es el enfoque más clásico y extendido en la lógica y

la filosofía de la ciencia y el que mejor encaja con la tradición de la metamatemática. Presente ya en Hilbert, Tarski, Carnap o Popper, continúa en la base de la mayoría de los trabajos actuales. Este enfoque concibe una teoría como un conjunto de teoremas clausurado respecto a la relación de consecuencia.

El enfoque semántico de las teorías fue iniciado por Beth y Suppes y luego continuado por Sneed, van Fraassen y otros. Arroja luz sobre las aplicaciones de las teorías y permite describirlas de un modo más compacto e interrelacionado, usando para ello el lenguaje de la teoría informal de conjuntos, más flexible e intuitivo que el de la lógica formal de primer orden. Este enfoque concibe una teoría como un conjunto de realizaciones o modelos (los sistemas que cumplen las exigencias de la teoría).

El enfoque pragmático de las teorías fue iniciado por Kolmogorov y Solomonov. Arroja luz sobre la función de las teorías como compresores de la información. Así, por ejemplo, las leyes de Kepler serían un procedimiento para comprimir la información dispersa en los múltiples datos sobre los movimientos planetarios. Este enfoque concibe una teoría como un programa computacional.

Estos tres enfoques son compatibles entre sí y complementarios. La misma teoría puede considerarse alternativamente (y con provecho) desde los tres puntos de vista. De hecho, una teoría en sentido sintáctico determina la clase de sus modelos y puede cumplir una misión computacional de compresión de la información. Una clase de modelos determina el conjunto de las fórmulas (de cierto lenguaje formal) satisfechas en todos ellos, que constituye una teoría en sentido sintáctico. Y con frecuencia un programa de compresión de la información determina también sus correspondientes versiones teóricas sintáctica y semántica, aparte de que con frecuencia la mayor compresión se consigue precisamente mediante la axiomatización. En definitiva, los sectarios de los diversos enfoques no están hablando de cosas distintas, sino de aspectos distintos de las mismas cosas (las teorías científicas).

Los resultados más frecuentes de la ciencia no son teorías, sino datos, historias, comprobaciones, diseños, reconstrucciones, exploraciones y notas. Muchas ramas de la ciencia (desde la paleontología hasta la exploración planetaria, pasando por la biología molecular) progresan sin apenas aportación teórica. Sólo muy de tarde en tarde se produce una teoría. Las teorías mejor definidas son las teorías matemáticas y el enfoque más desarrollado para su estudio es el metamatemático, que combina su consideración como teorías en sentido sintáctico con el estudio preciso de las relaciones semánticas con sus realizaciones. En la física y otras ramas de la ciencia empírica, como la cosmología o la economía, también desempeñan un importante papel las teorías matematizadas.

En la lógica de primer orden, una teoría es un conjunto de sentencias clausurado respecto a la relación de consecuencia (o de deducibilidad, dada la

equivalencia de ambas en este nivel de la lógica), es decir, tal que todas sus consecuencias le pertenecen. Sea el lenguaje formal $\mathscr{L}$ el conjunto de todas las fórmulas construibles según las reglas de formación de fórmulas a partir de cierto vocabulario. Sea $\Sigma \subseteq \mathscr{L}$ un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$. Σ es una teoría si y solo si para cada sentencia $\alpha \in \mathscr{L}$: si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\alpha \in \Sigma$. Las sentencias de una teoría se llaman sus teoremas.

teoría axiomatizable (A. *axiomatisierbare Theorie*, F. *théorie axiomatisable*, I. *axiomatizable theory*). Una teoría es axiomatizable si todos sus teoremas son inferibles de un subconjunto decidible de teoremas. La teoría T es axiomatizable si y solo si hay un $\Delta \subseteq$ T tal que (1) $\Delta \subseteq$ T, (2) Δ es decidible respecto a $\mathscr{L}$(T) y (3) $\{\alpha \in \mathscr{L}(T) : \Delta \vdash \alpha\} = T$. Si, además, el conjunto Δ es finito, decimos que la teoría es finitamente axiomatizable. Obviamente, todas las teorías axiomáticas son axiomatizables. Otra manera equivalente de caracterizar una teoría axiomatizable es diciendo que es recursivamente enumerable. Un ejemplo de teoría no axiomatizable es la aritmética estándar de los números naturales (definida semánticamente como el conjunto de las sentencias del lenguaje aritmético satisfechas por el modelo estándar de los números naturales), como probó Gödel en 1931.

teoría categórica (A. *kategorische Theorie*, F. *théorie catégorique*, I. *categorical theory*). Una teoría *categórica* es una teoría que determina unívocamente (hasta isomorfía) la estructura de sus realizaciones, es decir, una teoría cuyas realizaciones son todas isomorfas entre sí. T es categórica si y solo si para cualesquiera dos estructuras $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$: si $\mathscr{A}$ satisface T y si $\mathscr{B}$ satisface T, entonces $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$. T es polimorfa si y solo si T no es categórica. Ninguna teoría de primer orden con realizaciones infinitas es categórica. Por tanto, la lógica de primer orden no sirve para caracterizar unívocamente estructuras infinitas, como la de los números naturales o la de los números reales o el espacio euclídeo. Una noción más débil es la de categoricidad en un cardinal κ. Una teoría T es κ-*categórica* si todas sus realizaciones de cardinalidad κ son isomorfas entre sí. T es κ-categórica si y solo si para cualesquiera dos estructuras $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$: si $|\mathscr{A}| = \kappa$ y $|\mathscr{B}| = \kappa$ y $\mathscr{A}$ satisface T y si $\mathscr{B}$ satisface T, entonces $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$. Por ejemplo, y como ya probó Cantor, la teoría del orden lineal denso sin extremos es $\aleph_0$-categórica. Dos órdenes densos sin extremos de cardinalidad $\aleph_0$ (es decir, infinitos numerables) son siempre isomorfos entre sí.

teoría completa (A. *vollständige Theorie*, F. *théorie complète*, I. *complete theory*). Una teoría es (sintácticamente) completa si da respuesta a todas las preguntas que puedan formularse en su lenguaje. Una teoría T es *completa* si

y solo si para cada sentencia $\alpha \in \mathcal{L}(T)$, o bien $\alpha \in T$, o bien $\neg\alpha \in T$. Una teoría es *incompleta* si no es completa. Ninguna teoría de primer orden con realizaciones infinitas es completa. Por ejemplo, la aritmética de Peano de primer orden es incompleta. De hecho, el TEOREMA DE INCOMPLETUD de Gödel establece que cualquier teoría axiomatizable y consistente de la aritmética es incompleta. Una teoría completa y consistente se llama máximamente consistente. Toda teoría categórica es completa, pero no toda teoría completa es categórica. Por ejemplo, la aritmética estándar de primer orden, semánticamente definida sobre el sistema estándar de los números naturales, es completa (al estar semánticamente definida), pero no es categórica, pues posee realizaciones no estándar que no son isomorfas al sistema estándar.

Este concepto sintáctico de *teoría completa* no debe confundirse con el concepto de COMPLETUD SEMÁNTICA de una *lógica* o de un *cálculo deductivo*.

teoría consistente (A. *widerspruchsfreie Theorie*, F. *théorie consistante*, *théorie cohérente*, I. *consistent theory*). Una teoría T es *consistente* si y solo si T no es contradictoria. Una teoría consistente puede definirse directamente de varias maneras equivalentes. T es consistente si y solo si T no implica contradicción alguna, es decir, no existe fórmula alguna α, tal que $T \models (\alpha \wedge \neg\alpha)$. T es consistente si y solo si T carece de contradicciones, es decir, no existe fórmula alguna α, tal que $(\alpha \wedge \neg\alpha) \in T$. Clásicamente, T es consistente si y solo si su lenguaje $\mathcal{L}(T)$ contiene al menos una sentencia α tal que $\alpha \notin T$, es decir, $T \neq \mathcal{L}(T)$.

teoría contradictoria (A. *widerspruchsvolle Theorie*, F. *théorie contradictoire*, *théorie incohérente*, I. *inconsistent theory*). Una teoría T es *contradictoria* si y solo si T no es consistente. Por eso, una teoría contradictoria se llama también inconsistente. Una teoría contradictoria o inconsistente puede definirse directamente de varias maneras equivalentes. T es contradictoria si y solo si T implica una contradicción, es decir, para alguna fórmula α, $T \models (\alpha \wedge \neg\alpha)$. T es contradictoria si y solo si T contiene una contradicción, es decir, para alguna fórmula α, $(\alpha \wedge \neg\alpha) \in T$. Clásicamente, T es contradictoria si y solo si T contiene todas las sentencias de su lenguaje $\mathcal{L}(T)$, es decir, $T = \mathcal{L}(T)$.

teoría cuántica de campos (A. *Quantenfeldtheorie*, F. *théorie quantique des champs*, I. *quantum field theory*). Expresión que engloba varias teorías, complementarias o alternativas, propuestas para dar cuenta de los fenómenos cuánticos —esto es, de los fenómenos afectados significativamente por el valor positivo de la CONSTANTE DE PLANCK—, en circunstancias en que también resulta significativo el valor finito de la VELOCIDAD DE LA LUZ. Dicho de otro

modo, se trata de teorías cuánticas ajustadas a la RELATIVIDAD especial. La primera *teoría cuántica de campos* fue la ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA, fundada por Dirac ya en 1928. En la década de los sesenta se crean las teorías en que reposa el MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS: la *cromodinámica cuántica*, que explica la interacción fuerte responsable de la cohesión de los núcleos atómicos, y la teoría unificada de la *interacción electrodébil*, que explica a la vez los fenómenos electromagnéticos y la interacción débil responsable de la DESINTEGRACIÓN BETA. El éxito experimental de esta última alentó la formulación de teorías de gran unificación (GUTs, por su nombre en inglés: *grand unified theories*) —insuficientemente corroboradas hasta la fecha— para explicar conjuntamente todas estas formas de interacción. El término *teoría cuántica de campos* designa genéricamente a toda esta clase de teorías, o, más específicamente, a su denominador común, esto es, los conceptos, métodos, principios y, en suma, la forma de pensar que comparten. El término cubre también algunas teorías cuánticas de la gravitación que —hasta ahora sin éxito— adoptan un enfoque parecido.

Describimos sumariamente algunos ingredientes característicos de una teoría cuántica de campos (TCC):

1° *Campos de operadores.* Tal como en la MECÁNICA CUÁNTICA, los OBSERVABLES son representados por OPERADORES LINEALES autoadjuntos en un ESPACIO DE HILBERT. Para ajustarse a la relatividad especial, la TCC tiene que dar un tratamiento similar al espacio y al tiempo. En la mecánica cuántica las coordenadas clásicas de posición se reemplazan con operadores, conjugados con los operadores de momento, pero la coordenada temporal sigue siendo un parámetro, que —en la "imagen de Heisenberg"— indexa los operadores. Para hacerla relativista podríamos introducir un operador de tiempo t, conjugado con la energía representada por el HAMILTONIANO H. En virtud de la condición cuántica para operadores conjugados, tendríamos que $[t,H] = tH - Ht = -i$, lo cual implica que, si t tiene un espectro continuo con recorrido $(-\infty, \infty)$, también la energía tiene un espectro continuo con recorrido $(-\infty, \infty)$. Como esto es absurdo, hay que proceder de otro modo. La TCC trata las coordenadas espaciales como parámetros, que, al igual que la coordenada temporal, indexan los operadores. Se obtiene así una asignación de operadores a cada cuádruplo de índices, esto es, a cada punto del espaciotiempo: un *campo espaciotemporal de operadores lineales sobre un espacio vectorial abstracto.* (Para ver que esta idea no es ni abstrusa ni estrafalaria, es útil recordar que la ELECTRODINÁMICA CLÁSICA, en su formulación relativista, concibe el campo electromagnético como un campo tensorial antisimétrico de tipo (0,2), que —por ser tal— asigna a cada punto del espaciotiempo una función bilineal sobre el espacio vectorial tangente al espaciotiempo en ese punto.)

2° *Operadores de creación y aniquilación.* Siguiendo a Planck (1900), la mecánica cuántica modela la RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO como una colección de osciladores armónicos. Se introduce un operador a y su adjunto $a^\dagger$, sujetos a las condiciones $[a,a^\dagger] = 1$, $[a,a] = [a^\dagger,a^\dagger] = 0$. Entonces $a^\dagger a$ es un operador autoadjunto que llamaremos N. Si $|\varphi\rangle$ es un vector normalizado y $N|\varphi\rangle = n|\varphi\rangle$, escribimos $|n\rangle$ en vez de $|\varphi\rangle$. Como $n = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \|a|n\rangle\|^2$, es claro que n es real y no negativo y que $n = 0$ solo si $a|n\rangle$ es el vector cero. Tenemos que

$$Na|n\rangle = a^\dagger a a|n\rangle = (aa^\dagger - 1)a|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \quad (1)$$

Por lo tanto, $a|n\rangle$ es un estado propio de N con valor propio $(n-1)$, a menos que $a|n\rangle = 0$. Por su parte, $a^\dagger|n\rangle$ es un estado propio de N con valor propio $(n+1)$. Los valores propios de N son pues los enteros positivos 0, 1, 2... El operador a se llama *operador de aniquilación*, y el operador $a^\dagger$, *operador de creación*. Las TCC aplican este esquema a cualquier sistema formado por muchos BOSONES idénticos. Sea $(|\varphi_i(x)\rangle)_{i\in\mathcal{I}}$ un conjunto completo de estados (normalizados) de un bosón. Para cada estado se introducen operadores a_i y $a_i^\dagger$, sujetos a las condiciones $[a_k,a_h^\dagger] = \delta_{kh}$, $[a_k,a_h] = [a_k^\dagger,a_h^\dagger] = 0$ ($i, k, h \in \mathcal{I}$). Todos los estados posibles del sistema pueden construirse aplicando estos operadores al *estado vacío* $|0\rangle$ en que no hay partículas y $a_i|0\rangle = 0$ para todo $i \in \mathcal{I}$. La condición $[a_k^\dagger,a_h^\dagger] = 0$ para todo k y h implica que cualquier estado es simétrico respecto al intercambio de dos partículas, por lo cual el sistema obedece a la ESTADÍSTICA DE PARTÍCULAS de Bose-Einstein. En el caso de un sistema formado por muchos FERMIONES idénticos, se introducen operadores de aniquilación y creación b_i y $b_i^\dagger$, sujetos a las condiciones $\{b_k,b_h^\dagger\} = b_k b_h^\dagger + b_h^\dagger b_k = \delta_{kh}$, $\{b_k,b_h\} = \{b_k^\dagger,b_h^\dagger\} = 0$. Es claro que $(b_i)^2 = (b_i^\dagger)^2 = 0$. Según esto, los fermiones obedecen al PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI: no es posible crear dos fermiones en un mismo estado ni aniquilarlos desde un mismo estado. Para cada índice i, el operador $N_i = b_i^\dagger b_i$ es idempotente, pues

$$N_i^2 = b_i^\dagger b_i b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger(1 - b_i^\dagger b_i)b_i = b_i^\dagger b_i = N_i \quad (2)$$

Por lo tanto, $N_i(N_i - 1) = 0$, y los valores propios de N_i son solo 1 y 0; en otras palabras, el sistema puede contener un fermión o ninguno en el estado i-ésimo, en concordancia con el principio de Pauli. Todos los estados posibles del sistema pueden construirse aplicando los operadores b_i y $b_i^\dagger$ al *estado vacío* $|0\rangle$. Tales estados son antisimétricos respecto al intercambio entre dos partículas, y el sistema obedece a la estadística de partículas de Fermi-Dirac.

3° *Postulación de un lagrangiano.* La TCC construye una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ apropiada para su campo de aplicación. La acción $S = \int \mathcal{L} d^4x$

obedece a un principio variacional —una adaptación al ámbito cuántico del clásico PRINCIPIO DE HAMILTON— del cual se infieren las ecuaciones dinámicas de la teoría. En virtud del TEOREMA DE NOETHER, las simetrías del lagrangiano prescriben los principios de conservación (de energía, momento cinético, momento angular, carga eléctrica, isospin, "color", etc.) imperantes en el campo de aplicación de la teoría. Por otra parte, como las simetrías del lagrangiano se trasmiten a todas las predicciones de la teoría, basta comprobar, por ejemplo, que el lagrangiano postulado es invariante bajo las transformaciones de Lorentz para estar seguro de que la teoría será compatible con la relatividad especial.

4° *Simetría* gauge. La electrodinámica cuántica y las TCC en que se basa el modelo estándar son teorías *gauge*. Se ha dado en llamar así, por motivos históricos (↗*GAUGE*), a toda teoría física invariante bajo un grupo continuo de transformaciones que actúa independientemente en cada punto del espaciotiempo sobre las variables dinámicas de la teoría. Así la electrodinámica cuántica es invariante bajo las transformaciones de fase

$$\psi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)}\psi(x) = \psi'(x) \qquad (3)$$

donde ψ es un campo de Dirac, el cuátruplo $x = (x^0,x^1,x^2,x^3)$ denota un punto del espaciotiempo, e es la base de los logaritmos naturales y el ángulo α de rotación de la fase varía de punto en punto. Como las derivadas de ψ en cada punto dependen del valor de ψ en un *entorno* de ese punto, la transformación (3) no puede simplemente aplicarse a las derivadas $\partial\psi(x)/\partial x^k$, de las que depende, por cierto, el lagrangiano. Hay que reemplazarlas con derivadas covariantes D_k ($k = 0,1,2,3$). Escribiendo ∂_k por $\partial/\partial x^k$, ponemos

$$\mathrm{D}_k = \partial_k + ieA_k$$

y requerimos que al aplicar la transformación (3) cada "componente de la conexión" A_k sea sustituido según la regla siguiente:

$$A_k(x) \mapsto A_k(x) - e^{-1}\partial_k\alpha(x) = A_k'(x)$$

No es difícil comprobar que, bajo las condiciones antedichas, D_k "covaría" con ψ bajo la transformación (3). En efecto, esta asigna a $\mathrm{D}_k\psi(x)$ la transformada

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_k\psi(x)\right)' &= \left(\partial_k + ie(A_k - e^{-1}\partial_k\alpha\right)\mathrm{e}^{i\alpha(x)}\psi(x)\\ &= \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\left(\partial_k + ieA_k\right)\psi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\mathrm{D}_k\psi(x)\end{aligned}$$

Una vez hecho el reemplazo indicado, el lagrangiano de la teoría es efectivamente invariante bajo las transformaciones (3). La conexión A, con componentes A_0, A_1, A_2, A_3, constituye un campo sobre el espaciotiempo, que resulta representar nada menos que el potencial electromagnético (correspondiente al potencial electrostático ϕ y el potencial vectorial A de la electrodinámica clásica). Como se ha podido ver, la simetría *gauge* implica su existencia, pues esta es una condición necesaria de aquella. Se habla por eso de campo *gauge*. Actuando sobre este, los operadores de creación y aniquilación crean y suprimen bosones —en este caso, FOTONES— que son portadores de los intercambios de energía y momento regidos por la teoría, y que por eso se llaman BOSONES *GAUGE*.

5° *Renormalización.* Una TCC debe ser *renormalizable.* Las indicaciones siguientes intentan dar una idea, aunque muy incompleta y superficial, de lo que esto significa. En la física se presentan situaciones en que el valor que teóricamente corresponde a un parámetro característico de un objeto difiere sensiblemente de lo que se puede observar, por efecto de las interacciones a que ese objeto está sometido. Por ejemplo, un sólido de gran tamaño que se mueve lentamente en un líquido viscoso aparenta una masa mayor de la que posee debido a que arrastra consigo partículas del líquido. Para comparar las predicciones de la teoría con la experiencia se hace necesario entonces "renormalizar" ese parámetro, reemplazando el valor de la masa "desnuda" del sólido aislado con el adjudicable a la masa "vestida" por la interacción con el líquido. En la electrodinámica cuántica, la renormalización de la masa y la carga del electrón prestó además un servicio indispensable. Las ecuaciones diferenciales de la física admiten soluciones exactas solo si se las aplica a situaciones simples. Si la situación es más compleja hay que recurrir al método de las perturbaciones, que genera soluciones aproximadas en la forma de series infinitas, de las que basta calcular solo unos pocos términos iniciales para obtener predicciones a tono con la imprecisión de las observaciones. En la mecánica clásica ya la interacción de *tres* cuerpos no admite un tratamiento exacto; y el método de las perturbaciones se inventó justamente para corregir la trayectoria atribuible a un planeta que interactúa con el Sol, teniendo en cuenta la influencia perturbadora, pequeña pero significativa, que ejerce su interacción con otros planetas. Las soluciones perturbativas de la ecuación de Dirac en presencia de interacciones exhiben integrales divergentes ya en los términos de segundo y tercer orden. Se las pudo eliminar mediante los procedimientos de renormalización desarrollados independientemente por Tomonaga, Schwinger y Feynman y unificados por Dyson. Son algoritmos ingeniosos, complicados y de cuestionable rigor; y los creados más tarde para suprimir divergencias en las TCC posteriores son aún más tortuosos. Por otra parte, las consecuencias observables que pueden deducirse de la electrodiná-

mica cuántica por esta vía han sido constatadas con un grado de precisión no superado en ninguna otra rama de la física. Una TCC se dice *renormalizable* si basta renormalizar un número *finito* de parámetros para eliminar las divergencias de todo orden.

teoría de catástrofes (A. *Katastrophentheorie*, F. *théorie des catastrophes*, I. *catastrophe theory*). Método propuesto por Thom (1969, 1972) para investigar las discontinuidades morfogenéticas —esto es, generadoras de nuevas formas— en los sistemas físicos y biológicos a través del estudio cualitativo (topológico-diferencial) de ciertas estructuras matemáticas apropiadas para modelarlos. Hacia 1980, E. C. Zeeman y otros alcanzaron cierta notoriedad con sus intentos de utilizar la teoría de catástrofes para arrojar luz sobre fenómenos y sistemas sociales.

teoría decidible (A. *entscheidbare Theorie*, F. *théorie décidable*, I. *decidable theory*). Una teoría T es *decidible* si y solo si hay un algoritmo que, aplicado a cualquier sentencia α del lenguaje de T, nos permite decidir en un número finito de pasos si $\alpha \in T$ o si $\alpha \notin T$. La función característica de T (respecto a su lenguaje $\mathcal{L}$) es una función χ_T: $\mathcal{L} \to \{0,1\}$ tal que para cada $\alpha \in \mathcal{L}$, $\chi_T(\alpha) = 1$ si $\alpha \in T$, y $\chi_T(\alpha) = 0$ si $\alpha \notin T$. T es decidible si y solo si su función característica χ_T es computable, es decir, recursiva. Si una teoría es decidible, *a fortiori* es axiomatizable. Si una teoría T es completa y axiomatizable, entonces T es decidible. Por ejemplo, la teoría del orden lineal denso sin extremos es completa y axiomatizable, y, por tanto, es decidible. Otro ejemplo de teoría decidible es la teoría de grupos abelianos, aunque la teoría de grupos es indecidible. Una tarea importante de la metamatemática consiste en encontrar procedimientos de decisión para las teorías decidibles y pruebas de indecidibilidad para las indecidibles.

teoría de conjuntos (A. *Mengenlehre*, F. *théorie des ensembles*, I. *set theory*). En el siglo XIX hubo una doble tendencia a incrementar la generalidad y la precisión de los conceptos de la matemática, tendencia que culminó en la aritmetización del análisis, el desarrollo del álgebra abstracta y la creación de la teoría de conjuntos. Las nociones de función, aplicación, transformación, proyección y otras similares estaban ligadas a ciertas funciones concretas o al menos a la presencia de una fórmula o criterio para calcular sus valores. Sin embargo, Dirichlet y otros matemáticos introdujeron el concepto actual de función arbitraria, mucho más general. De modo similar, las nociones de clase, conjunto, sistema, variedad, multiplicidad, colección, espacio y otras similares fueron generalizándose y convergiendo hasta dar lugar a la noción actual de conjunto, por obra de pensadores como Riemann, Dedekind y Cantor.

Frege trazó la clara distinción entre PERTENENCIA e INCLUSIÓN. Peano introdujo los signos para UNIÓN e INTERSECCIÓN. Al final, se había logrado conseguir un lenguaje común para la matemática, basado en conceptos de gran generalidad, aplicables en el mismo sentido a través de las barreras disciplinarias. Esto condujo en el siglo XX a la reformulación de las ramas tradicionales de la matemática y a la formulación de las nuevas en lenguaje conjuntista, lo que dio lugar a la llamada matemática abstracta, estructural o "moderna". A su vez, y a través de la matemática, el lenguaje conjuntista ha penetrado en la formulación de las más diversas teorías, desde la mecánica cuántica hasta la microeconomía.

La mayoría de los conjuntos de los que trata la matemática son conjuntos INFINITOS. Así como no todos los conjuntos finitos son igual de grandes, tampoco lo son los infinitos. Cantor exploró el tamaño de los conjuntos infinitos, descubriendo, por ejemplo, que hay tantos números racionales como naturales, pero más números reales que racionales y todavía más conjuntos de números reales. Cantor introdujo los números CARDINALES transfinitos (los ÁLEFS) para medir la cardinalidad o cantidad de elementos de los conjuntos y desarrolló la ARITMÉTICA CARDINAL TRANSFINITA. En ese contexto se planteó la cuestión de si hay o no conjuntos de cardinalidad intermedia entre las del conjunto de los números naturales y del de los números reales. La respuesta negativa constituye la HIPÓTESIS DEL CONTINUO.

Muchos conjuntos matemáticamente muy diversos, como el de los números naturales, el de los enteros negativos o el de los racionales, se diferencian unos de otros por el distinto orden en que están dados sus miembros. Cantor también exploró el orden de los conjuntos infinitos, y se interesó particularmente por el BUEN ORDEN que exhiben los conjuntos que son como extrapolaciones transfinitas de la serie de los números naturales. Para caracterizar y medir mejor ese orden introdujo los números ORDINALES como tipos de orden de los buenos órdenes y desarrolló la ARITMÉTICA ORDINAL transfinita. En 1883 formuló sin prueba el principio del buen orden: todo conjunto puede ser bien ordenado. Más tarde, en 1923, von Neumann introdujo una nueva y más elegante caracterización de los ordinales.

Con el desarrollo del lenguaje conjuntista y de las teorías de la cantidad y del orden, la teoría de conjuntos había alcanzado una temprana madurez y servía de base a nuevas disciplinas matemáticas como la topología, según se pone de manifiesto en el primer libro de texto de teoría de conjuntos (y de topología conjuntista), publicado por Hausdorff en 1914. Sin embargo, un número creciente de lógicos y matemáticos pensaban que una disciplina tan central no podía seguir construyéndose de un modo meramente intuitivo, sino que requería una clarificación fundamental, que solo podría venir del uso riguroso del método axiomático.

La motivación para la axiomatización era doble. Por un lado, una serie de PARADOJAS, como la publicada por Burali-Forti en 1897, la comentada por Cantor en carta a Dedekind en 1899 o la comunicada por Russell a Frege en 1902, alertaban de que lo infinito estaba sembrado de minas y había que tomar precauciones. Por otro lado, la noción de una prueba aceptable no estaba clara mientras no se explicitasen las premisas últimas admisibles en las demostraciones conjuntistas. Esta era la motivación de Zermelo, que había estado tratando de demostrar el teorema del buen orden. En 1904 logró probarlo, pero se dio cuenta de que en la prueba había introducido como premisa un principio nuevo, el AXIOMA DE ELECCIÓN. La prueba no estaría terminada hasta explicitar todos los principios en que se basaba. En 1908 publicó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos.

La axiomatización de Zermelo permite deducir el teorema del buen orden y evitar las paradojas de Burali-Forti, de Cantor y de Russell, pues según ella no existen los conjuntos que las provocan. Sin embargo, todavía requería añadidos y retoques. Su AXIOMA DE SEPARACIÓN utilizaba la vaga noción de "función proposicional definida", que Skolem en 1922 propuso sustituir por otra más precisa, basada en un lenguaje formal de primer orden. También en 1922 Fraenkel y Skolem propusieron añadir un nuevo axioma a los de Zermelo, el AXIOMA DE REEMPLAZO, que se necesita en muchas demostraciones. Con estas dos mejoras queda constituida la teoría axiomática de conjuntos llamada de Zermelo-Fraenkel y abreviada ZF, que consta de los siguientes axiomas: AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD, axiomas de existencia del conjunto vacío, del conjunto unitario y del par, axioma de separación, axioma del conjunto potencia, axioma de la gran unión, AXIOMA DE INFINITUD y axioma de reemplazo. Si añadimos el axioma de elección (AC), obtenemos la teoría de Zermelo-Fraenkel con elección, abreviada ZFC.

En 1925 von Neumann introdujo una nueva axiomatización de la teoría de conjuntos, basada en la distinción entre conjuntos y clases propias. Von Neumann permitía hablar de todas las clases que Zermelo había evitado, pero solo como CLASES ÚLTIMAS o propias, incapaces de ser miembros de otras clases, con lo que también evitaba las contradicciones. Además introdujo el AXIOMA DE REGULARIDAD o buena fundación, que permite identificar el UNIVERSO CONJUNTISTA con la JERARQUÍA ACUMULATIVA. El sistema axiomático de von Neumann es finitamente axiomatizable. Posteriormente la teoría de von Neumann fue simplificada y ampliada entre 1937 y 1940 por R. Robinson, Bernays y Gödel, dando lugar a la teoría de conjuntos llamada de von Neumann-Bernays-Gödel, abreviada NBG. Las teorías ZFC y NBG coinciden en lo que afirman de los conjuntos y solo se diferencian en que ZFC no habla de las clases últimas que sí menciona NBG. Ambas teorías pueden considerarse como versiones alternativas de la teoría clásica o estándar de conjuntos.

Desde 1929, en que von Neumann hizo uso del método de los modelos internos para probar la consistencia relativa del axioma de regularidad respecto a sus otros axiomas, una gran parte de la investigación conjuntista ha tomado los derroteros de la metamatemática, tratando de establecer las relaciones de incompatibilidad, consistencia relativa, consecuencia e independencia entre los diversos axiomas, principios e hipótesis propuestas. En 1938 Gödel probó la consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los otros axiomas de la teoría de conjuntos NBG mediante la construcción del modelo interno de los CONJUNTOS CONSTRUCTIBLES. En 1961 Dana Scott probó que la existencia de un CARDINAL MEDIBLE implica la negación del AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD de Gödel. En 1963 Paul Cohen demostró la independencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo respecto de ZF por el método del *FORCING*, cuyas numerosas y fecundas aplicaciones han dominado el desarrollo posterior de la teoría de conjuntos.

Los teóricos han seguido explorando nuevas posibilidades y principios. En 1962 Mycielsky y Steinhaus propusieron añadir el AXIOMA DE DETERMINACIÓN a ZF en vez de AC. En 1970 Martin y Solovay propusieron el axioma de Martin, que da respuestas opuestas a las del axioma de constructibilidad a diversas cuestiones matemáticas. La exploración de las hipótesis sobre cardinales grandes y sobre combinatoria infinitaria también han desempeñado un papel importante en la investigación reciente.

Todos los progresos de la teoría de conjuntos de los últimos sesenta años se basan en su axiomatización como una teoría formal de primer orden (sea ZFC o NBG u otra) y en la utilización sofisticada de las técnicas metalógicas, en estrecha conexión con diversas ramas de la matemática, como la topología y el análisis. De todos modos, la parte de la teoría de conjuntos que se necesita para la matemática y la lógica usuales se conoce ya desde hace muchas décadas y es invariante respecto a las diversas axiomatizaciones y principios propuestos.

teoría de la decisión (A. *Entscheidungstheorie*, F. *théorie de la décision*, I. *decision theory*). Disciplina que combina conceptos cuantitativos de utilidad y probabilidad en la formulación de algoritmos para calcular la decisión "más racional" en toda clase de circunstancias. Aunque la idea misma estaba sugerida ya en *El arte de pensar* de Arnauld y Nicole (1662), la teoría de la decisión se ha desarrollado propiamente desde la publicación de la *Teoría de los juegos* de von Neumann y Morgenstern (1944). Esta teoría ejerce gran influencia en las ciencias sociales, habiéndose convertido en la base teórica de la microeconomía clásica y neoclásica y de otras ramas de la economía, así como en la ética y la teoría política contemporáneas, como se aprecia en la

obra de autores como James Buchanan, Jon Elster o John Rawls. Específicamente, en filosofía de la ciencia, cabe mencionar el ensayo de Maher (1993), que aplica la teoría de la decisión a la aceptación o rechazo de teorías científicas.

La teoría de la decisión trata de las situaciones en que un agente ha de elegir entre varias acciones o cursos de acción alternativos, cada uno de los cuales tendrá *consecuencias* distintas según cuál sea el estado real de las cosas. En la jerga de la teoría de la decisión, la *utilidad* de una de estas consecuencias en su deseabilidad para el agente. Cuanto más la desee el agente, tanta más utilidad tendrá para él. La teoría de la decisión racional considera tres tipos distintos de situaciones:

1. *Decisiones bajo condiciones de certeza.* Si el agente sabe (o cree saber) cuál será el resultado de cada una de sus acciones posibles, entonces decimos que actúa bajo condiciones de certeza. En ese caso se trata de maximizar o minimizar un parámetro, bajo ciertos constreñimientos. El ejemplo típico es el de la confección de un menú que trate de minimizar el coste, bajo constreñimientos dietéticos sobre mínimos de calorías, proteínas, hidratos de carbono y vitaminas. La técnica formal para resolver este tipo de problemas es la programación lineal.

2. *Decisiones bajo condiciones de riesgo.* El agente tiene que decidir entre un conjunto de acciones alternativas, de cuyas consecuencias no está seguro, aunque se atreve a asignarles probabilidades subjetivas. También suponemos que el agente puede asignar utilidades a las diversas consecuencias posibles. (Para ello basta con que el agente tenga una relación binaria de preferencia entre consecuencias que satisfaga ciertas condiciones obviamente razonables, como la transitividad; entonces se pueden definir escalas ordinales de utilidad compatibles con esa relación de preferencia). La solución de este tipo de problemas viene dada por la regla de Bayes: *actúa de tal modo que maximices tu utilidad esperada.* La utilidad esperada de una acción es la suma ponderada por la probabilidad de las utilidades de sus diversas consecuencias posibles. Si llamamos $C = \{{}^a c_1, \ldots, {}^a c_n\}$ a las consecuencias posibles de una determinada acción a, $u : C \to \mathbb{R}$ a la función de utilidad y $p : C \to \mathbb{R}$ a la de probabilidad, la utilidad esperada UE de esa acción a será

$$\mathrm{UE}(a) = \sum_{i=1}^{n} u({}^a c_i)\, p({}^a c_i)$$

La decisión de elegir la acción a es racional si y solo si UE(a) no es menor que la utilidad esperada de cualquier otra acción alternativa posible.

3. *Decisión bajo condiciones de incertidumbre.* El agente está tan inseguro respecto a las consecuencias que pueda tener cada acción, que ni siquiera

se atreve a asignarles probabilidades subjetivas. De todos modos, les puede asignar utilidades. En este tipo de situaciones (al contrario de lo que ocurría en las anteriores) no hay ninguna regla unívoca y comúnmente aceptada para resolver el problema. Lo único que hay es una pluralidad de reglas incompatibles, que corresponden a otros tantos temperamentos o actitudes distintos. Dos reglas famosas y extremas son MAXIMIN (Actúa de tal manera que maximices la mínima utilidad —o, equivalentemente, actúa de tal manera que minimices el máximo riesgo, actúa teniendo en cuenta solo el peor caso posible) y MAXIMAX (Actúa de tal manera que maximices la máxima utilidad —o, equivalentemente, actúa suponiendo que vas a ganar, actúa teniendo en cuenta solo el mejor caso posible).

La teoría de la decisión racional supone que el sujeto sabe lo que quiere (o lo que prefiere) en todas las circunstancias. Eso es una idealización poco realista. Aunque la regla de Bayes es difícilmente atacable, no siempre es aplicable, pues a veces el sujeto no sabe exactamente lo que quiere. La programación lineal y la regla de Bayes formalizan nuestra intuición de la consistencia práctica. Allí donde son aplicables, es imposible entenderlas y no estar de acuerdo con ellas, sin contradecirse en un sentido práctico, es decir, sin reconocer que no queremos aquello que decíamos querer.

teoría indecidible (A. *unentscheidbare Theorie*, F. *théorie indécidable*, I. *undecidable theory*). Una teoría T es *indecidible* si y solo si no es decidible. Dicho directamente, una teoría T es indecidible si y solo si no hay ningún algoritmo que, aplicado a cualquier sentencia α del lenguaje de T, nos permita decidir en un número finito de pasos si $\alpha \in T$ o si $\alpha \notin T$.

teoría reducible a otra (A. *reduzierbare Theorie*, F. *théorie réductible à une autre*, I. *reducible theory*). Una teoría T es reducible a otra teoría Σ si y solo si T está incluida en alguna extensión definicional de Σ. Si T es reducible a Σ, Σ ya contiene toda la información de T y solo necesita del añadido de algunas definiciones para hacerlo patente.

teorías compatibles (A. *verträgliche Theorien*, F. *théories compatibles*, I. *compatible theories*). Dos teorías T y Σ son compatibles si y solo si tienen una extensión común consistente, es decir, si hay una teoría Θ tal que Θ es una extensión de T y Θ es una extensión de Σ y Θ es consistente. Otra definición equivalente es que T y Σ son compatibles si y solo si su unión $\{\alpha : T \cup \Sigma \vdash \alpha\}$ es consistente.

término (A. *Term*, F. *terme*, I. *term*). Los términos desempeñan en el lenguaje formal una función parecida a los nombres, pronombres y expresiones

nominales en el lenguaje natural, es decir, son usados semánticamente para referirse a individuos. Un término de un lenguaje formal es una hilera o secuencia finita de signos del alfabeto de ese lenguaje formada de acuerdo con las reglas de construcción de los términos. En la lógica proposicional no hay términos. Los términos de un lenguaje formal de primer orden se definen recursivamente mediante las siguientes reglas: (1) Cualquier variable individual x es un término. (2) Cualquier constante individual es un término. (3) Si f es un functor (un signo de función) n-ario y $\tau_1 \ldots \tau_n$ son términos, entonces $f\tau_1\ldots\tau_n$ es un término. Términos son todas y solas las secuencias de signos formadas por aplicaciones sucesivas de estas tres reglas. En el caso de habérnoslas con un lenguaje formal provisto de descripciones, habría que añadir una cuarta regla de formación: (4) Si x es una variable individual y $\alpha(x)$ es una fórmula en la que x está libre, entonces $\iota x\alpha(x)$ es un término. En la práctica matemática es usual escribir un functor binario en medio de los dos términos a los que se aplica y no al principio: no solemos escribir $+xy$, sino $(x+y)$. Otras veces los functores se escriben delante o detrás. Un término con alguna variable libre, como $(x+y)^2$, es un término abierto. Un término sin variables libres, como $(5+7)^2$, es un término cerrado.

términos observacionales y teóricos (A. *Beobachtungsterme und theoretische Terme*, F. *termes observationnels et termes théoriques*, I. *observational and theoretical terms*). La partición del vocabulario científico en dos subconjuntos irreductibles, el *observacional* y el *teórico*, fue cobrando importancia para los seguidores del POSITIVISMO LÓGICO, a medida que se dieron cuenta de que no era posible fijar para cualquier predicado científico P condiciones necesarias y suficientes para aplicarlo a un objeto particular u que pudiesen constatarse mediante observaciones y al margen de todo supuesto teórico. Si P admitía este trato, P era reputado *observacional*; de otro modo, era un *término teórico*. Según Carnap (1956), un término M perteneciente al vocabulario teórico de una teoría T puede considerarse empíricamente significativo si y solo si T contiene un enunciado S_M en que figura M y es una de las premisas requeridas para inferir —deductiva o probabilísticamente— en T un enunciado S_O en que solo figuran predicados pertenecientes al vocabulario observacional de T.

El distingo entre *términos teóricos* y *observacionales* fue muy estudiado y debatido después que Hanson (1958) y otros mostraron que, al menos en la física, todos los términos utilizados, incluso los provenientes de la conversación ordinaria, portan una CARGA TEÓRICA.

términos *T*-teóricos (A. *T-theoretische Terme*, F. *termes T-théoriques*, I. *T-theoretic terms*). Concepto propio del ESTRUCTURALISMO epistemológico que

no debe confundirse con el concepto de *términos teóricos* del positivismo lógico (opuesto a TÉRMINO OBSERVACIONAL). Según Sneed (1971), una función f mencionada en una teoría física T es *T-teórica* si los valores de f solo pueden medirse en situaciones experimentales concebidas como modelos de T. (Tal sería, por ejemplo, el caso de la *fuerza* en la mecánica newtoniana.) Un *término P* de T es *T-teórico* si su FUNCIÓN CARACTERÍSTICA χ_P es T-teórica. Los estructuralistas sostienen que cada término no T-teórico de una teoría T es un término Z-teórico de alguna otra teoría Z. Ello invita a clasificar las teorías físicas en grupos de distinto nivel según el criterio siguiente: una teoría T cuyos términos son todos T-teóricos pertenece al nivel 0; una teoría T pertenece al nivel n (> 0) si algún término no T-teórico de T es Z-teórico en una teoría Z de nivel $n - 1$, y ningún término no T-teórico de T es Y-teórico en una teoría Y de nivel superior a $n - 1$. Sin embargo, no es evidente que esta clasificación se pueda aplicar consistentemente. Desde luego, para medir con precisión una función física tan universal (y primaria) como la *distancia* se usan hoy instrumentos que tienen que concebirse como modelos de la electrodinámica, y aun de la electrodinámica cuántica, la cual no podría ser una teoría de nivel 0 según el criterio anterior.

termodinámica (A. *Thermodynamik*, F. *thermodynamique*, I. *thermodynamics*). Rama de la física que estudia la transformación del CALOR o energía térmica en energía mecánica y viceversa. La *termodinámica* fue fundada hacia 1850 por William Thomson (Lord Kelvin) y Clausius sobre la base de hallazgos de Carnot y Joule. Motivada originalmente por el interés en mejorar el rendimiento de las máquinas térmicas y el deseo de entregar sin tardanza resultados confiables a los ingenieros que las diseñan, la termodinámica prescinde de hipótesis sobre la estructura íntima de las cosas para explicar los fenómenos que la ocupan y está toda ella edificada sobre dos principios muy generales que enuncian simple y tajantemente ciertas características universales del acontecer. Se la cita por eso como el principal ejemplo de una teoría física FENOMENOLÓGICA (Bunge) o *de principios* (Einstein).

El *primer principio* (o *primera ley*) *de la termodinámica* es simplemente el principio de conservación de la ENERGÍA, aplicado a sistemas termodinámicos. Puede enunciarse así: la variación en la energía U de un sistema durante un lapso de tiempo t está dada por:

$$\Delta U = -W_S + W_E - Q_S + Q_E$$

donde W_S es el trabajo ejecutado por el sistema sobre el ambiente, W_E es el trabajo realizado sobre el sistema por fuerzas externas que actúan sobre él, Q_S es el calor entregado y Q_E el calor recibido por el sistema, todo ello durante

el tiempo *t*. La adopción de este principio fue una consecuencia directa de los resultados experimentales de Joule, que Thomson (1853) generalizó así:

> *Cuando cantidades iguales de efecto mecánico se obtienen por cualquier medio de una fuente puramente térmica, o se pierden en efectos puramente térmicos, se eliminan o [respectivamente] generan cantidades iguales de calor.*

Históricamente, el primer principio de la termodinámica contribuyó decisivamente al desarrollo, en la segunda mitad del siglo XIX, del concepto de energía multiforme, sujeta a un principio universal de conservación.

El *segundo principio* (o *segunda ley*) *de la termodinámica* fue formulado así por Clausius (1854):

> *Nunca se puede trasmitir calor de un cuerpo más frío a uno más caliente sin que ocurra simultáneamente otra transformación conectada con esta.*

Este enunciado suele presentarse como equivalente a este otro, atribuido a Thomson:

> *No puede ocurrir un proceso cuyo único resultado consista en transformar en trabajo una cantidad de calor extraída de una fuente cuya temperatura es por doquier la misma.*

Para otra versión del segundo principio. ↗ENTROPÍA.

Un proceso que viole el segundo principio de la termodinámica suele llamarse "un móvil perpetuo de segunda clase" (mientras que un móvil perpetuo a secas o de primera clase es un proceso que viola el primer principio). Un ejemplo sencillo sería este: un acondicionador de aire que funcione sin otra fuente de energía que el calor que extrae de la habitación enfriada por él.

A los dos principios citados se agregan a menudo otros dos. El *tercer principio* (o *tercera ley*) *de la termodinámica* —enunciado primero por Nernst— dice que *la* ENTROPÍA *de un sistema a la* TEMPERATURA *de* 0 K *es independiente de todos los parámetros macroscópicos que describen el sistema y constituye por tanto una constante universal* cuyo valor se pone igual a 0. El llamado *principio 0-ésimo* (o *ley 0-ésima*) *de la termodinámica* dice que *dos cuerpos en equilibrio térmico con un tercero también están en equilibrio térmico entre sí* (en otras palabra, si *A*, *B* y *C* son tres cuerpos tales que, si *A* entra en contacto con *C*, ninguno de los dos le cede calor al otro, y otro tanto vale para *B* y *C*, también vale lo mismo para *A* y *B*).

tertium non datur (A. *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, F. *principe du tiers exclu*, I. *law of excluded middle*). El principio del *tertium non datur* o del tercio excluso postula que todo enunciado es verdadero o falso. No hay una tercera posibilidad (en latín, *tertium non datur*); una tercera posibilidad está excluida (de ahí el nombre de *principio del tercio excluso*). Otras formulaciones son: para cada enunciado A, A o no A. Hay que afirmar o negar A. Para cada fórmula φ y cada interpretación $\mathfrak{I}$, φ es satisfecha por $\mathfrak{I}$ o $\neg\varphi$ es satisfecha por $\mathfrak{I}$. El principio ya había sido formulado por Aristóteles en la *Metafísica*: "No puede darse un término intermedio entre los dos términos de una contradicción, sino que necesariamente se ha de afirmar o negar uno de ellos de una cosa cualquiera". También Crisipo lo incorporó a su sistema lógico. Aunque en la antigüedad fue a veces cuestionado en su aplicación a los futuros contingentes, por sus supuestas implicaciones deterministas, no fue seriamente cuestionado en la lógica hasta 1908, cuando Brouwer lo hizo objeto de una crítica radical. Desde entonces, el rechazo del *tertium non datur* constituye una de las señas de identidad del INTUICIONISMO. Brouwer pensaba que el principio era válido para los conjuntos finitos, pero no para los infinitos. En efecto, concebía la verdad como prueba (por construcción mental) y la falsedad como refutación, por lo que el principio dejaba de ser válido en los muchos casos en que un enunciado no había podido ser probado ni refutado. Si decimos que en un conjunto finito A hay un x con cierta propiedad, siempre podemos pasar revista a todos los elementos de A y comprobar si efectivamente alguno de ellos posee esa propiedad. Pero si A es un conjunto infinito, es imposible pasar revista a todos sus elementos, pues ello constituiría una tarea inacabable. Por tanto, no podemos probar ni refutar que algún x de ese conjunto infinito tiene esa propiedad, mientras no lo hayamos encontrado. El correspondiente enunciado no es verdadero ni falso, no podemos afirmarlo ni negarlo. El principio del tercio excluso no vale. De todos modos, en la lógica y la matemática clásica se considera que el principio es válido y que, si no somos capaces de probar ni refutar un enunciado acerca de un conjunto infinito, ello muestra nuestras limitaciones cognoscitivas, no la falta de validez del principio.

tesis de Church (A. *Churchsche These*, F. *thèse de Church*, I. *Church's thesis*). En 1933 Alonzo Church introdujo la noción de definibilidad-λ de funciones como precisión de la computabilidad en sentido intuitivo. En 1934, y tras discutir el tema con Church, Gödel introdujo con la misma intención la noción de FUNCIÓN RECURSIVA. En 1936 Kleene probó que ambas nociones son equivalentes, lo que motivó que Church enunciara la llamada *tesis de Church*, es decir, la tesis de que el concepto de función recursiva (o λ-definible) capta perfectamente la noción intuitiva de función computable. *Simul-*

táneamente, Turing desarrollaba su noción de computabilidad, basada en el análisis directo de los pasos de la computación y plasmada en la MÁQUINA DE TURING, propuesta en 1936. La precisión de Turing parecía la más intuitiva de todas, pero también era equivalente a la de Church y a la de Gödel. Posteriormente se han propuesto otras dilucidaciones, como las basadas en los cálculos canónicos de Post o en los algoritmos normales de Markov o en las máquinas ideales de registros, pero todas ellas han resultado ser también equivalentes a las anteriores. El hecho de que todas estas definiciones, con sus puntos de partida y motivaciones diferentes, resultaran ser equivalentes entre sí hizo aumentar la confianza en la tesis de Church, que terminó siendo aceptada por casi todos. En cualquier caso, todas las funciones computables en el sentido intuitivo conocidas hasta ahora son también recursivas.

tesis de Duhem y Quine (A. *Duhem-Quine These*, F. *thèse de Duhem et Quine*, I. *Duhem-Quine thesis*). Según Duhem (1906), "un experimento de física nunca puede condenar una hipótesis aislada, sino solamente todo un sistema teórico"; por lo tanto, en física —a diferencia de otras ciencias, como la fisiología— no tiene cabida un EXPERIMENTO CRUCIAL. Basándose en su crítica al distingo ANALÍTICO/SINTÉTICO, Quine (1951) concluye que "nuestros asertos sobre el mundo exterior enfrentan el tribunal de la experiencia no individualmente, sino como un cuerpo solidario". La diferencia entre estas dos tesis salta a la vista: Duhem se refiere exclusivamente a las hipótesis de la física matemática —y no a asertos singulares, por ejemplo, que este amperímetro aplicado a este circuito eléctrico refleja la presencia de una corriente ahora— y excluye expresamente las demás ciencias; además, con la expresión "un sistema teórico" (*un ensemble théorique*) ni siquiera entiende referirse a la totalidad de la física. Sin embargo, como Quine cita en defensa de su propia tesis las páginas donde Duhem arguye en pro de la suya, ha cobrado fuerza el hábito de confundirlas.

tiempo (A. *Zeit*, F. *temps*, I. *time*). Término que comprende varios aspectos capitales de la existencia, diversos pero relacionados entre sí. Para las ciencias naturales y la filosofía de la ciencia importan sobre todo los cuatro siguientes:

a. Si Q es un proceso o EVENTO cualquiera, individualizado como tal de cualquier modo, cabe preguntar *cuánto* dura, esto es, cuánto *tiempo* pasa desde que comienza hasta que concluye. Esta es la cantidad que miden los RELOJES, mediante la repetición consecutiva de un fenómeno periódico cuya duración se supone invariable y se adopta como estándar. Para determinar cuánto tiempo se toma Q, esto es, la longitud del

lapso que transcurre mientras Q ocurre, se cuenta el número de períodos que completa un reloj entre el inicio y el término de Q.

b. Si Q es un proceso o evento cualquiera, cabe preguntar *cuándo* acontece, esto es, en qué *tiempo* ocurre. Este se determina relativamente a la ocasión cuando ocurrió un cierto evento estándar O. La *fecha* de Q, esto es, el tiempo cuando ocurre, se determina midiendo el lapso de tiempo trascurrido entre ambos.

c. Sean Q y P dos eventos cualesquiera. Caben tres posibilidades: o bien Q y P ocurren ambos al mismo tiempo, vale decir, son *simultáneos*; o bien Q ocurre cuando P ya había ocurrido, de modo que P es *anterior* a Q y lo *precede*; o bien P ocurre cuando Q ya había ocurrido, y P es *posterior* a Q y lo *sucede*. La relación *anterior a* determina un ORDEN PARCIAL estricto en el conjunto $\mathscr{E}$ de los eventos. La simultaneidad es claramente una EQUIVALENCIA; denotémosla con $\sim$. Normalmente entendemos que el cociente $\mathscr{E}/\sim$ del conjunto de los eventos por la relación de simultaneidad ostenta un ORDEN LINEAL determinado por la relación de precedencia entre sucesos no simultáneos, aunque otras civilizaciones y algunos filósofos de la nuestra han pensado que se trata de un orden cíclico.

d. De lo dicho bajo la letra c se desprende que el acto mismo de hablar y hacer aseveraciones ahora y aquí determina una partición del acontecer universal en tres dominios o *tiempos*: el *tiempo pasado*, que reúne todos los eventos anteriores a ese acto; el *tiempo futuro*, al que se asignan todos los que han de sucederle; y el *tiempo presente* de los eventos simultáneos con él. No hay duda de que el tiempo pasado es irreparable. Nuestra vida práctica parece requerir, en cambio, que el futuro dependa de nosotros, aunque sea solo en una pequeñísima medida. En cuanto a lo presente, o bien está firmemente en nuestro poder (vgr. la dirección del lápiz con que escribo, el curso de la frase que pronuncio), o bien se habrá hecho pasado antes que nos demos cuenta.

Desde el punto de vista del sentido común, el aspecto d no es menos obvio que los aspectos a, b y c, y su importancia vital es insoslayable. Pero la física moderna, que recoge y concierta admirablemente a, b y c en su concepto del tiempo "absoluto, verdadero y matemático" (Newton), no da cabida a d; en parte, quizás, porque su vocación determinista induce a juzgar ilusorio el distingo entre un pasado inalterable y un futuro hacedero; pero también, sin duda, porque la fugacidad del presente resulta intratable para una ciencia matemática.

El paso decisivo hacia el concepto físico-matemático de tiempo lo dio Aristóteles cuando —inspirándose probablemente en el proceder de los as-

trónomos— estableció una correspondencia biyectiva entre las posiciones sucesivas de un móvil y las ocasiones en que este ocupa cada una. Aristóteles usa esta biyección en su crítica a las PARADOJAS DE ZENÓN; pero también la presupone factible cuando habla del movimiento eterno de los cielos.

Sea f la correspondencia que asigna a cada punto del trayecto de una estrella fija cualquiera el instante en que esta pasa por él; para que f sea lo que llamamos una FUNCIÓN, contamos como puntos diferentes del trayecto los que la estrella visita reiteradamente en distintas ocasiones. Sea δ la correspondencia que asigna a cada punto x del trayecto de la estrella, o bien la distancia, medida en radianes, que ella recorre para llegar a x desde un punto de referencia arbitrario p, o bien, si pasó por x antes que por p, la distancia multiplicada por -1 que ella recorre para llegar a p desde x. Entonces, si el movimiento de la estrella es eterno, la función compuesta $\delta \circ f^{-1}$ es un ISOMORFISMO de órdenes lineales entre $\mathscr{E}/\sim$ y $\mathbb{R}$, y resulta natural conferir a $\mathscr{E}/\sim$ la topología más débil que haga de esta función un HOMEOMORFISMO. Como Aristóteles sabía sin duda parametrizar un movimiento por la distancia recorrida, no es impropio atribuirle el origen de estas ideas, o mejor quizás al astrónomo Eudoxo; aunque ciertamente ninguno de los dos las habría expresado en estos términos.

Destruidos los cielos por Tycho Brahe y Kepler, el tiempo matemático de la astronomía griega pervive trasmutado en tiempo absoluto newtoniano, que "en sí mismo y por su propia naturaleza fluye uniformemente sin relación con nada externo", aunque puede exhibirse en los fenómenos del movimiento. Específicamente, por la primera LEY DEL MOVIMIENTO, una partícula libre que nunca tropezase con nada recorrería eternamente distancias iguales en tiempos iguales, fundando un isomorfismo entre $\mathscr{E}/\sim$ y $\mathbb{R}$ en todo comparable al que atribuimos a Eudoxo. Según Newton, claro, solo puede haber una partícula libre donde no haya gravedad, esto es, a infinita distancia de las demás cosas; pero una esfera perfectamente rígida podría rotar indefinidamente con velocidad angular uniforme y dar expresión al "tiempo verdadero" aun en presencia de otros cuerpos. La Tierra —como Kant comprendió ya en el siglo XVIII— pierde momento angular paulatinamente por el roce de las mareas; sin embargo, simula tan bien una realización de dicho objeto ideal que hasta mediados del siglo XX fue considerada un reloj inmejorable. (Supera a cualquier reloj mecánico y es tan fiable como un buen reloj de cuarzo.)

La combinación de los aspectos a, b y c, tan bien lograda en el concepto del tiempo newtoniano, no pudo sobrevivir a la crítica de Einstein (1905b, §1). En sus teorías de la RELATIVIDAD, cualquier fenómeno puede cronometrarse con un reloj contiguo (aspecto a); pero la sincronización de fenómenos distantes, requisito de una cronología que no sea puramente local (aspecto b), es relativa al MARCO DE REFERENCIA que se adopte, y una cronología global

puede muy bien ser topológicamente imposible en un universo regido por las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN (a menos que postulemos como requisito suplementario la estabilidad CAUSAL del modelo, como hacemos en el modelo cosmológico del *Big Bang*). No hay pues *un* orden universal del tiempo, sino tantos como métodos admisibles de sincronización a distancia (lo que podría ser *ninguno*). Sin embargo, en la medida en que el Universo se parezca a un modelo del *BIG BANG*, tiene sentido hablar de una tosca cronología cósmica que se manifiesta en la temperatura de la radiación de fondo así como en la longitud de las COSMOLÍNEAS de los centros de gravedad de los supercúmulos de galaxias, y que es como un pálido reflejo de la exacta foliación del espaciotiempo del modelo en hipersuperficies de simultancidad indexadas por el *tiempo cósmico*.

Según las teorías de la relatividad, ninguna señal puede trasmitirse a una velocidad superior a la de la LUZ en el vacío. Esto afecta profundamente a la partición de los eventos en pasados, presentes y futuros (aspecto **d**). Sea *H* un evento que ocurre aquí y ahora. *H* determina una partición de los eventos en tres grupos: (i) aquellos que, por su distancia espacial y temporal de *H*, podrían coincidir con la recepción de una señal emitida ahora y aquí; (ii) aquellos que, por su distancia espacial y temporal de *H*, podrían coincidir con la emisión de una señal emitida ahora y aquí; (iii) aquellos que, por su distancia espacial y temporal de *H*, no pueden estar conectados con *H* por una señal de ninguna clase. Los grupos (i) y (ii) forman, respectivamente, el *futuro* CAUSAL y el *pasado* CAUSAL de *H*. Pero no sería apropiado llamar "el presente de *H*" a los eventos del grupo (iii), puesto que, con respecto a *H*, están más bien absolutamente *ausentes*. Grünbaum los llamó "topológicamente simultáneos" con *H*. Importa destacar que, a diferencia de la simultaneidad a secas, la llamada simultaneidad topológica no es una equivalencia: dos eventos pueden ser topológicamente simultáneos con un tercero sin ser topológicamente simultáneos entre sí.

tiempo propio (A. *Eigenzeit*, F. *temps propre*, I. *proper time*). Según las teorías de la RELATIVIDAD (especial y general), el lapso de tiempo registrado por dos relojes iguales entre dos encuentros es diferente —por regla general— a menos que los relojes hayan permanecido juntos (↗PARADOJA DE LOS MELLIZOS). Por eso se dice que los relojes miden el *tiempo propio* a lo largo de su respectiva COSMOLÍNEA (y no un pretendido tiempo universal). En la formulación geométrica de ambas teorías, el tiempo propio de una partícula entre un evento *A* y otro evento *B* se define simplemente como la longitud que la MÉTRICA LORENTZIANA del espaciotiempo asigna a la cosmolínea de esa partícula desde *A* hasta *B*. (Definimos *cosmolínea* como una curva parametrizada por el tiempo propio; ello no implica que la presente definición de *tiempo*

propio sea circular, pues la longitud de una curva no depende de la parametrización.) Dada esta definición teórica de tiempo propio, cabría esperar que la física ofrezca una explicación teórica del hecho de que los procesos naturales —especialmente, aquellos en que se basa la construcción de los relojes atómicos— se ajustan al tiempo propio en su respectiva localidad. No lo ha hecho hasta ahora. La teoría general de la relatividad se limita a postularlo (y a disfrutar de la comprobada compatibilidad de este postulado con la información recogida de la experiencia).

tipo de orden (A. *Ordnungstypus*, F. *type d'ordre*, I. *order type*). El tipo de orden de un orden lineal $\langle A,<\rangle$ es lo que tienen en común todos los órdenes lineales isomorfos con $\langle A,<\rangle$. Si dos órdenes lineales son isomorfos, entonces tienen el mismo tipo de orden; y si tienen el mismo tipo de orden, son isomorfos. La noción de *tipo de orden* es una función definida para todos los órdenes lineales, tal que para cualesquiera órdenes lineales $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$: tipo de orden de $\langle A,R\rangle$ = tipo de orden de $\langle B,S\rangle \Leftrightarrow \langle A,R\rangle \cong \langle B,S\rangle$.

La noción de tipo de orden fue concebida por Cantor en 1883 y explícitamente expuesta en 1895 como base de su teoría de los números ordinales. El tipo de orden de un conjunto bien ordenado sería la noción obtenida a partir de ese conjunto cuando abstraemos de la naturaleza de sus miembros y nos fijamos solo en la sucesión de sus elementos. Cantor definió los ORDINALES como los tipos de orden de los buenos órdenes. Los números naturales son los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados finitos. Los números ordinales transfinitos son los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados infinitos.

Puesto que la relación de isomorfía entre órdenes lineales es una relación de equivalencia, que da lugar a una partición de la clase de los órdenes lineales en clases de equivalencia, es posible identificar cada una de estas clases con un tipo de orden. De todos modos, y debido a las dificultades técnicas asociadas con las clases de tamaño o cardinalidad enorme, es preferible identificar cada tipo de orden con un representante de una de esas clases de equivalencia, como propuso von Neumann en 1923. Un orden lineal $\langle A,R\rangle$ tiene el tipo de orden τ si τ es el representante elegido de la clase de equivalencia (respecto a isomorfía) de $\langle A,R\rangle$. Por tanto, τ es un orden lineal, tal que $\langle A,R\rangle \cong \tau$.

Cantor llamó ω al tipo de orden de los números naturales, ζ al de los números enteros y η al de los números racionales. ω, el tipo de orden de $\langle \mathbb{N},<\rangle$, puede identificarse con $\langle \mathbb{N},<\rangle$ mismo, como el representante elegido de su clase de equivalencia. Por tanto, ω es el orden lineal de los números naturales en su ordenación estándar y, al mismo tiempo (y como representante elegido), es el tipo de orden de sí mismo y de todos los órdenes lineales isomorfos con él. ω = tipo de orden de $\langle \mathbb{N},<\rangle = \langle \mathbb{N},<\rangle = \langle 0,1,2,3,4,5,6,\ldots\rangle$. η = tipo de orden de $\langle \mathbb{Q},<\rangle$. Cantor mostró también cómo caracterizar el tipo η con

independencia de los racionales: cada conjunto ordenado numerable y denso sin elemento máximo ni mínimo tiene el tipo de orden η.

Si τ es el tipo de orden de $\langle A,<\rangle$, entonces τ^* es el tipo de orden inverso o *dual*, es decir, el tipo de orden de $\langle A,>\rangle$, que también es un orden lineal, si $\langle A,<\rangle$ lo es. Así, mientras ω es el tipo de orden de $\langle 0,1,2,3,4,5,\ldots\rangle$, ω^* es el tipo de orden de $\langle \ldots,5,4,3,2,1,0\rangle$. $\omega \neq \omega^*$, ya que, por ejemplo, ω tiene un mínimo, y ω^* no. Mientras ζ es el tipo de orden de $\langle \ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\rangle$, ζ^* es el tipo de orden de $\langle \ldots3,2,1,0,-1,-2,-3,\ldots\rangle$. En este caso, sin embargo, ambos tipos de orden coinciden, $\zeta = \zeta^*$, pues los correspondientes órdenes lineales son isomorfos (bajo el isomorfismo $f(x) = -x$). También $\eta = \eta^*$.

Del hecho de que dos órdenes lineales tengan el mismo tipo de orden se sigue que son isomorfos y, por tanto, que tienen la misma cardinalidad. Pero, en general, no vale la inversa, es decir, dos órdenes lineales pueden tener la misma cardinalidad (e incluso el mismo universo) sin ser isomorfos y, por tanto, sin tener el mismo tipo de orden. Es lo que sucede, por ejemplo, con $\langle \mathbb{N},<\rangle$ y $\langle \mathbb{N},>\rangle$, según acabamos de ver. Por citar otro ejemplo, también el conjunto de los números enteros puede ser ordenado de diversas maneras no isomorfas con distinto tipo de orden: el tipo de orden de $\langle \ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\rangle = \omega^* + \omega = \zeta$, pero el tipo de orden de $\langle 0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\ldots\rangle = \omega$ y el tipo de orden de $\langle 1,2,3,4,\ldots -1,-2,-3,-4,\ldots 0\rangle = \omega + \omega + 1 = \omega \cdot 2 + 1$.

Todos los órdenes lineales con igual cardinalidad y distinto tipo de orden son infinitos. Todos los órdenes lineales finitos con la misma cardinalidad son isomorfos entre sí y, por tanto, tienen el mismo tipo de orden. Para cualesquiera órdenes lineales finitos $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$, el tipo de orden de $\langle A,B\rangle$ es igual al tipo de orden de $\langle B,S\rangle$ si y solo si la cardinalidad de A es igual a la cardinalidad de B.

Todos los órdenes lineales finitos con el mismo número m de elementos tienen el mismo tipo de orden, que identificamos con el segmento inicial $\langle 0,1,2,3,4,5,\ldots,m-1\rangle$ de ω, elegido como representante de esa clase de equivalencia. A su vez, los segmentos iniciales de ω pueden ser identificados con los números naturales, con lo que podemos considerar que los números naturales son los tipos de orden de los órdenes lineales finitos.

topología (A. *Topologie*, F. *topologie*, I. *topology*). La *topología* surge paulatinamente en el siglo XIX como el estudio de las propiedades geométricas que no se alteran con una deformación continua de la figura subyacente ("la geometría de un globo de goma"). A principios del siglo XX, con un gigantesco esfuerzo de abstracción, se propusieron diversas caracterizaciones —igualmente satisfactorias y equivalentes entre sí— de la estructura común a todos los "espacios" en que pueden definirse nociones de con-

tinuidad y de transformación continua. La caracterización siguiente es la más difundida.

Sea S un conjunto cualquiera. Una *topología* en S es una colección T de partes de S que cumple las condiciones siguientes:

T1 $S \in T$.
T2 $\varnothing \in T$.
T3 Si $X \in T$ y $Y \in T$, entonces $X \cap Y \in T$.
T4 Si $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una FAMILIA de elementos de T, entonces la unión $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ es un elemento de T.

$\langle S,T \rangle$ es un *espacio topológico*. Los elementos de S se llaman *puntos*; los elementos de T se llaman *abiertos*. Si X es un abierto, su COMPLEMENTO $T-X$ es un *cerrado*. Si $X \subseteq T$, el *interior* de X es la unión de todos los abiertos incluidos en X; la *clausura* de X es la intersección de todos los cerrados que incluyen a X; la *frontera* de X es el conjunto de todos los puntos de S que pertenecen a la clausura de X pero no pertenecen al interior de X. Sea p un punto; cada parte de S que incluye un abierto que contiene a p es un *entorno* de p (obsérvese que, según esta definición, un entorno de p puede ser abierto o no).

Si T_1 y T_2 son dos topologías en S tales que $T_1 \subseteq T_2$, se dice que T_1 es *más débil* o *más gruesa* que T_2 (y T_2 *más fuerte* o *más fina* que T_1).

Si $\langle S,T \rangle$ es un espacio topológico, la función biyectiva $f : S \rightarrow S$ es una transformación continua de S si y solo si para cada $U \in T$ hay un $X \in T$ tal que $U = f[X]$ —en otras palabras, si y solo si la preimagen de cada abierto es un abierto.

topología de subespacio (A. *Unterraumtopologie*, F. *topologie de sousespace*, I. *subspace topology*). Sean $\langle S,T \rangle$ un espacio topológico (↗TOPOLOGÍA) y U una parte de S. La *topología de subespacio* en U es la topología T_U definida así: $X \in T_U$ si y solo si X es la intersección de U con un abierto de T. El espacio topológico $\langle U,T_U \rangle$ es un *subespacio* de $\langle S,T \rangle$.

topología estándar en $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{R}$ es el cuerpo de los reales y n es un entero positivo, la *topología estándar* en el PRODUCTO CARTESIANO $\mathbb{R}^n$ se define así: dado cualquier par de números reales a y b, el *cubo abierto* $(a,b)^n$ es el conjunto de n-tuplos $\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle : a < x_1, \ldots, x_n < b\}$. La *topología estándar* en $\mathbb{R}^n$ es la topología más débil en que todos los cubos abiertos son abiertos.

torque (A. *Drehmoment*, F. *moment d'une force*, I. *torque*). En la mecánica clásica, el *torque* (o *torce*) **N** que experimenta una partícula en torno a un de-

terminado punto O es igual a la derivada con respecto al tiempo del MOMENTO ANGULAR **L** de esa partícula en torno a ese punto. Tenemos, pues, que

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

puesto que $\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p} = m(\mathbf{v}\times\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Como se puede ver, el torque tiene con el momento angular la misma relación que la FUERZA con el MOMENTO CINÉTICO. En vez de *torque* o *torce*, suele decirse *momento de una fuerza*.

trabajo (A. *Arbeit*, F. *travail*, I. *work*). En la mecánica clásica el *trabajo* se define así: (i) si una partícula p tiene un desplazamiento rectilíneo $\Delta\mathbf{r}$ mientras actúa sobre ella una fuerza constante **F**, el trabajo W que la fuerza realiza sobre la partícula está dado por

$$W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F\,\Delta r\cos\alpha \qquad (1)$$

donde F y Δr designan, respectivamente, las magnitudes de los vectores **F** y $\Delta\mathbf{r}$ y α es el ángulo entre ellos; (ii) si p recorre la curva C mientras actúa sobre ella la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, dependiente de la posición **r** de p, el trabajo W que la fuerza realiza sobre la partícula está dado por

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta que, en la ecuación (1), la fuerza **F** es igual al producto de la masa m de la partícula por la aceleración **a** que la fuerza le imprime (en la dirección del vector **F**), es claro que el trabajo W definido en esa ecuación es igual a $\frac{1}{2}m(\Delta\mathbf{r}/\Delta t)^2$, esto es, al incremento de la ENERGÍA cinética de la partícula en el lapso de tiempo Δt durante el cual la fuerza actúa sobre ella.

transformación (A. *Transformation*, F. *transformation*, I. *transformation*). Este término se usa a veces como sinónimo de FUNCIÓN; más específicamente, de PERMUTACIÓN (especialmente, si el dominio de la permutación es un ESPACIO TOPOLÓGICO).

transformación activa y pasiva (A. *aktive und passive Transformation*, F. *transformation active et passive*, I. *active and passive transformation*). Si un sistema físico se representa mediante objetos geométricos en una VARIEDAD DIFERENCIABLE $\mathcal{M}$, la descripción de estos suele estar referida a las CARTAS (sistemas de coordenadas) de $\mathcal{M}$. Una TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS sustituye una descripción por otra sin tocar los objetos que representan el siste-

ma, por lo cual algunos físicos y filósofos han dado en decir que es una transformación *pasiva*. En cambio, una permutación $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ recae sobre los objetos mismos y por eso la llaman *transformación activa*.

transformación de coordenadas (A. *Transformation von Koordinaten*, F. *transformation de coordonnées*, I. *coordinate transformation*). ↗CARTA.

transformación de Galileo (A. *Galilei-Transformation*, F. *transformation galiléenne*, I. *Galilei transformation*). En la física prerrelativista (mecánica clásica, electrodinámica de Maxwell, etc.), el método preferido para la descripción de los fenómenos y el enunciado de las leyes naturales utiliza un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS basado en planos ortogonales fijos en un MARCO DE REFERENCIA inercial y una coordenada temporal cuya base no se explica ni se cuestiona. Sean x, y, z las tres coordenadas cartesianas y t la coordenada temporal asociadas a un marco de referencia $\mathcal{R}$. Sean x', y', z' y t' las coordenadas homólogas asociadas a otro marco de referencia $\mathcal{R}'$ que se mueve con respecto a $\mathcal{R}$ a velocidad constante v. Si se emplean las mismas unidades —digamos, el metro y el segundo— para determinar las distancias e intervalos de tiempo representados por cada sistema de coordenadas, la transformación de coordenadas que expresa x', y', z' y t' en función de x, y, z y t es una *transformación de Galileo* (aunque no llegó a formularse sino mucho después de la muerte del físico florentino en 1642). Como el producto de dos transformaciones de Galileo también es una transformación de Galileo, las transformaciones de Galileo forman un grupo, llamado *grupo de Galileo*. Presentamos la transformación de Galileo más simple e importante, que corresponde al caso en que los ejes de las coordenadas x, y, z coinciden en el instante $t = t' = 0$, respectivamente, con los ejes de las coordenadas x', y', z', y $\mathcal{R}'$ se mueve con velocidad v en la dirección positiva del eje de las x:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad \text{(TG)}$$

Las primeras tres ecuaciones se complican un tanto si la velocidad de $\mathcal{R}'$ tiene componentes paralelos a los ejes de las y y de las z, o si el origen de las x, y y z no coincide en el instante $t = t' = 0$ con el de las x', y', z'; y todavía más si los ejes de estas coordenadas no son paralelos a los de aquella. La cuarta ecuación, en cambio, no admite más complicación que esta: $t' = t + a$ si $t' = a$ en el instante en que $t = 0$.

transformación de Lorentz (A. *Lorentz-transformation*, F. *transformation de Lorentz*, I. *Lorentz transformation*). En la física ajustada a la teoría especial de la RELATIVIDAD, el método preferido para la descripción de los fenómenos y el enunciado de las leyes naturales utiliza un sistema de COORDENADAS CARTESIANAS basado en planos ortogonales fijos en un MARCO DE REFERENCIA inercial y una coordenada temporal definida, para ese mismo marco, por el método de Einstein (↗SIMULTANEIDAD). Sean x, y, z y t las tres coordenadas cartesianas y la coordenada temporal asociadas a un marco de referencia $\mathfrak{R}$. Sean x', y', z' y t' las coordenadas homólogas asociadas a otro marco de referencia $\mathfrak{R}'$ que se mueve con respecto a $\mathfrak{R}$ con velocidad constante v. Si se usan las mismas unidades —digamos, el metro y el segundo— para determinar las distancias e intervalos de tiempo representados por ambos sistemas de coordenadas, y el origen de ambos sistemas coincide (esto es, si las coordenadas x, y, z, $t = 0$ y x', y', z', $t' = 0$ corresponden a uno y el mismo evento), la transformación de coordenadas que expresa x', y', z' y t' en función de x, y, z y t es una *transformación de Lorentz*. Como el producto de dos transformaciones de Lorentz también es una transformación de Lorentz, estas transformaciones forman un GRUPO, el llamado *grupo de Lorentz*. Si L es una transformación de Lorentz y T es una traslación (esto es, una transformación de la forma $\langle t,x,y,z\rangle \mapsto \langle t+u,x+p,y+q,z+r\rangle$, donde u, p, q, $r \in \mathbb{R}$ son constantes), las transformaciones $T \circ L$ y $L \circ T$ son *transformaciones de Poincaré*. También estas, obviamente, forman un grupo: el *grupo de Poincaré* ("grupo inhomogéneo de Lorentz" en la literatura más antigua).

Presentamos la transformación de Lorentz más simple e importante, que corresponde al caso en que la dirección positiva de los ejes de las coordenadas x, y, z apunta en el instante $t = t' = 0$ en la dirección positiva de los ejes de las coordenadas x', y', z', respectivamente, y $\mathfrak{R}'$ se mueve con velocidad v en la dirección positiva del eje de las x:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-(vx/c^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned} \qquad \text{(TL)}$$

(c es la velocidad de la luz en el vacío, expresada en las unidades que se usen para definir las coordenadas).

transformación de Poincaré (A. *Poincaré-transformation*, F. *transformation de Poincaré*, I. *Poincaré transformation*). ↗TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ.

trascendental (A. *transzendental*, F. *transcendantale*, I. *transcendental*). Adjetivo con que los escolásticos califican ciertos conceptos —como *ente*, *uno*, *bueno*, *verdadero*— que trascienden los límites de las CATEGORÍAS (aristotélicas), pues tienen aplicación a todas ellas. Tales conceptos "comunísimos", transcategoriales, vienen a ser el objeto propio de la "ciencia universal" o metafísica, "*quasi transcendens scientia, quia est de transcendentibus*" (Escoto). Con este bagaje semántico llega la palabra a Christian Wolff, quien la utiliza sin más como sinónimo a la vez de 'metafísico' y de 'general'. De Wolff y sus sucesores la toma Kant, a quien se debe el vuelco de que depende su uso filosófico moderno. En los escritos tempranos de Kant (donde se usa muy poco), en sus anotaciones a los tratados que utilizaba en la docencia y aquí y allá en sus escritos críticos, la palabra *trascendental* conserva aún el significado laxo e insípido que tenía en Wolff. Pero en varios pasajes decisivos Kant la redefine: "Llamo trascendental a todo conocimiento que no se ocupa en general con objetos, sino con nuestro modo de conocerlos, en cuanto este ha de ser posible a priori" (1787, p. 25). "No todo conocimiento a priori debe llamarse trascendental, sino solo aquel mediante el cual conocemos que y cómo ciertas representaciones (intuiciones o conceptos) son aplicadas o son posibles puramente a priori (esto es, la posibilidad del conocimiento o su empleo a priori)" (1781, p. 56). De aquí procede el común empleo de *trascendental* para referirse a cualquier reflexión sobre las condiciones de la objetividad del conocimiento, aunque su enfoque y resultados se alejen de Kant; y también a lo concerniente a las relaciones entre una aseveración expresa y sus ineludibles supuestos tácitos, aun aparte de toda consideración de objetividad.

traslación (A. *Translation*, *Parallelverschiebung*, F. *translation*, I. *translation*). El CUERPO RÍGIDO K se *traslada* en una dirección dada si todos los puntos de K se desplazan a la misma velocidad en esa dirección. La *traslación* de K en el instante t queda completamente caracterizada por la *velocidad* $\mathbf{v}(t)$ que todos sus puntos comparten en ese momento; el vector $\mathbf{v}(t)$ apunta en la dirección de la traslación. El movimiento de un cuerpo rígido puede representarse en cada momento (de distintas maneras) como resultante de *una* traslación y *una* ROTACIÓN.

En geometría euclídea, una *traslación* del espacio es una isometría f del espacio que no tiene puntos fijos, de modo que $f(P) \neq P$ para todo punto P. Convencionalmente, la identidad del espacio se cuenta entre las traslaciones; visto así, el conjunto de las traslaciones es un GRUPO —con la identidad como elemento neutro y la composición de traslaciones como opera-

ción de grupo— que actúa transitiva y efectivamente sobre el espacio (↗ACCIÓN DE UN GRUPO).

traza (A. *Spur*, F. *trace*, I. *trace*). Sea G una MATRIZ cuadrada sobre un anillo conmutativo $\mathbb{A}$. Sea g_{ij} el elemento (i,j)-ésimo de G. La *traza* $\mathrm{Tr}(G)$ de G es la suma de los elementos diagonales g_{ii}. Si G y H son dos matrices cuadradas, con el mismo número de elementos, sobre el anillo $\mathbb{A}$, $\mathrm{Tr}(G + H) = \mathrm{Tr}(G) + \mathrm{Tr}(H)$ y $\mathrm{Tr}(GH) = \mathrm{Tr}(HG)$. Con vistas al empleo de matrices en la MECÁNICA CUÁNTICA, es útil señalar que, si G es un OPERADOR LINEAL sobre un ESPACIO VECTORIAL $\mathcal{H}$ y G_1 y G_2 son matrices representativas de G relativamente a dos bases ortonormales de $\mathcal{H}$, $\mathrm{Tr}(G_1) = \mathrm{Tr}(G_2)$: la traza es invariante respecto a cambios de base.

U

ultrafiltro (A. *Ultrafilter*, F. *ultrafiltre*, I. *ultrafilter*). Un *ultrafiltro* en un ÁLGEBRA DE BOOLE $\mathcal{B}$ es un FILTRO F en $\mathcal{B}$ que no es parte de otro filtro diferente. Si F es un filtro en $\mathcal{B}$, F es un ultrafiltro si y solo si, para todo x en $\mathcal{B}$, o bien x o bien su complemento $\complement x$ pertenece a F (pero no ambos). Todo filtro en un álgebra de Boole es parte (propia o impropia) de un ultrafiltro.

unidad de la ciencia (A. *Einheit der Wissenschaft*, F. *unité de la science*, I. *unity of science*). Consigna promovida en la década de los treinta por Otto Neurath y asociada generalmente al POSITIVISMO LÓGICO, aunque tuvo importantes adeptos también fuera de este movimiento. Sus diferentes partidarios la entendieron de diversos modos. Para Dewey (1938) se trata propiamente de la unidad de la *actitud científica*, caracterizada negativamente como libertad frente a "la rutina, el prejuicio, el dogma, la tradición irreflexiva, el mero interés egoísta", positivamente como "la voluntad de inquirir, examinar, distinguir [...] la intención de formar opiniones, y poner a prueba las que ya se tienen, sobre la base de hechos observados, aunque reconociendo también que los hechos carecen de significado excepto en cuanto apuntan hacia ideas". Más común ha sido entender la *unidad de la ciencia* como un programa de homogenización lógico-lingüística de todas las aseveraciones científicas, con miras a reducir en último término todos los conceptos científicos a conceptos de la física, derivar todas las leyes científicas de las leyes físicas y asegurar la fundamentación de todo el saber humano en bases empíricas estables. Esta interpretación, sugerida por Carnap (1938), ciertamente no era la de Neurath, antifundacionista por excelencia y sin interés alguno en el reduccionismo. Socialista militante, no pretendía lograr una visión pasiva unitaria del mundo, sino organizar un equipo estandarizado de herramientas para transformarlo.

unión (A. *Vereinigungsmenge*, F. *union*, I. *union*). La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los objetos que son elementos de A o de B. Simbólicamente: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$. Si $F = (A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ es una FAMI-

LIA de conjuntos, entonces la *gran unión* de F es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a algún elemento de F; simbólicamente,

$$\bigcup F = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x : \exists i \in \mathcal{I}(x \in A_i)\}$$

Cuando se habla de la gran unión de una familia de conjuntos suele omitirse el adjetivo 'gran'.

universales (A. *Universalien*, F. *universaux*, I. *universals*). Solo se ven y se tocan las cosas concretas, singulares, espaciotemporalmente situadas: este automóvil, este vaso, esta página. Sin embargo, las cosas singulares tienen propiedades generales. El automóvil que está delante es un Ford Mondeo. Ford Mondeo es un cierto modelo de automóvil, un cierto tipo de coche, un universal automovilístico. Este vaso está lleno de agua, es decir, de moléculas de H_2O. El agua es un tipo de sustancia que se encuentra en muchos vasos, botellas, tuberías, ríos, lagos, mares y nubes, es un universal químico. La página está impresa con manchas de tinta de formas características, por ejemplo de 'a' o de 'b'. Cada mancha concreta y singular es vista y leída por nosotros como una letra a o una letra **b**, que son universales tipográficos. Este libro está lleno de manchas de tinta en forma de 'a'. Cada una de ellas es un caso (*token*) del tipo (*type*) que es la letra a. Parece obvio que las cosas singulares poseen características generales que comparten con otras cosas del mismo tipo. El mundo real está lleno de repeticiones de los mismos tipos y recurrencias de las mismas pautas: todos los átomos de carbono tienen seis protones en su núcleo, todos los insectos poseen seis patas, a la sístole del corazón sigue la diástole, al día la noche. Por ello en el vocabulario que uno usa cada día hay muchas más palabras que expresan propiedades generales que nombres propios.

Platón postuló la existencia de formas puras, correspondientes a las palabras generales del lenguaje, sobre todo a las empleadas en la ética, la estética y la matemática. Estas formas estarían en un mundo inteligible (κόσμος νοητός) propio, eterno e inmutable, separadas de las cosas materiales que informan. Las cosas sensibles que observamos son calificadas de buenas, bellas o circulares en la medida en que participen de la forma del bien, la belleza o el círculo. Esta participación siempre es imperfecta, aproximada y cambiante. Solo en las formas puras del mundo inteligible existe la perfección y la estabilidad. Solo la forma de belleza es absolutamente bella, solo la forma inteligible de círculo es perfectamente circular. Esta doctrina (que ha pasado a la historia con el nombre de platonismo o *realismo extremo*) tropieza con muchas dificultades, algunas de las cuales las expone el mismo Platón en sus diálogos.

Aristóteles aceptó que las cosas del mismo tipo comparten una forma común, pero rechazó que esta forma estuviera separada de las cosas que informa, como pretendía Platón. Según Aristóteles, las formas solo existen en las cosas concretas. Solo las cosas concretas, como un caballo particular, son entidades o sustancias en sentido primario (πρῶται οὐσίαι), mientras que las propiedades generales solo son entidades en un sentido secundario (δεύτεραι οὐσίαι). Sin embargo, son las formas generales, como, por ejemplo, la forma de caballo, las que determinan lo que son las cosas concretas, su esencia. El conocimiento de las formas generales lo obtenemos por abstracción de nuestras experiencias y recuerdos particulares de las cosas concretas que incorporan dichas formas. La doctrina de Aristóteles se conoce como el *realismo moderado*.

San Agustín aceptó la doctrina platónica, pero catapultando las formas del mundo inteligible a la mente divina, provocando así una amalgama de filosofía y teología que perduraría durante toda la Edad Media. Las formas puras separadas son las ideas que desde siempre están en la mente de Dios. Fueron los filósofos medievales quienes acuñaron el uso de 'universales' (*universalia*) para hablar de las características generales de las cosas. Distinguieron los *universalia ante rem* (las ideas en la mente divina), los *universalia in re* (las formas aristotélicas de las cosas) y los *universalia post rem* (los conceptos que formamos en nuestra mente al conocer esas formas). La mayor parte de los filósofos medievales fueron realistas (en este curioso sentido de REALISMO que consiste en admitir la realidad de los universales), bien de la variedad platónica o extrema, como Anselmo de Cantorbery, bien de la variedad aristotélica o moderada, como Tomás de Aquino. Sin embargo, en el siglo XI, y motivado en parte por la defensa de la omnipotencia divina, que no podía estar limitada por formas o ideas generales, Roscelin de Compiègne formuló la posición conocida como el *nominalismo*: los universales no son formas con entidad propia, sino meras palabras (*nomina*), soplos de voz (*flatus vocis*); sólo existen realmente las cosas concretas y sus propiedades singulares. En el siglo XIV la doctrina nominalista fue desarrollada con vigor por Ockam, según el cual las palabras generales se ponen en el discurso por (o en vez de) las cosas concretas, por lo que es innecesario postular universales.

El *conceptualismo* niega la realidad de los universales fuera de la mente, pero admite que dentro de la mente se forman conceptos universales. Los conceptualistas, entre los que se cuentan filósofos como Locke, Berkeley y Hume, aceptan que solo existen las cosas singulares concretas, pero se dan cuenta de que la generalidad es inherente al pensamiento y al lenguaje, por lo que tratan de explicar cómo los conceptos generales se forman a partir de las experiencias singulares. Estas experiencias dan lugar a imágenes o "ideas" mentales particulares. Las ideas o conceptos generales son ciertas ideas particulares, considera-

das de un modo especial, en su relación no solo con las cosas o experiencias que las produjeron en primer lugar, sino también con las otras cosas singulares que se parecen a aquellas. Sin embargo, otros filósofos modernos, como Hobbes, prefirieron el nominalismo, al considerar que los conceptos mentales son superfluos, pues basta la referencia directa de las palabras a las cosas.

Conceptualistas y nominalistas suelen dar cuenta de la generalidad del lenguaje aduciendo la semejanza entre una cosa singular y otras cosas singulares del mismo tipo. Por eso Russell pensó que los universales cualitativos (blancura, triángulo) son prescindibles, si disponemos de una relación de semejanza. Señalamos una cosa blanca o triangular y caracterizamos la blancura o la triangularidad como la semejanza (en el respecto relevante) con esa cosa. Sin embargo, la noción misma de semejanza sería un universal irreducible e imprescindible. Y, puestos ya a admitir algún universal, ¿por qué no admitirlos todos y no complicarnos la vida con teorías rebuscadas? Posteriormente, Nelson Goodman ha defendido una versión del nominalismo que exige que todas las entidades sean individuos, aunque admite las entidades abstractas, mientras estas sean consideradas como individuos, no como clases. En especial, dos conjuntos que puedan analizarse en los mismos componentes individuales últimos deben ser considerados, según Goodman, como el mismo conjunto, lo que daría lugar, por ejemplo, a $\{\{1\}\} = \{1\} = 1$, lo que es incompatible con la teoría de conjuntos habitual.

Aunque Quine siempre ha manifestado su simpatía por el nominalismo, también ha reconocido que las entidades abstractas son imprescindibles en la ciencia. Es imposible hacer física sin matemáticas, y es imposible hacer matemáticas sin números y conjuntos. Hartry Field, en su libro significativamente titulado *Ciencia sin números: una defensa del nominalismo* (1980), ha defendido la tesis contraria, pero solo a costa de admitir como individuos singulares concretos la totalidad de los puntos del espacio continuo. En cualquier caso, el mundo en que vivimos está impregnado de recurrencias y regularidades, cuya caracterización más clara y económica pasa por la modelización matemática, que a su vez implica la aceptación de las entidades abstractas. De todos modos, las entidades abstractas, como los números, los conjuntos o los espacios, no existen en el sentido espaciotemporal habitual de 'existencia'. Las palabras con frecuencia tienen significados distintos en contextos diferentes, y la palabra 'existencia' no es una excepción. Es imposible practicar la ciencia teórica tal y como la conocemos desde Galileo sin aceptar, usar y cuantificar entidades matemáticas. Pero es posible considerar esas entidades como meros constructos nuestros y calificar su existencia de ficticia (en contraste con la existencia espaciotemporal). La ficción exacta y consistente, una vez establecida, crea su propia objetividad independiente y ata las manos del matemático, obligado a seguir el hilo de sus consecuencias. La lógica es el

arte de la consistencia, no de la verdad, y es tan aplicable a la ficción como a la realidad. De hecho, la matemática entera es invariante respecto a interpretaciones ontológicas alternativas, o al menos eso piensan la gran mayoría de los matemáticos, aunque no los partidarios del INTUICIONISMO.

universo conjuntista (A. *Mengenuniversum*, F. *univers des ensembles*, I. *universe of sets, set-theoretical universe*). El universo conjuntista es la clase de todos los conjuntos, que encierra en su seno todos los conjuntos imaginables e inimaginables pero posibles, todas las entidades, funciones, espacios, sistemas y estructuras matemáticas. En la teoría de conjuntos actual suele aceptarse el AXIOMA DE REGULARIDAD, lo que permite visualizar el universo conjuntista como un cono invertido, cuyo vértice es el conjunto vacío y cuyo eje está constituido por la serie de los ordinales. El cono va creciendo y ensanchándose hacia arriba mediante iteraciones sucesivas de las operaciones de conjunto potencia y gran unión, indexadas por los ordinales. A cada ordinal α corresponde una nueva rodaja de conjuntos, los conjuntos de RANGO α. La unión de todas estas rodajas forma la JERARQUÍA ACUMULATIVA, identificada con el universo conjuntista.

Respecto al cono invertido del universo conjuntista podemos preguntarnos (1) cómo es de ancho y (2) cómo es de alto. Diversos axiomas e hipótesis determinan la anchura y la altura del cono. El AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD ($V = L$) y la HIPÓTESIS DEL CONTINUO ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) se refieren a la anchura del cono. Si aceptamos la hipótesis del continuo, el cono se estrecha. Si aceptamos el axioma de constructibilidad, se estrecha todavía más. Si rechazamos el axioma de constructibilidad, el cono se ensancha; si rechazamos la hipótesis del continuo, el cono se ensancha aún más. Podría haber solo ordinales finitos, en cuyo caso el cono tendría poca altura. El AXIOMA DE INFINITUD lo hace más alto. Además, una vez que tenemos ω, la serie de los ordinales transfinitos crece ilimitadamente. ω, $\omega+1$,..., $\omega+\omega$,... tienen la cardinalidad infinita mínima, $\aleph_0$. Pero $\wp\omega$ tiene ya cardinalidad $\aleph_1$ o superior. Los axiomas habituales de la teoría de conjuntos no determinan hasta dónde y hasta qué cardinalidades lleguen los ordinales y, con ellos, el universo conjuntista. No determinan si existen los cardinales monstruosamente grandes que podemos definir. Para ello hacen falta axiomas específicos que postulen su existencia. Los axiomas de CARDINALES GRANDES se refieren a la altura del cono. La existencia de cardinales inaccesibles, de cardinales de Mahlo, de cardinales débilmente compactos, de cardinales medibles, de cardinales de Woodin o de cardinales supercompactos dispara la altura del cono a extremos de vértigo.

uso y mención (A. *Anführung und Gebrauch*, F. *usage et mention*, I. *use and mention*). Cuando hablamos, mencionamos las cosas de las que hablamos y

usamos las palabras que empleamos para hablar de esas cosas. La confusión de una cosa con su nombre o de un signo con su objeto es un caso de confusión entre uso y mención. Por ejemplo, usamos los NUMERALES para mencionar los números. Si alguien confunde un número con el numeral que lo designa, está incurriendo en una confusión entre uso y mención. Cuando hablamos de viajes y mencionamos las ciudades que hemos visitado o las montañas a las que hemos ascendido, usamos los nombres de las ciudades y de las montañas, pero no usamos las ciudades o montañas mismas en el propio discurso. Una ciudad o una montaña son tan diferentes de un nombre o una palabra que es difícil confundirlas. Nadie confunde la ciudad de Bogotá con su nombre 'Bogotá'. Sin embargo, cuando hablamos sobre el habla o cuando discutimos sobre cuestiones semióticas, tenemos que estar alerta para no confundir el uso y la mención de las palabras.

En el lenguaje escrito, los autores cuidadosos marcan gráficamente la diferencia entre uso y mención mediante la convención de escribir entre comillas las palabras mencionadas. Chile es más largo que Venezuela, pero 'Chile' es más corto que 'Venezuela'. 2 + 2 = 4, pero '2 + 2' ≠ '4'. Entrecomillar una expresión es escribirla entre comillas. La expresión entrecomillada (incluyendo las comillas) es un nombre que usamos para referirnos a la expresión sin comillas, que resulta mencionada. Mencionar algo es usar su nombre. Para mencionar un nombre mismo, se usa un nombre de ese nombre, por ejemplo el nombre entrecomillado. Si queremos mencionar este nuevo nombre, tenemos que volver a entrecomillar la expresión ya previamente entrecomillada, y así sucesivamente. Algunos autores usan convenciones alternativas a la de las comillas para marcar la diferencia, escribiendo, por ejemplo, en tipo de letra cursiva la expresión mencionada.

Diversos tabúes y prácticas mágicas primitivas se basan en la confusión entre uso y mención. Los griegos clásicos ya eran conscientes de las trampas que nos tiende el lenguaje ordinario cuando lo empleamos para hablar sobre sus propias expresiones, como se manifiesta, por ejemplo, en la PARADOJA DEL MENTIROSO. En la Edad Media todavía no se había introducido la convención de entrecomillar los nombres mencionados, pero algunos lógicos medievales trataron de evitar la confusión mediante su teoría de la *suppositio terminorum*, que distinguía entre la suposición formal (*suppositio formalis*) y la suposición material (*suppositio materialis*), correspondientes al uso y a la mención de los términos, respectivamente. Por ejemplo, cuando decían que Sócrates corre (*Socrates currit*), el nombre 'Sócrates' está en suposición formal, pues supone o se pone por (es decir, se refiere a) una entidad extralingüística, el hombre Sócrates. Pero cuando decían que *Socrates est trisyllabus*, el nombre 'Sócrates' está en suposición material, es decir, supone por (o se refiere a) sí mismo como entidad lingüística. En el siglo XX Quine ha acuñado la termi-

nología de uso y mención y ha sido el filósofo que más consecuentemente ha insistido en su distinción. Relacionada con ella está la distinción entre lenguaje y METALENGUAJE, introducida por Hilbert y usada por Tarski para desarrollar una teoría consistente de la verdad en los lenguajes formales.

V

vacío (A. *Vakuum*, F. *vide*, I. *vacuum*). Según los antiguos atomistas, como Demócrito, la realidad consta de átomos y vacío y nada más. El vacío es el espacio carente de átomos. Cualquier porción de espacio sin átomos es un vacío. Este tipo de vacío fue experimentalmente aproximado en el siglo XVII por Torricelli y Guericke, que lograron sacar el aire del interior de un recipiente. Hoy pensamos que, aunque logremos vaciar un trozo de espacio de aire y, en general, de átomos, sin embargo, nunca estará vacío del todo, pues estará lleno de campos, que lo ocuparán totalmente.

Según la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS, el espaciotiempo está ocupado por una gran variedad de campos, como el campo electromagnético (cuyas excitaciones son los fotones). A cada partícula elemental (por ejemplo, el electrón) corresponde un campo (en este caso, el campo electrónico) y a cada campo corresponde una partícula, que es la excitación cuantizada de ese campo. Cada campo puede estar más o menos excitado, puede tener niveles diversos de energía. El estado de mínima energía se llama estado fundamental del campo. Este estado (por el PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE) no puede ser cero, sino que presenta continuas fluctuaciones que se manifiestan en la continua creación y subsiguiente aniquilación de pares de partículas y antipartículas. Si todos los campos que ocupan una porción del espacio están a su nivel mínimo de energía, entonces podemos identificar ese espacio con el vacío. El vacío, tal y como lo concibe la teoría cuántica de campos, lejos de ser una nada tranquila, es un hervidero de actividad caótica, de cambiantes fluctuaciones alrededor del nivel mínimo de energía de los distintos campos que lo ocupan, de continua creación y destrucción de todo tipo de partículas y antipartículas (llamadas *virtuales* por su efímera duración). Este vacío tiene densidad de energía y, por tanto, ejerce un efecto gravitatorio, contribuyendo a la curvatura del espaciotiempo. Algunos han pretendido identificar la ENERGÍA DEL VACÍO con la CONSTANTE COSMOLÓGICA introducida por Einstein. Aunque el cálculo de la energía del vacío presenta dificultades matemáticas (infinitos), estas pueden superarse mediante procesos de renormalización. Más graves son las discrepancias (de 120 órdenes de magnitud) entre las estima-

ciones teóricas y las cotas superiores impuestas por la astronomía observacional. De todos modos, la energía del vacío parece tener alguna realidad física, pues se manifiesta en el efecto Casimir, en que genera una fuerza atractiva entre dos planchas metálicas paralelas suficientemente próximas.

validez lógica (A. *Allgemeingültigkeit*, F. *validité*, I. *logical validity*). Una fórmula es lógicamente válida si es satisfecha por todas sus interpretaciones. La interpretemos como la interpretemos, siempre resulta verdadera. Por eso las sentencias lógicamente válidas se llaman también verdades lógicas. Sea α una fórmula de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ y refirámonos con $\mathfrak{I}$ indistintamente a las interpretaciones de $\mathcal{L}$. α es *lógicamente válida* si y solo si para cada interpretación $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}$ satisface α.

La validez lógica puede definirse en función de la consecuencia. Todas las interpretaciones satisfacen (vacuamente) el conjunto vacío de fórmulas $\varnothing$. Por tanto, las consecuencias de $\varnothing$ serán las fórmulas satisfechas por todas las interpretaciones, es decir, las fórmulas lógicamente válidas. α es lógicamente válida si y solo si α es una consecuencia de $\varnothing$. Por ello suele usarse el signo $\vDash$ de consecuencia, sin nada a su izquierda, para indicar la validez lógica: $\vDash\alpha$ si y solo si $\varnothing \vDash \alpha$.

La validez lógica puede definirse también en función de la satisfacibilidad. α es lógicamente válida si y solo si $\neg\alpha$ es insatisfacible.

Una fórmula válida de la lógica proposicional se llama también una tautología. La validez lógica proposicional es decidible (por ejemplo, mediante las tablas de verdad). La validez lógica de primer orden es indecidible. De todos modos, es posible generar o enumerar mediante un cálculo deductivo semánticamente completo todas las fórmulas lógicamente válidas de primer orden. La validez lógica de segundo orden no es una noción operativa: no solo es indecidible, sino que ni siquiera pueden deducirse mediante un cálculo todas las fórmulas válidas de segundo orden.

variable (A. *Variable*, F. *variable*, I. *variable*). Signo que sirve para referirse indistintamente a objetos cualesquiera de un cierto dominio (su dominio de variabilidad). Las variables de la lógica de primer orden varían sobre individuos cualesquiera del universo de la estructura sobre la que se interpreta el lenguaje formal. Por eso se llaman variables individuales. En un lenguaje formal de primer orden hay un conjunto infinito numerable de variables individuales, que normalmente se representan mediante las últimas letras minúsculas del alfabeto latino: u, v, w, x, y, z, provistas a veces de subíndices, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots$

Ciertos signos lógicos (como los cuantificadores) y matemáticos (como el signo de sumación, el de límite o el de integral —respecto al dx final) son

operadores que ligan la variable que les sigue. Una variable así ligada tiene un comportamiento semántico distinto al de una variable libre (es decir, no ligada). La variable libre es interpretada como refiriéndose a un objeto determinado en una interpretación dada; la ligada, no. Limitémonos aquí a considerar el caso de la ligadura de variables por cuantificadores en el lenguaje formal de la lógica de primer orden.

Sea *var*(τ) el conjunto de todas las variables que aparecen en el término τ. Dada una fórmula cualquiera α, definimos recursivamente el conjunto *libre*(α) de sus variables libres: (1) *libre*(τ = σ) = *var*(σ) ∪ *var*(τ); (2) *libre*($P\tau_1 \ldots \tau_n$) = *var*(τ_1) ∪...∪ *var*(τ_n); (3) *libre*(¬α) = *libre*(α); (4) *libre*(α ‡ β) = *libre*(α) ∪ *libre*(β), donde ‡ representa a cualquiera de los conectores ∧, ∨, ⇒, ⇔; (5) *libre*(*Qx*α) = *libre*(α)−{*x*}, donde *Q* representa a los cuantificadores ∀, ∃. Una variable *x* está ***libre*** en una fórmula α si y solo si *x* ∈ *libre*(α). Dada una fórmula cualquiera α, definimos recursivamente el conjunto *ligada*(α) de sus variables ligadas: (1) *ligada*(τ = σ) = ∅; (2) *ligada*($P\tau_1 \ldots \tau_n$) = ∅; (3) *ligada* (¬α) = *ligada*(α); (4) *ligada* (α ‡ β) = *ligada*(α)∪*ligada*(β), donde ‡ representa a cualquiera de los conectores ∧, ∨, ⇒, ⇔; (5) *ligada*(*Qx*α) = *ligada*(α) ∪ {*x*}, donde *Q* representa a los cuantificadores ∀, ∃. Una variable *x* está ***ligada*** en una fórmula α si y solo si *x* ∈ *ligada*(α). Obsérvese que la misma variable puede estar libre y ligada en la misma fórmula. Por ejemplo, en la fórmula *Rxw* ⇒ ∀*x*∃*zRzx*, la variable *x* está libre en su primera aparición y ligada en su última aparición; *w* solo está libre y *z* solo está ligada. Una variable ligada está dentro del alcance del cuantificador que la liga. Así, en la fórmula del ejemplo anterior, el alcance del cuantificador ∀ llega desde donde está situado hasta el final de la fórmula; por ello, la primera aparición de la variable *x* queda fuera de su alcance y está libre, mientras que la última aparición de *x* queda dentro de su alcance y está ligada. Una fórmula con variables libres es una fórmula abierta. Una fórmula sin variables libres es una fórmula cerrada o sentencia.

En el lenguaje formal de la lógica de segundo orden hay también variables de segundo orden, normalmente representadas por letras latinas mayúsculas *W*, *X*, *Y*, *Z*. Estas variables no varían sobre el universo *A* de la interpretación, sino sobre su conjunto potencia ℘*A*; no se refieren a individuos, sino a subconjuntos del universo. La aparición libre y ligada de una variable de segundo orden en una fórmula se define, *mutatis mutandis*, de un modo similar al ya indicado.

variable aleatoria (A. *Zufallsgröße, zufällige Veränderliche*, F. *variable aléatoire*, I. *random variable*). Sea ⟨Ω,𝔅,**p**⟩ un espacio aleatorio (↗CÁLCULO DE PROBABILIDADES). Llámase *variable aleatoria* a cualquier función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x : x \in \Omega \text{ y } f(x) < r\} \in \mathfrak{B}$. Si $f_1, \ldots, f_n$

son variables aleatorias, la función $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ definida por $x \mapsto \langle f_1(x),\ldots,f_n(x)\rangle$ es una variable aleatoria n-dimensional.

variedad diferenciable (A. *differenzierbare Mannigfaltigkeit*, F. *variété différentiable*, I. *differentiable manifold. smooth manifold*). Una *variedad diferenciable* real n-dimensional es una VARIEDAD TOPOLÓGICA n-dimensional S provista de un atlas real $\mathcal{A}$ con la propiedad siguiente: todas las transformaciones de coordenadas entre CARTAS de $\mathcal{A}$ son FUNCIONES LISAS dondequiera estén definidas. Esta exigencia tiene sentido, pues dichas transformaciones, por definición, aplican biyectivamente un abierto de $\mathbb{R}^n$ sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$.

El concepto de variedad diferenciable puede definirse también directamente, sin presuponer el de variedad topológica. Sea S un conjunto cualquiera. Llamemos *carta* (real, n-dimensional) de S a una función biyectiva que aplica un subconjunto de S sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un *atlas diferenciable* (real, n-dimensional) de S es una colección $\mathcal{A}$ de cartas (reales, n-dimensionales) de S que cumple los dos requisitos siguientes: (i) cada punto de S está contenido en el dominio de por lo menos una carta de $\mathcal{A}$; (ii) si f y g son cartas de $\mathcal{A}$, las FUNCIONES COMPUESTAS $f \circ g^{-1}$ y $g \circ f^{-1}$ son lisas dondequiera estén definidas. El conjunto S, provisto del atlas $\mathcal{A}$, es una *variedad diferenciable* (real) n-dimensional. Una carta g (real, n-dimensional) de S se dice *compatible* con el atlas $\mathcal{A}$ si, para cada $f \in \mathcal{A}$, las funciones compuestas $f \circ g^{-1}$ y $g \circ f^{-1}$ son lisas dondequiera estén definidas. Si g y h son cartas de S compatibles con $\mathcal{A}$, la funciones compuestas $h \circ g^{-1}$ y $g \circ h^{-1}$ son lisas dondequiera estén definidas. (En efecto, si $\mathrm{x} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n$ está contenido en el dominio de $h \circ g^{-1}$ y $g^{-1}(\mathrm{x}) = p$, hay una carta f de $\mathcal{A}$ que está definida en p; entonces $f \circ g^{-1}$ existe y es lisa en x y $h \circ f^{-1}$ existe y es lisa en $f(p)$, de modo que $h \circ g^{-1} = h \circ f^{-1} \circ f \circ g^{-1}$ es lisa en x.) Por lo tanto, el conjunto de todas las cartas de S compatibles con $\mathcal{A}$ es un atlas (real, n-dimensional) de S, que llamamos el *atlas máximo* $\mathcal{A}_{max}$ generado por $\mathcal{A}$. Normalmente, cuando se dice que una función f es una carta de una variedad diferenciable $\langle S,\mathcal{A}\rangle$, se entiende que f pertenece al atlas máximo generado por $\mathcal{A}$. La TOPOLOGÍA estándar $T_{\mathcal{A}}$ de la variedad diferenciable $\langle S,\mathcal{A}\rangle$ es, por definición, la topología más débil que asegura que cada carta de $\mathcal{A}_{max}$ es una función continua. No es difícil probar que $\langle S,T_{\mathcal{A}}\rangle$ es una variedad topológica n-dimensional.

Sea $U \subseteq S$ un abierto de $\langle S,T_{\mathcal{A}}\rangle$. Llamamos $\mathcal{A}_{max}|_U$ al conjunto que contiene la restricción a U de cada carta contenida en $\mathcal{A}_{max}$. $\mathcal{A}_{max}|_U$ es obviamente un atlas de U y la estructura $\langle U,\mathcal{A}_{max}|_U\rangle$ es una variedad diferenciable real n-dimensional. Con esa estructura, U es una *subvariedad abierta* de S.

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables reales de m y n dimensiones respectivamente. Sea q un entero positivo. Una función $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es *lisa en un*

punto $p \in \mathcal{M}$ si hay cartas h y g definidas respectivamente en p y $f(p)$, tales que la función compuesta $g \circ f \circ h^{-1}$ es lisa en $h(p)$. Esta propiedad no depende de la elección de h y g. Se dice que f es *lisa* si es lisa en cada $p \in \mathcal{M}$. Si f es un HOMEOMORFISMO liso cuyo homeomorfismo inverso f^{-1} también es liso, f es un DIFEOMORFISMO. Las variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son *difeomorfas* si hay un difeomorfismo $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Esto puede ocurrir solo si $m = n$.

Los conceptos de *variedad diferenciable* y *función lisa de una variedad diferenciable a otra*, cuya definición hace referencia a funciones lisas con argumentos en $\mathbb{R}^n$ y valores en $\mathbb{R}^m$ (donde m puede ser igual a n), se califican con el epíteto 'de clase $\mathscr{C}^q$' si dicha referencia está confinada a funciones diferenciables de clase $\mathscr{C}^q$. Otro tanto puede decirse de cualquier otro concepto cuya definición aluda a funciones lisas; pero en este diccionario, para facilitar la lectura, omitimos tales calificativos y usamos FUNCIÓN LISA como sinónimo de 'función de clase $\mathscr{C}^\infty$'.

Con los ajustes apropiados, las explicaciones anteriores pueden aplicarse a una *variedad diferenciable n-dimensional compleja*, caracterizada porque sus cartas toman valores en $\mathbb{C}^n$ (en lugar de $\mathbb{R}^n$). Los conceptos de variedad diferenciable real y compleja se han extendido también a espacios topológicos de infinitas dimensiones.

variedad riemanniana (A. *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, F. *variété de Riemann*, I. *Riemannian manifold*). Si $\mathcal{M}$ es una VARIEDAD DIFENCIABLE real y g es una MÉTRICA RIEMANNIANA sobre $\mathcal{M}$, la estructura $\langle\mathcal{M},g\rangle$ es una *variedad riemanniana*. Si g es una MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA, pero no es positivo-definida (de modo que $g(V,V) \leq 0$ para un campo vectorial $V \neq 0$ definido en un abierto de $\mathcal{M}$), dícese que $\langle\mathcal{M},g\rangle$ es una *variedad semi-riemanniana*.

variedad topológica (A. *topologische Mannigfaltigkeit*, F. *variété topologique*, I. *topological manifold*). Sea S un espacio topológico. S es una *variedad topológica n-dimensional* si y solo si cada punto de S tiene un entorno homeomorfo con $\mathbb{R}^n$ (↗TOPOLOGÍA, TOPOLOGÍA ESTÁNDAR EN $\mathbb{R}^n$, HOMEOMORFISMO).

vatio (A. *Watt*, F. *watt*, I. *watt*). ↗WATT.

vector (A. *Vektor*, F. *vecteur*, I. *vector*). ↗ESPACIO VECTORIAL; CAMPO B.2.

velocidad (A. *Geschwindigkeit*, F. *vélocité*, I. *velocity*). El sentido común precientífico define la *velocidad* como "espacio recorrido en la unidad de tiempo". La cantidad así definida es ambigua. Por ejemplo, sea D la distancia (en metros) que recorrió la Tierra sobre su órbita elíptica en los 366 días del año

2000. Según la definición citada, en 2000 la Tierra se habría trasladado alrededor del Sol con una velocidad de $\frac{D}{366}$ metros diarios, o $\frac{D}{31\,622\,400}$ metros por segundo; por otra parte, sabemos que el día 21 de junio la Tierra recorrió más de $\frac{D}{366}$ metros y el día 21 de diciembre la Tierra recorrió menos de $\frac{D}{366}$ metros. Se dirá que la ambigüedad se debe a que la velocidad de la Tierra en su órbita no es constante, puesto que aumenta cuando se acerca al Sol y disminuye cuando se aleja de él. Obviamente la definición citada se aplica solo a la *velocidad uniforme*; ella se refiere a la *velocidad media* de un móvil *durante un lapso de tiempo determinado*. La física matemática necesita, sin embargo, un concepto de velocidad instantánea, que caracterice sin ambigüedades el movimiento del móvil en un instante dado, independientemente de que ese movimiento varíe o persista sin modificaciones.

La definición física de *velocidad* presupone que la posición del móvil es una función diferenciable del tiempo. La *velocidad* es la primera derivada de esta función. Específicamente, la velocidad $\mathrm{v}(t)$ de una partícula en el momento t, cuando su posición está representada por el vector $\mathrm{r}(t)$, se define así:

$$\mathrm{v}(t) = \dot{\mathrm{r}}(t) = \frac{d\mathrm{r}(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{r}(t+h) - \mathrm{r}(t)}{h}$$

donde el punto sobre el nombre de la función indica diferenciación con respecto al tiempo (simbolismo de Newton). Obsérvese que, según esta definición, la velocidad de la partícula es un VECTOR cuya dirección es justamente aquella en que la partícula se está moviendo, y cuya magnitud es el límite de sus velocidades medias referidas a distintos lapsos cuando la duración de estos tiende a 0.

velocidad-4 o 4-velocidad (A. *Viergeschwindigkeit*, *Weltgeschwindigkeit*, F. *vélocité d'univers*, I. *worldvelocity*, *4-velocity*). ↗COSMOVELOCIDAD.

velocidad de la luz (A. *Lichtgeschwindigkeit*, F. *vélocité de la lumière*, I. *speed of light*). Según Aristóteles, la luz —definida por él como el ser-en-acto del medio transparente, en cuanto es transparente— se difunde instantáneamente por todo el ámbito iluminado. Galileo propuso un método para medir el tiempo que necesita una señal luminosa para ir de un punto a otro, el cual es conceptualmente correcto pero prácticamente incapaz de arrojar un resultado superior a 0. En 1676, Rømer predijo con éxito la hora de un eclipse de Io, satélite de Júpiter, atribuyendo a la velocidad finita de la luz la dis-

minución del periodo entre eclipses mientras la Tierra se mueve hacia Júpiter (al encuentro de las señales luminosas emitidas por Io), así como el incremento de dicho periodo cuando la Tierra se aleja del planeta (lo que retarda la llegada de esas señales). Contra lo que ha solido decirse, Rømer no asignó un valor a la velocidad de la luz, pero sí calculó que la luz atravesaba en menos de un segundo una distancia igual al diámetro de la Tierra (12.000 km). Desde fines del siglo XIX, mediciones cada vez más precisas permitieron establecer que la luz en el vacío se propaga siempre a la misma velocidad, que en 1983 se estimaba en 299 792 458 m/s, con un error de 0,004 partes por millón. La definición del METRO adoptada en ese año hizo de éste un valor *exacto*.

Mientras la velocidad de la luz fue objeto de investigación empírica, Reichenbach, Grünbaum y otros filósofos sostuvieron con razón que por esta vía solo podía medirse su valor *bidireccional*, registrando el tiempo que una señal luminosa, que se emite y recibe finalmente en un mismo punto, tarda en recorrer un trayecto cerrado de longitud conocida; en cambio, para asignar a la luz una velocidad *unidireccional* hay que constatar en el punto de emisión de la señal en qué instante ocurre su recepción en el punto de destino, lo cual presupone un protocolo —necesariamente convencional— para establecer la SIMULTANEIDAD de eventos separados. Para contrarrestar estas alegaciones, se propusieron en esos años varios métodos experimentales —por fuerza mal concebidos— para medir la velocidad unidireccional de la luz sin recurrir a una convención sobre simultaneidad. La nueva definición del metro ha hecho ocioso este debate. De acuerdo con ella, si tales métodos sirviesen para algo, sería solo para establecer empíricamente si la distancia entre dos puntos diferentes *P* y *Q* es igual o no a la distancia entre *Q* y *P*.

verdad (A. *Wahrheit*, F. *vérité*, I. *truth*).

a. *Concepciones filosóficas de la verdad.* Citando a Avicena, dice Tomás de Aquino que la verdad —*veritas*— es *adaequatio intellectus et rei*: la congruencia del intelecto y la cosa, la concordancia del pensamiento y lo real. Estos teólogos y sus contemporáneos entendían la *adaequatio* en un doble sentido: la cosa —el oro verdadero, una verdadera acacia, un hombre de verdad— se adecuaba al pensamiento del Dios que la creó; y el pensamiento humano, por su misma afinidad con el divino, tenía la vocación y la capacidad de adecuarse a la realidad de cada cosa. En cambio, para la filosofía secularizada del siglo XX —con excepción de Heidegger y sus discípulos— la verdad propiamente dicha radica solo en el pensamiento o, más exactamente, en el discurso humano, aunque las lenguas europeas conserven usos de 'verdad' y 'verdadero' que evocan la concepción medieval.

Desde este punto de vista moderno, lo más natural y obvio es entender la verdad como *adaequatio intellectus ad rem*: el pensamiento, el discurso son verdaderos cuando se ajustan a las cosas, representándolas como son. Así Russell (1912a) describe la verdad como una relación entre el sujeto que discurre y las cosas sobre las que discurre; el sujeto está en lo cierto y la proposición aseverada por él es verdadera si y solo si esta se refiere a dos o más objetos, los cuales tienen entre sí la relación que ella les atribuye. Por ejemplo, si afirmo que *una de las ovejas que pastan en el prado fue mordida anoche por un zorro*, digo la verdad si y solo si, durante el periodo de oscuridad que precedió inmediatamente al día de hoy, un ejemplar de la especie *Vulpes vulpes* apretó sus mandíbulas contra una parte del cuerpo de una de las hembras adultas de la especie *Ovis aries* que se encuentran en este momento comiendo hierba dentro del área verde que mis interlocutores y yo denotamos con la frase 'el prado'. La *verdad* así concebida consiste pues, primariamente, en una *correspondencia* entre los ingredientes de una situación objetiva y los elementos de la proposición que la describe. Esta concepción tropieza ante todo con las dificultades inherentes a la idea misma de PROPOSICIÓN. Por eso, muchos filósofos prefieren concebir la verdad como la conformidad de un *enunciado* con el hecho a que se refiere. Esta idea va pasablemente bien con los lenguajes formales de la lógica, cuya sintaxis se ha diseñado de modo que los componentes de las sentencias representen justamente a los distintos tipos de factores que, según la magra ontología de los creadores de tales lenguajes, entran en la constitución de lo real. Pero es inaplicable a los lenguajes naturales, donde, desde luego, por la presencia de INDÉXICOS, un mismo enunciado puede referirse a situaciones objetivas distintas, y además es común referirse con pocas palabras a situaciones complejas o con muchas a otras muy simples. Para resolver esta dificultad, Austin (1950) sostuvo que la verdad radica no en los *enunciados* (*sentences*), sino en las *aseveraciones* (*statements*) que cada persona hace con ellos en cada ocasión. Así, la aseveración "escribo" es verdad ahora, hecha por el redactor de este texto, pero es falsa si la hace el lector o el mismo redactor en otra oportunidad. Además, cuando esta aseveración es verdadera, su verdad no supone ninguna congruencia entre la sola palabra de que consta el enunciado empleado para hacerla y el hecho complejísimo a que ella refiere; basta que haya entre aquella y este la correspondencia que, por convención de los hispanohablantes, en ciertas circunstancias autoriza a emplear esa palabra para aseverar este hecho.

Pero la dificultad principal que encara la concepción de la verdad como correspondencia es otra. Consiste en que, para determinar si una proposición, un enunciado o una aseveración son o no verdaderos, hay que compararlos con una realidad articulada conceptualmente. Hay muchos casos, claro, en que la

articulación discursiva de la experiencia está apenas insinuada. Ante una flecha verde parpadeante el conductor del automóvil aprieta el acelerador sin hacerse explícito que cuando la luz verde sea reemplazada por la roja tendrá que estar parado en la esquina por varios minutos, ni que el parpadeo indica que ello está a punto de ocurrir. Pero cada vez que alguien aplica toda su atención a cerciorarse de si un aserto es o no verdadero, la situación objetiva a que ese aserto se refiere ha de dársele empacada en una armazón verbal de descripciones e inferencias tanto más prolija y opulenta cuanto mayores sean sus dudas y su afán de certeza. Más que en una pretendida *correspondencia* con una realidad ajena al pensamiento y al lenguaje, la verdad o falsedad de un aserto residiría, según esto, en su *coherencia* con la red flexible y robusta que forman los asertos comúnmente aceptados. Esta concepción *coherentista* de la verdad se origina en las consideraciones aducidas por Descartes y Leibniz para contrastar la verdad de las percepciones con la ilusión de los sueños. Pujante sobre todo en las filosofías kantianas y hegelianas del siglo XIX, aún reúne partidarios en el siglo XX, pero en franca minoría. Se les echa en cara que, cualquiera que sea el criterio de coherencia, podrían existir muchos sistemas coherentes incompatibles, de modo que un aserto, verdadero por ser coherente con algunos de estos sistemas, a la vez fuese falso por su incoherencia con otros. Se les reprocha asimismo la clara insuficiencia de los criterios de coherencia efectivamente propuestos en sus escritos. Tales objeciones no hacen mella en un coherentismo que asuma lúcida y resueltamente la historicidad de los diversos tejidos incompletos, deshilachados, imperfectamente convergentes, que proveen los estándares de coherencia por los que de hecho juzgamos la verdad o falsedad de nuestros asertos. Tales estándares tienen que hacerse y rehacerse paso a paso, en el diario escrutinio de las verdades en las distintas esferas de la vida, tal como los estándares de justicia en la jurisprudencia romana y anglosajona, y es contraproducente e inútil tratar de codificarlos de una vez por todas en un manual general de metodología científica y filosófica. Se ha dicho además que, so pena de regreso infinito, el coherentista tiene que aceptar que al menos para una clase especial de asertos la verdad consiste en la correspondencia con los hechos. Supongamos que *p* es un aserto cualquiera y que ‘*p* es verdad’ dice exactamente lo mismo que ‘*p* cohiere con el sistema estándar de asertos $\mathcal{S}$’. Entonces, “‘*p* cohiere con $\mathcal{S}$’ es verdad’ dice lo mismo que “‘*p* cohiere con $\mathcal{S}$’ cohiere con $\mathcal{S}$”, “‘‘*p* cohiere con $\mathcal{S}$’ cohiere con $\mathcal{S}$’ es verdad” dice lo mismo que “‘‘*p* cohiere con $\mathcal{S}$’ cohiere con $\mathcal{S}$’ cohiere con $\mathcal{S}$”, y así sucesivamente, hasta el infinito, a menos que, para algún entero $n \geq 0$, el valor veritativo de los asertos no dependa tan solo de su coherencia o incoherencia con $\mathcal{S}$ en caso de que se ciñan al siguiente esquema:

---‘*p* cohiere con $\mathcal{S}$’ ... cohiere con $\mathcal{S}$

donde los guiones al comienzo representan una sucesión de n comillas iniciales y los puntos suspensivos representan n repeticiones de la expresión <*cohiere con* $\mathcal{S}$'>.

Hacia 1930, el POSITIVISMO LÓGICO y otras corrientes afines contaban con que el concepto de *verdad* sería eliminado del pensamiento científico y filosófico, ya que no parecía posible definirlo en un lenguaje FISICALISTA. El escrito de Tarski *El concepto de verdad en los lenguajes formales* (1933) produjo un cambio total en esta actitud. Tarski ha diseñado un método para definir, para cada lenguaje formal $\mathcal{L}$, el predicado *es verdad en* $\mathcal{L}$, dentro de un lenguaje —formal o no— distinto de $\mathcal{L}$ (↗METALENGUAJE). La definición es rigurosa, consistente y ajustada a las exigencias del fisicalismo, pero es inaplicable al lenguaje natural, el cual, según Tarski, no puede evitar la incoherencia debido a que contiene el predicado *es verdad* aplicable a ese mismo lenguaje y por lo tanto está fatalmente expuesto a la PARADOJA DEL MENTIROSO. El siguiente ejemplo da una idea ligeramente simplificada del método de Tarski. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden sin identidad, con ω variables individuales x_1, x_2,... y k_n predicados n-ádicos, P_1^n,..., P_k^n ($k_n \geq 0$; $0 \leq n < \omega$). Para abreviar, suponemos que $\mathcal{L}$ no tiene letras proposicionales ni constantes individuales. Una interpretación $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{L}$ fija un dominio o "universo" $\mathfrak{D}$ y asigna (i) a cada variable x_r un objeto único $\mathfrak{o}_r \in \mathfrak{D}$; (ii) a cada predicado P_i^n, un conjunto de n-tuplos ordenados $\mathfrak{C}_i^n \in \wp(\mathfrak{D}^n)$; y (iii) a cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ un valor veritativo $\mathfrak{I}(\varphi)$ tomado del conjunto $\{0,1\}$ (donde 1 se lee "verdadero" y 0 se lee "falso") y computado como sigue:

(a) Si $\varphi = P_j^m x_{i_1} \ldots x_{i_m}$, entonces $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$ si y solo si $\langle \mathfrak{o}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{o}_{i_m} \rangle \in \mathfrak{C}_j^m$;

(b) Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$ si y solo si $\mathfrak{I}(\psi) = 0$;

(c) Si $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, entonces $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$ si y solo si $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ y $\mathfrak{I}(\theta) = 1$;

(d) Si $\varphi = \exists x\psi$, donde x es una variable individual libre en ψ, entonces $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$ si y solo si hay una interpretación $\mathfrak{I}'$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathfrak{I}'(\psi) = 1$ y $\mathfrak{I}'$ difiere de $\mathfrak{I}$ a lo sumo en cuanto al objeto del dominio $\mathfrak{D}$ que $\mathfrak{I}$ y $\mathfrak{I}'$ asignan a la variable x.

A la luz de las reglas (i) y (ii), y si denotamos con Φ la traducción de la fórmula φ al castellano (que usamos como metalenguaje) conforme a las estipulaciones de la interpretación $\mathfrak{I}$, es claro que la regla (a), en que se basa la recursión regulada por las tres siguientes, puede parafrasearse en castellano así:

φ *es verdad en* $\mathcal{L}$ *(según* $\mathfrak{I}$*) si y solo si* Φ

Posteriormente —y no sin influencia de un escrito de divulgación del propio Tarski (1944)— se ha difundido una formulación menos rigurosa de esta paráfrasis, cuyos autores parecen olvidar que el predicado "es verdad" estaba restringido a sentencias de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ y la definición del mismo se hacía en un metalenguaje distinto de $\mathcal{L}$. La paráfrasis citada se presenta convertida en el llamado *esquema* T (T por *truth*, esto es, *verdad*):

φ *es verdad si y solo si* Φ

o, mejor aún, utilizando el procedimiento estándar para mencionar el enunciado Φ sin usarlo, que consiste en repetirlo entre comillas:

"Φ" *es verdad si y solo si* Φ (T)

En la literatura filosófica del último medio siglo abundan las ejemplificaciones del esquema T y suele leerse que una "buena teoría de la verdad" tiene que implicarlas a todas:

"La nieve es blanca" es verdad si y solo si la nieve es blanca;

"Madrid está en Asturias" es verdad si y solo si Madrid está en Asturias;

"3 + 7 = 10" es verdad si y solo si 3 + 7 = 10.

Tales ejemplificaciones del esquema T se alejan bastante de la concepción semántica original de Tarski —la cual supone que el lenguaje en que se define la verdad sea otro que aquel para el cual se la define— e inspiran directamente lo que llamaremos la concepción *desentrecomilladora* de la verdad (I. *disquotational conception of truth*), defendida por Quine (1990) y Horwich (1990), entre otros. Según esta concepción, aseverar que un enunciado entre comillas *es verdad* equivale simplemente a aseverar ese enunciado; por lo tanto, decir de él que *es verdad* tiene precisamente el mismo alcance que desentrecomillar ese enunciado: usarlo (sin comillas) en vez de mencionarlo (con ellas). Para estos autores, el predicado "es verdad" es útil para asentir —sin apropiárselo— a lo aseverado por otro, e indispensable para asentir a una secuencia infinita de asertos o tan larga que no sea fácil repetirla.

Ahora bien, mientras Tarski fue un partidario declarado de la concepción tradicional de la verdad como correspondencia con los hechos, que él enten-

día estar reformulando con rigor, la concepción *desentrecomilladora* es más bien una variedad del deflacionismo en esta materia, iniciado por Ramsey (1927), quien sostuvo que siempre es redundante añadir *es verdad* al final de un enunciado aseverativo. Por su parte, Strawson (1950) considera que al decir '*X* es verdad' no estamos comunicando información sobre *X*, sino ejecutando (*performing*) un acto mediante el lenguaje, el acto de asentir a la aseveración de *X*. Otra variedad de deflacionismo es la concepción "prosentencial" de Glover *et al.* (1975), según la cual "verdad" es un ingrediente característico de ciertas "prosentencias", esto es, de expresiones que representan sentencias (o enunciados) de un modo análogo a como los pronombres representan a los nombres.

b. *Lógica y verdad.* El fenómeno de la inferencia deductiva, estudiado sistemáticamente por primera vez en la lógica de Aristóteles, consiste en esto: las relaciones estructurales entre ciertos enunciados aseverativos aseguran la propagación de la verdad de unos a otros, independientemente de los temas a que se refieren. Dicho de otro modo: es posible reunir secuencias de dos o más enunciados que, no importa de lo que hablen, poseen la siguiente propiedad en virtud de su sola estructura: la verdad del último enunciado de la secuencia (la *conclusión*) está garantizada si los otros enunciados de la secuencia (las *premisas*) son todos verdaderos. Para ponerlo de manifiesto, Aristóteles utilizó dos recursos: (i) enuncia las premisas y conclusión de una inferencia deductiva en un lenguaje (más o menos) canónico; (ii) reemplaza con letras los términos que fijan la referencia. He aquí un ejemplo, tomado de *Primeros Analíticos* (59^b23): "Si se supone que lo *A* se da en todo lo *C* pero en ningún *B*, lo *B* no se da en ningún *C*" (modo *camestres*; ↗SILOGÍSTICA, regla 2.1).

La práctica aristotélica anticipa el uso de lenguajes formales por la lógica moderna. En un lenguaje formal $\mathscr{L}$, es posible distinguir con perfecta claridad y rigor entre la estructura de las *sentencias* de $\mathscr{L}$ y su contenido temático: aquella depende de la sintaxis de $\mathscr{L}$; este está fijado, conforme a la semántica de $\mathscr{L}$, por cada interpretación de $\mathscr{L}$. Las reglas semánticas de un lenguaje formal $\mathscr{L}$ determinan el valor veritativo —*verdad* o *falsedad*— de las sentencias compuestas de $\mathscr{L}$ en función del valor veritativo de las sentencias simples, el cual depende de la interpretación adoptada y de la naturaleza misma de las cosas (↗INTERPRETACIÓN). Cada regla de inferencia R de un cálculo correcto en $\mathscr{L}$ reúne entonces una clase Γ_R de pares ordenados $\langle \Phi,\psi \rangle$, donde Φ es un conjunto formado por una o más sentencias de $\mathscr{L}$ y ψ es una sentencia de $\mathscr{L}$; estas sentencias están estructuradas sintácticamente de tal modo que, si todas las contenidas en el primer elemento Φ de un par $\langle \Phi,\psi \rangle \in \Gamma_R$ son verdad en una interpretación cualquiera $\mathfrak{S}$, entonces, por las

reglas semánticas, también ψ es verdad en $\mathfrak{I}$. (Hay que hacer una salvedad: las reglas de inferencia del cálculo de DEDUCCIÓN NATURAL de Gentzen son clases de pares $\langle\Phi,\Psi\rangle$, donde tanto Φ como Ψ son conjuntos de sentencias del lenguaje utilizado y la verdad en $\mathfrak{I}$ de todas las Φ garantiza la verdad en $\mathfrak{I}$ de al menos una de las Ψ.)

Para discurrir sobre estos asuntos es indispensable disponer de un término que designe la *verdad en* $\mathscr{L}$ (o su negación, la *falsedad en* $\mathscr{L}$). Sin embargo, no es posible introducir un término con este alcance en un lenguaje formal $\mathscr{L}$. Por ejemplo, si $\mathscr{L}$ es un lenguaje de primer orden con identidad, es fácil darle en $\mathscr{L}$ un nombre a cada sentencia de $\mathscr{L}$ (↗GÖDELIZACIÓN); pero la introducción de un predicado V mediante el obvio esquema de axiomas $\vdash V\hat{\alpha} \Leftrightarrow \alpha$ (donde α recorre todas las sentencias de $\mathscr{L}$ y $\hat{\alpha}$ es el nombre de α en $\mathscr{L}$) lleva derecha a una contradicción. En efecto, sea $\hat{o}$ el nombre de la sentencia $V\hat{u}$, donde $\hat{u}$ es el nombre de la sentencia $\neg V\hat{o}$. Sustituyendo α por estas dos sentencias en el esquema mediante el cual introdujimos V, obtenemos los teoremas $\vdash V\hat{o} \Leftrightarrow V\hat{u}$ y $\vdash V\hat{u} \Leftrightarrow \neg V\hat{o}$, de los cuales se deduce —por transitividad del bicondicional— la contradicción $\vdash V\hat{o} \Leftrightarrow \neg V\hat{o}$ (↗PARADOJA DEL MENTIROSO, TEOREMA DE INDEFINIBILIDAD DE TARSKI). Por eso, las reglas semánticas de un lenguaje formal $\mathscr{L}$ tienen que formularse en un lenguaje natural o en un lenguaje formal diferente de $\mathscr{L}$ (↗METALENGUAJE), en el cual también ha de probarse la corrección de las reglas de inferencia de $\mathscr{L}$.

c. *Verdad y aproximación.* En la literatura filosófica sobre las ciencias empíricas se habla a veces de "verdad aproximada" y de "aproximación a la verdad". Estas expresiones, inconciliables al parecer con el distingo tajante entre *verdad y mentira —o lo verdadero y lo falso—* favorecido por el sentido común y los tribunales de justicia, responden a dos géneros de motivos.

Desde luego, en las ciencias experimentales no se puede registrar ni tiene sentido predecir el valor exacto de una cantidad continua (por ejemplo, la distancia entre el polo norte de la Tierra y el punto de la Luna más próximo a él, a las 20:02 GMT del 20 de febrero de 2002). Las predicciones dan un intervalo —cuanto más estrecho, mejor— dentro del cual ha de caer el número real en cuestión, y a menudo también la probabilidad —alta pero generalmente menor que 1— de que caiga en ese intervalo; las mediciones dan el valor medio y la variancia o dispersión de la cantidad (↗ERROR). Para quien piense que "en realidad" la cantidad tiene "en sí misma" un valor determinado en cada instante, es inevitable concluir que predicciones y mediciones ofrecen solo una "verdad aproximada"; aunque un enunciado como "la medición arrojó como resultado un valor medio de 3,005437 kg con una dispersión de 0,000775 kg" es, por cierto, perfectamente capaz de ser verdadero o falso, sin medias tintas.

La idea de "aproximación a la verdad" responde también a la necesidad de combatir el desaliento que la fugacidad de las teorías científicas podría provocar sin ella. En vez de decir que la MECÁNICA CLÁSICA, orgullo del siglo XIX, es *falsa* y que en rigor también lo son la MECÁNICA CUÁNTICA y la TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS, triunfantes en el siglo XX, se las describe como tres "aproximaciones a la verdad", tales que la segunda es mejor que la primera y la tercera es mejor que las otras dos. Este maridaje entre verdad y aproximación difiere del comentado en el párrafo anterior y es bastante más problemático que él. En efecto, la anchura precisa de un intervalo, la confiabilidad de una predicción, la magnitud de una dispersión dan una medida —correcta o no, pero en todo caso bien definida— del grado de aproximación al valor de la cantidad "en sí". En cambio, tal medida falta por completo en el caso de aproximación al que nos referimos en este párrafo. Se trata acá del reemplazo de teorías sobre aspectos centrales de la naturaleza que estaban bien corroboradas por otras que difieren de ellas en sus predicciones —lo suficiente como para que el reemplazo se justifique—, pero además —radicalmente— en sus conceptos. Los conceptos de la teoría reemplazada ¿cuán apropiados eran para pensar la verdad? ¿Cuánto distaban de ella los principios armados con dichos conceptos? Mientras no se disponga de la "teoría final de todas las cosas" parece imposible siquiera barruntar cuál será la respuesta a estas preguntas. (Sobre la comparación cuantitativa de la "aproximación a la verdad" de dos teorías reconocidamente falsas, ↗VEROSIMILITUD.)

verificabilidad como criterio del significado (A. *Verifizierbarkeit als Sinnkriterium*, F. *vérifiabilité en tant que critère de signification cognitive*, I. *verifiability criterion of meaning*). Es un principio básico del POSITIVISMO LÓGICO que un aserto hace una aseveración dotada de sentido —Hempel (1950) especifica: "cognitivamente significativa"— si y solo si es o bien (i) ANALÍTICO o contradictorio, o bien (ii) susceptible —Hempel especifica: "al menos potencialmente"— de VERIFICACIÓN en la experiencia. En la etapa inicial de la escuela, se sobreentendía que la verificación de un aserto del tipo (ii) tenía que hacerse por comparación directa con el flujo de vivencias de la persona que lo pronuncia o entiende. Para ello, resultaba indispensable desarrollar un lenguaje capaz de tales comparaciones y establecer formalmente relaciones de equivalencia y de implicación entre enunciados de ese lenguaje y los enunciados de la ciencia y la vida cotidiana que no se quisiera desechar como carentes de significado. Carnap (1928) lo intentó sin éxito. Pocos años más tarde se persuadió de que un enunciado puede compararse solamente con otros enunciados, y no con vivencias, y de que en todo caso abundan los enunciados directamente verificables que contienen términos del lenguaje utilizado en la vida diaria para hablar de las cosas perceptibles que nos rodean; como en

este ejemplo de ENUNCIADO PROTOCOLAR debido a Neurath: "Protocolo de Otto a las 3:17 horas: [A las 3:16 horas Otto se dijo a sí mismo: (a las 3:15 horas había en la sala una mesa percibida por Otto)]". Posteriormente, el vínculo exigido por Carnap y sus amigos entre la verificabilidad de los enunciados científicos y su significado cognitivo se tornó cada vez más tenue (↗CONCEPTO DISPOSICIONAL, TÉRMINOS OBSERVACIONALES Y TEÓRICOS).

verificación (A. *Verifikation, Bestätigung*, F. *verification*, I. *verification*). *Verificar* un aserto es establecer su VERDAD. Lo hacemos a diario, mediante diversos procedimientos adecuados en cada caso a la índole de la aseveración problemática que nos interesa comprobar. Así, *verifico* que acaba de llover echándole un vistazo al pavimento de la calle; *verifico* que el 17% de 60.000 es 10.200 ejecutando los cálculos pertinentes; *verifico* que una persona es quien dice ser comparando su rostro y en caso necesario la huella de su pulgar derecho con las imágenes impresas en su documento de identidad; *verifico* que el polvo blanco en un frasco no es azúcar sino muy probablemente sal poniéndome un poquito de ese polvo sobre la lengua. Cuando se trata de aseveraciones científicas, es mucho mayor la variedad y complejidad de los procedimientos de verificación y es dudoso que puedan todos reducirse —como han pretendido algunos filósofos— a combinaciones de actos homogéneos de captación directa e incontestable de la verdad.

verosimilitud (A. *Bewährungsgrad*, F. *vérisimilitude*, I. *verisimilitude*). Concepto cuantitativo introducido por Popper (1963) para hacer posible una comparación significativa entre teorías rivales, ambas falsas, con respecto a su "aproximación a la verdad". Para Popper, el *contenido* de una TEORÍA T es el conjunto de *todos* los enunciados que son consecuencias lógicas de T. Si T es verdadero, su contenido incluye solo enunciados verdaderos. Pero si T es falso, su contenido consta de dos partes mutuamente excluyentes: el *contenido de verdad* de T, formado por todas las consecuencias lógicas de T que son verdaderas, y el *contenido de falsedad* de T, formado por todas las consecuencias lógicas de T que son falsas. Si T_1 y T_2 son dos teorías cuyos contenidos de verdad y falsedad son comparables, podemos decir, según Popper, que T_1 *corresponde mejor a los hechos* o *es más verosímil* que T_2 si y solo si se cumple una de dos condiciones: (*a*) T_1 tiene consecuencias verdaderas que no son consecuencias de T_2 pero no tiene ninguna consecuencia falsa que no lo sea también de T_2, o (*b*) T_2 tiene consecuencias falsas que no son consecuencias de T_1 pero no tiene ninguna consecuencia verdadera que no lo sea también de T_1.

Además de esta definición lógica de *verosimilitud*, Popper ha propuesto una definición probabilística, que no puede decirse que equivalga a la otra.

Sea a un enunciado cualquiera, cuya PROBABILIDAD es $p(a)$. Popper asigna a la *medida* del contenido de a el valor $Ct(a) = 1 - p(a)$. Asumiendo con él que tiene sentido hablar de enunciados infinitos (formados operando sobre una secuencia denumerable de enunciados ordinarios), llamemos V a la conjunción de todos los enunciados verdaderos y a_V a la disyunción $a \vee V$. Como a_V es una consecuencia lógica de a, $p(a) = p(a \wedge a_V) \leq p(a_V)$ y la probabilidad condicional $p(a|a_V) = p(a)/p(a_V)$. Como a_V implica un enunciado b si y solo si a implica b y b es verdadero, a_V es el enunciado (infinito) verdadero más fuerte implicado por a. Popper se siente autorizado por esto a identificar el contenido de verdad de a con el contenido de a_V y, por ende, la medida de aquél con la de éste: $Ct_V(a) = Ct(a_V) = 1 - p(a_V)$. Como $p(a) \leq p(a_V)$, es claro que $Ct_V(a) \leq Ct(a)$, donde la igualdad vale solo si a es verdadero. La definición del contenido de falsedad de a es más problemática. Popper finalmente se decide por $Ct_F(a) = 1 - p(a|a_V)$. Popper define la *verosimilitud* de a como la diferencia entre las medidas de su contenido de verdad y su contenido de falsedad. Para comparar las verosimilitudes de distintos enunciados, conviene multiplicarlas por un factor normalizador ajustado a cada una, a saber, el valor recíproco de $p(a|a_V) + p(a_V)$. La verosimilitud $Vs(a)$ del enunciado finito o infinito a queda, pues, dada por

$$Vs(a) = Ct_V(a) - Ct_F(a) = \frac{p(a|a_V) - p(a_V)}{p(a|a_V) + p(a_V)} = \frac{p(a) - (p(a_V))^2}{p(a) + (p(a_V))^2}$$

Las definiciones popperianas de contenido y de verosimilitud no funcionan, como probó David Miller (1974). De esas definiciones resulta que una teoría consistente nunca es más verosímil que una teoría contradictoria y que una teoría es más verosímil que otra si y solo si la primera es verdadera y la segunda es falsa pero consistente, lo cual no resulta muy intuitivo. Popper mismo escribió en 1978: "Debo reconocer que la definición de verosimilitud que he propuesto está equivocada. [...] Lamento profundamente haber cometido algunos errores muy serios en relación con la definición de verosimilitud; pero pienso que no deberíamos concluir del fracaso de mis intentos de solucionar el problema que el problema no puede ser solucionado". Otros, como Ilkka Niiniluoto, han seguido buscando una definición adecuada de verosimilitud, aunque es dudoso que lo hayan conseguido. La noción intuitiva de verosimilitud como semejanza o proximidad a la verdad sigue sin dilucidar.

W

W⁺, W⁻ y Z. Bosones *gauge* que transmiten la interacción débil (↗MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS). Son partículas elementales masivas (de 83 y 93 GeV, respectivamente), de "vida" breve (10^{-25} s) y spin 1. Las partículas W^+ y W^- tienen carga eléctrica, positiva y negativa, respectivamente, y Z es eléctricamente neutral.

watt. Unidad internacional de POTENCIA. Un vatio (1 W) es la potencia de una fuente energética que suministra ENERGÍA —o de una fuerza que realiza TRABAJO— a razón de un joule por segundo (1 W = 1 J/s).

Bibliografía

I. OBRAS CONSULTADAS

Audi, Robert (ed.) (1999): *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, segunda edición, Cambridge, Cambridge University Press.

Ballantine, Leslie E. (1998): *Quantum Mechanics: A Modern Development*, Singapur, World Scientific.

Brown, Laurie M., Abraham Pais y sir Brian Pippard (eds.) (1995): *Twentieth Century Physics*, Bristol, Institute of Physics Publishing / Nueva York, American Institute of Physics Press, 3 vols.

Bunge, Mario (1967): *Foundations of Physics*, Berlín, Springer.

— (1983): *La investigación científica: su estrategia y su filosofía*, segunda edición corregida, traducción de Manuel Sacristán, Barcelona, Ariel.

Bynum, William F., E. J. Browne y Roy Porter (eds.) (1981): *Dictionary of the History of Science*, Princeton, Princeton University Press.

Cottingham, W. N., y D. A. Greenwood (1998): *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Craig, Edward (ed.) (1998): *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Londres, Routledge, 10 vols.

Edwards, Paul (ed.) (1967): *The Encyclopedia of Philosophy*, Nueva York, Macmillan, 8 vols.

Ferrater Mora, José (1980): *Diccionario de Filosofía*, segunda edición en "Alianza Diccionarios", Madrid, Alianza, 4 vols.

Gabbay, Dov, y Franz Guenthner (eds.) (2001): *Handbook of Philosophical Logic*, segunda edición, Dordrecht, Kluwer, 4 vols.

Hetherington, Norris (ed.) (1993): *Encyclopedia of Cosmology: Historical, Philosophical, and Scientific Foundations of Modern Cosmology*, Nueva York, Garland Publishing.

Honderich, Ted (ed.) (1995): *The Oxford Companion to Philosophy*, Oxford, Oxford University Press.

Iyanaga, Shôkichi, y Yukiyosi Kawada (eds.) (1977): *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, por la Sociedad Matemática del Japón, traducción inglesa revisada por Kenneth O. May, Cambridge, MA, The MIT Press, 2 vols.

Lalande, André (ed.) (1951): *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, sexta edición corregida y aumentada, París, Presses Universitaires de France.

Lerner, Rita G., y George L. Trigg (eds.) (1981): *Encyclopedia of Physics*, Reading MA, Addison-Wesley.

Levy, Azriel (2002): *Basic Set Theory*, edición revisada, Nueva York, Dover.

Maran, Stephen (ed.) (1992): *The Astronomy and Astrophysics Encyclopedia*, Nueva York, Van Nostrand Reinhold.

Marciszewski, Witold (ed.) (1981): *Dictionary of Logic as Applied in the study of Language*, La Haya, Martinus Nijhoff.

Meschkowski, Herbert (1966): *Mathematisches Begriffswörterbuch*, segunda edición aumentada, Mannheim, Bibliographisches Institut.

Mittelstraß, Jürgen (ed.) (1980-1996): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Mannheim, Bibliographisches Institut / Stuttgart, J. B. Metzler, 4 vols.

Mosterín, Jesús (2000): *Conceptos y teorías en la ciencia*, tercera edición, Madrid, Alianza.

— (2000): *Los lógicos*, Madrid, Espasa-Calpe.

— (2001): *Ciencia viva*, Madrid, Espasa-Calpe.

Murdin, Paul (ed.) (2000): *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*, Nueva York, Institute of Physics Publ. y Grove's Dictionaries, 4 vols.

Ohanian, Hans C. (1985): *Physics*, Nueva York, W. W. Norton.

Quintanilla, Miguel Á. (ed.) (1979): *Diccionario de filosofía contemporánea*, segunda edición, Salamanca, Ediciones Sígueme.

Ritter, Joachim, y Karlfried Gründer (eds.) (1971-): *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 11 volúmenes publicados hasta la fecha (A-V).

Torretti, Roberto (1996): *Relativity and Geometry*, segunda edición corregida, Nueva York, Dover.

— (1998): *El Paraíso de Cantor: La tradición conjuntista en la filosofía matemática*, Santiago de Chile, Editorial Universitaria.

— (1999): *The Philosophy of Physics*, Nueva York, Cambridge University Press.

Vinogradov, I. M. (ed.) (1993-1997): *Enciclopedia de Matemáticas*, por la Academia de Ciencias de Rusia, Moscú, Editorial Mir/Madrid, Rubiños, 12 vols.

Zalta, Edward (ed.): *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu.

II. OBRAS MENCIONADAS

Ackermann, Wilhelm (1928): "Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen", *Mathematische Annalen*, vol. 99, pp. 118-133.

Aharonov, Y., y Y. Bohm (1959): "Significance of the electromagnetic potentials in the Quantum Theory", *Physical Review*, vol. 115, pp. 458-491.

Albert, David Z. (2000): *Time and Chance*, Cambridge MA, Harvard University Press.

Albrecht, A., y P. J. Steinhardt (1982): "Cosmology for Grand Unified Theories with induced symmetry breaking", *Physical Review Letters*, vol. 48, pp. 1120-1223.

Aristóteles: *Aristotelis Opera*, Ex recognitione I. Bekkeris edidit Academia Regia Borussica, Berlín, G. Reimer, 1831. 2 vols. (Como es habitual, damos página, columna y línea según esta edición, pero seguimos el texto de otras ediciones más recientes.)

Arnauld, Antoine, y Pierre Nicole (1664): *La logique ou l'art de penser, contenant outre les règles communes plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement*, París. (Publicación anónima.)

Aspect, A., P. Grangier y G. Roger (1981): "Experimental tests of realistic local theories via Bell's Theorem", *Physical Review Letters*, vol. 47, pp. 460-463.

—, — y — (1982a): "Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities", *Physical Review Letters*, vol. 48, pp. 91-94.

—, J. Dalibard y G. Roger (1982b): "Experimental tests of Bell's inequalities using time-varying analyzers", *Physical Review Letters*, vol. 49, pp. 1804-1807.

Austin, John L. (1950): "Truth", *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. suplem. 24, pp. 111-128.

Avogadro, Amedeo (1811): "Essai d'une manière de déterminer les mases relatives des molecules élémentaires des corps, et les proportions selon lesquelles elles entrent dans ces combinations", *Journal de Physique*, vol. 73, pp. 58-76.

Ballentine, Leslie E. (1970): "The statistical interpretation of quantum mechanics", *Reviews of Modern Physics*, vol. 42, pp. 358-381.

— (1998): *Quantum Mechanics: A Modern Development*, Singapur, World Scientific.

Barrow, John D., y Frank J. Tipler (1986): *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford, Clarendon Press.

Barwise, J., y J. Etchemendy (1987): *The Liar: An Essay on Truth and Circularity*, Nueva York, Oxford University Press.

Bayes, Thomas (1763): "An essay towards solving a problem in the doctrine of chances", *Royal Society of London Philosophical Transactions*, vol. 53, pp. 370-418.

Bell, John S. (1964): "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", *Physics*, vol. 1, pp. 195-200.

Bernoulli, Daniel (1738): *Hydrodynamica*, Basilea.

Bernoulli, Jacobus (1713): *Ars conjectandi: opus posthumum*, Basilea, Impensis Thurnisiorum, fratrum.

Bernstein, F. (1905): "Untersuchungen aus der Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, vol. 61, pp. 117-155.

Bertrand, Joseph (1888): *Calcul des probabilités*, París, Gauthier-Villars.

Beth, E. W. (1953): "On Padoa's method in the theory of definition", *Indagationes mathematicae*, vol. 15, pp. 330-339.

Birkhoff, Garrett (1948): *Lattice Theory*, segunda edición (revisada), Providence RI, American Mathematical Society.

—, John von Neumann (1936): "The Logic of Quantum Mechanics", *Annals of Mathematics*, vol. 37, pp. 823-843.

— (1923): *Relativity and Modern Physics*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Black, Max (1967): "Induction", en Paul Edwards (ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, Nueva York, Macmillan, vol. 4, pp. 169-181.

Bohm, David (1952): "A suggested interpretation of the Quantum Theory in terms of 'hidden variables'", *Physical Review*, vol. 85, pp. 166-179, 180-193.

—, y Yuri Aharonov (1957): "Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Podolsky and Rosen", *Physical Review*, vol. 108, pp. 1070-1076.

Bohr, Niels (1913): "On the constitution of atoms and molecules", *Philosophical Magazine*, vol. 26, pp. 1-25, 476-502, 857-875.

— (1928): "The quantum postulate and the recent development of atomic theory", *Nature*, vol. 121, pp. 580-590.

— (1934): *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge, Cambridge University Press.

— (1935): "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", *Physical Review*, vol. 48, pp. 696-702.

— (1949): "Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics", en P. A. Schilpp (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Evanston, Library of Living Philosophers, pp. 199-241.

Boltzmann, Ludwig (1877): "Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht", *Akademie der Wissenschaften in Wien, Berichte*, vol. 76, pp. 373-435.

Bondi, Hermann, y Thomas Gold (1948): "The steady-state theory of the expanding universe", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 108, pp. 252-270.

Boole, George (1847): *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, Macmillan.

Born, Max (1924): "Über Quantenmechanik", *Zeitschrift für Physik*, vol. 26, pp. 379-395.

Boscovich, Roger Joseph (1758): *Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Vindobonae.

Bose, S. N. (1924): "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Zeitschrift für Physik*, vol. 26, pp. 178-181.

Bradley, James (1728): "A Leter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford and F.R.S. to Dr. Edmund Halley Astronom. Roy. etc. giving an Account of a new discovered Motion of the Fix'd Stars", *Royal Society of London Philosophical Transactions*, vol. 35, pp. 637-661.

Braginsky, V. B., y V. I. Panov (1971): "Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass", *Soviet Physics JETP*, vol. 34, pp. 463-466 (1972). Original ruso en *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 61, pp. 873-879 (1971).

Brentano, Franz (1874): *Psychologie vom empirischen Standpunkt*, vol. 1, Leipzig, Dunkker & Humblot.

Brillouin, Léon (1951): "Maxwell's demon cannot operate: Information and entropy. I", *Journal of Applied Physics*, vol. 22, pp. 334-337.

Brouwer, L. E. J. (1911): "Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl", *Mathematische Annalen*, vol. 70, pp. 161-165.

Bub, Jeffrey (1997): *Interpreting the Quantum World*, Cambridge, Cambridge University Press.

Bunge, Mario (1964): "Phenomenological Theories", en Mario Bunge (ed.), *The Critical Approach to Science and Philosophy*, Nueva York, The Free Press of Glencoe, pp. 234-254.

— (1967): *Foundations of Physics*, Berlín, Springer.

Bunt, Harry (1985): *Mass Terms and Model-Theoretic Semantics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Burali-Forti, Cesare (1897): "Una questione sui numeri transfiniti", *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol. 11, pp. 154-164.

Cannizzaro, Stanislao (1858): "Sunto di un corso di filosofia chimica, fatto nella R. Università di Genova. Lettera al Prof. De Luca", *Il Nuovo Cimento*, vol. 7, pp. 321-366.

Cantelli, F. (1917): "Sulla probabilità come limite della frequenza", *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. 26, pp. 39-45.

Cantor, Georg (1895/1897): "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, vol. 45, pp. 581-512; vol. 49, pp. 207-246.

— (1887/1888): "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 91, pp. 81-125; vol. 92, pp. 240-265.

— (1890/1891): "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 1, pp. 75-78.

Carnap, Rudolf (1928): *Der logische Aufbau der Welt*, Berlín, Weltkreis-Verlag.

— (1936/1937): "Testability and meaning", *Philosophy of Science*, vol. 3, pp. 419-471; vol. 4, pp. 1-40.

— (1938): "Logical Foundation of the Unity of Science", en Otto Neurath *et al.* (eds.), *Encyclopedia and Unified Science*, Chicago, University of Chicago Press, pp. 42-62.

— (1947): *Meaning and Necessity: A Study of Semantics and Modal Logic*, Chicago, University of Chicago Press.

— (1956): "The Methodological Character of Theoretical Concepts", en Herbert Feigl y Michael Scriven (eds.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Minneapolis, University of Minnesota Press, vol. I, pp. 38-76.

Carnap, Rudolf (1966): *Philosophical Foundations of Physics: An Introduction to the Philosophy of Science*, edited by M. Gardner, Nueva York, Basic Books.

Carnot, Sadi (1824): *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres a développer cette puissance*, París, Chez Bachelier.

Carter, Brandon (1974): "Large number coincidences and the anthropic principle in cosmology", en B. Carter y M. S. Longair (eds.), *Confrontation of cosmological theories with data*, Dordrecht, Reidel, pp. 291-298.

Cartwright, Nancy (1983): *How the Laws of Physics Lie*, Oxford, Clarendon Press.

— (1989): *Nature's Capacities and Their Measurement*, Oxford, Clarendon Press.

— (2000): *The Dappled World: A Study of the Boundaries of Science*, Cambridge, Cambridge University Press.

Chuquet, Nicolas (1484): "Notice sur Nicolas Chuquet et son 'Triparty en la science des nombres'", por A. Marre, *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, Roma, 1880, pp. 550-659, 693-814.

Church, Alonzo (1933): "A set of postulates for the foundations of logic (second paper)", *Annals of Mathematics*, vol. 34, pp. 839-864.

— (1936): "An unsolvable problem of elementary number theory", *American Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 345-363.

— (1940): "On the concept of a random sequence", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 46, pp. 130-135.

Claggett, Marshall (ed.) (1959b): *Critical Problems in the History of Science*, Madison, WI, University of Wisconsin Press.

Clauser, J. F., M. A. Horne, A. Shimony y M. A. Holt (1969): "Proposed experiments to test hidden variable theories", *Physical Review Letters*, vol. 23, pp. 880-883.

Clauser, John F. y Michael A. Horne (1974): "Experimental consequences of objective local theories", *Physics Review*, vol. D10, pp. 526-535.

Clausius, Rudolph (1854): "Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie", *Annalen der Physik*, vol. 93 (de la 2ª serie), pp. 481-506.

Cohen, Paul J. (1963/1964): "The independence of the continuum hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 50, pp. 1143-1148; vol. 51, pp. 105-110.

Compton, Arthur H. (1922): "Secondary radiations produced by X-rays, and some of their applications to physical problems", *Bulletin of the National Research Council*, vol. 4, pp. 1-56.

Comte, Auguste (1830-1842): *Cours de philosophie positive*, París, Bachelier, 6 vols.

— (1851-1854): *Système de politique positive; ou, traité de sociologie, instituant la religion de l'humanité*, París, L. Mathias, 4 vols.

Cournot, A. A. (1843): *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, París, Hachette.

Craig, Wiliam (1953): "On axiomatizability within a system", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 18, pp. 30-32.

Craig, Wiliam (1957): "Three uses of the Herbrand-Gentzen Theorem in relating model theory and proof theory", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 22, pp. 269-285.

Da Costa, Newton C. A. (1963): *Sistemas formais inconsistentes*, Rio de Janeiro, Nucleo de Estudios e Pesquisas Cientificas do Rio de Janeiro. (2ª ed., Curitiba: Editora UFPR, 1993).

Dalton, John (1808): *A new system of chemical philosophy*, London, Printed by S. Russell for R. Bickerstaff.

Darwin, Charles (1859): *The Origin of Species by Means of Natural Selection*, Londres, John Murray.

Debye, Peter (1912): "Zur Theorie der spezifischen Wärme", *Annalen der Physik*, vol. 39, pp. 789-839.

Dedekind, Richard (1872): *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, Vieweg.

— (1888): *Was sind und sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg.

Descartes, René (1637): *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus La dioptrique, Les méteores, et La géometrie, qui sont des essais de cette méthode*, Leyde, de l'imprimerie de I. Maire.

— (1644): *Principia philosophiae*, Amstelodami, apud Ludovicum Elzevirium.

Dewey, John (1938): "Unity of Science as a Social Problem", en Otto Neurath *et al.* (eds.), *Encyclopedia and unified science*, Chicago, University of Chicago Press.

DeWitt, Bryce S. (1971): "The many-universes interpretation of quantum mechanics", en B. d'Espagnat (ed.), *Foundations of Quantum Mechanics*, Nueva York, Academic Press, pp. 211-262. (Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi". Course IL).

Dirac, Paul Adrien Maurice (1928): "The quantum theory of the electron", *Royal Society of London Proceedings*, vol. A 117, pp. 610-624.

Dirichlet, G. P. L. (1837): "Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen", *Repertorium der Physik*, vol. 1 nº 152-174.

Dretske, Fred I. (1981): *Knowledge and the Flow of Information*, Cambridge MA, MIT Press.

Du Bois-Reymond, Paul (1875): "Über asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösungen von Gleichungen", *Mathematische Annalen*, vol. 8, pp. 363-414.

Duhem, Pierre (1906): *La théorie physique: son objet, sa structure*, Paris, Chevalier et Rivière.

Dummett, Michael (1978): *Truth and Other Enigmas*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Earman, John (1986): *A Primer on Determinism*, Dordrecht, D. Reidel.

— y John Norton (1987): "What price spacetime substantivalism? The hole story", *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 38, pp. 515-525.

— y Jesús Mosterín (1999): "A critical look at inflationary cosmology", *Philosophy of Science*, vol. 66, pp. 1-50.

Easton, W. B. (1964). "Powers of regular cardinals". Ph. D. dissertation. Princeton University. [Cf. W. B. Easton (1970): "Powers of regular cardinals", *Annals of Mathematical Logic*, vol. 1, pp. 139-178.]

Eells, E. (1991): *Probabilistic Causality*, Cambridge, Cambridge University Press.

Eilenberg, Samuel, y Saunders MacLane (1945): "General theory of natural equivalences", *American Mathematical Society Transactions*, vol. 58, pp. 231-294.

Einstein, Albert (1905a): "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt", *Annalen der Physik*, vol. 17, pp. 132-148.

— (1905b): "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik*, vol. 17, pp. 891-921.

— (1907): "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen", *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, vol. 4, pp. 411-462.

— (1914): "Der formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *K. Preußische Akademie der Wissenschaften*, pp. 1030-1085.

— (1917): "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie", *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte*, pp. 142-152.

— (1922): "Theoretische Bemerkung zur Supraleitung der Metalle", en Leyden Rijksuneversiteit...Natuurkundig Laboratorium. *Gedenkboek aangeboden aan H. Kamerlingh Onnes*, Leiden, Ijdo, pp. 429-435.

—, y M. Grossmann (1913): *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*, Leipzig, Teubner.

—, Leopold Infeld y Banesh Hoffmann (1938): "The gravitational equations and the problem of motion", *Annals of Mathematics*, vol. 39, pp. 65-100.

—, Boris Podolsky y Nathan Rosen (1935): "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", *Physical Review*, vol. 47, pp. 777-780, 138-141.

Eötvös, Roland, D. Pekar y E. Fekete (1922): "Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität", *Annalen der Physik*, vol. 68, pp. 11-66. Resultados presentados en 1909.

Euler, Leonard (1755): *Institutiones calculi differentialis*, Petropolitanae, Impensis Academiae Imperialis Scientiarum.

Evans, Gareth (1982): *The Varieties of Reference*, edited by John McDowell, Oxford, Clarendon Press.

Everett (III), Hugh (1957): "'Relative state' formulation of quantum mechanics", *Reviews of Modern Physics*, vol. 29, pp. 454-462.

Falkenburg, Brigitte (1995): *Teilchenmetaphysik: Zur Realitätsauffassung in Wissenschaftsphilosophie und Microphysik*, 2. Auflage, Heidelberg, Spektrum.

Feyerabend, Paul (1975): *Against Method*, Londres, New Left Books.

Field, Hartry (1972): "Tarski's Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, vol. 69, pp. 347-375.

— (1980): *Science Without Numbers: A Defense of Nominalism*, Princeton NJ, Princeton University Press.

Fine, Arthur (1998): "Bell's Theorem", *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, CD ROM (versión 1.0), Londres, Routledge.

Finetti, Bruno de (1930): "Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio", *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, vol. IV nº 5, pp. 86-133.

— (1931): "Sul significato soggettivo della probabilità", *Fundamenta Mathematicae*, vol. 17, pp. 298-329.

Finkelstein, David (1962/1963): "The logic of quantum physics", *Transactions of the New York Academy of Sciences*, vol. 25, pp. 621-637.

Fizeau, A. H. L. (1851): "Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 33, pp. 349-355.

Fock, V. (1926): "Über die invariante Form der Wellen- und Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt", *Zeitschrift für Physik*, vol. 39, pp. 226-233.

Fourier, Joseph (1822): *Théorie analytique de la chaleur*, París, Firmin Didot.

Fraenkel, Abraham A. (1922): "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, vol. 86, pp. 230-237.

Franklin, Allan (1986): *The Neglect of Experiment*, Cambridge, Cambridge University Press.

— (1990): *Experiment, right or wrong*, Cambridge, Cambridge University Press.

— (1998): "Experiment in Physics", en Edward Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/physics-experiment/.

Frege, Gottlob (1879): *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache*, Halle a.S., Louis Nebert.

— (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Wilhelm Koebner.

— (1892): "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 100, pp. 25-50.

— (1918/1919): "Logische Untersuchungen. I. Der Gedanke", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1, pp. 58-77.

Friedmann, Alexander (1922): "Über die Krümmung des Raumes", *Zeitschrift für Physik*, vol. 10, pp. 377-386.

— (1924): "Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes", *Zeitschrift für Physik*, vol. 21, pp. 326-332.

Galileo Galilei (1632): *Dialogo...sopra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico, e Copernicano; proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali tanto per l'una, quanto per l'altra parte*, Florencia, Gio. Batista Landini.

Galison, Peter (1987): *How Experiments End*, Chicago, University of Chicago Press.

— (1997): *Image and Logic: A Material Culture of Microphysics*, Chicago, University of Chicago Press.

Gell-Mann, Murray, y James B. Hartle (1993): "Classical equations for quantum systems", *Physical Review D*, vol. 47, pp. 3345-3382.

Gentzen, Gerhard (1934): "Untersuchungen über das logische Schließen", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, pp. 176-210, 405-431.

Geroch, Robert P., y P. S. Jang (1975), "Motion of a body in General Relativity". *Journal of Mathematical Physics*, vol. 16, pp. 65-67.

Ghirardi, G. C., A. Rimini y T. Weber (1986): "Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems", *Physical Review*, vol. D 34, pp. 470-491.

Ghiselin, Michael (1974): "A radical solution to the species problem", *Systematic Zoology*, vol. 23, pp. 536-544.

Giannoni, Carlo Borromeo (1971): *Conventionalism in Logic, a study in the linguistic foundation of logical reasoning*, La Haya, Mouton.

Giere, Ronald N. (1988): *Explaining Science: A Cognitive Approach*, Chicago, University of Chicago Press.

— (1999): *Science Without Laws*, Chicago, University of Chicago Press.

Gillies. Donald (2000): *Philosophical Theories of Probability*, Londres, Routledge.

Glover, Dorothy L., Joseph L. Camp Jr. y Nuel D. Belnap Jr. (1975): "A Prosentential Theory of Truth", *Philosophical Studies*, vol. 27, pp. 73-125.

Gödel, Kurt (1930): "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*. vol. 37.

— (1931): "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandten Systeme", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 7, pp. 173-198.

— (1932): "Zum intuitionistischen Aussagenkalkül", *Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, vol. 69, pp. 65-66.

— (1934): *On undecidable propositions of formal mathematical systems*, apuntes de clase por S. C. Kleene y J. B. Rosser, Princeton, Institute for Advanced Study (mimeografiado).

— (1938): "The consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 24, pp. 556-557.

— (1947): "What is Cantor's Continuum Problem?", *American Mathematical Monthly*, vol. 54, pp. 515-525.

Godement, Roger (1973): *Cours d'algèbre*, París, Hermann.

Goodman, Nelson (1955): *Fact, Fiction and Forecast*, Londres, University of London.

Gottfried, Kurt (1966): *Quantum Mechanics: Fundamentals*, vol. I, Reading MA, Benjamin/Cummings..

Grimaldi, Francesco Maria (1665): *Physico-mathesis de lumine, coloribus, et iride*, Bononiae, Ex typographia haeredis Victorij Benatij, impensis Hieronymi Berniæ.

Grünbaum, Adolf (1967): *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, Middletown, CN, Wesleyan University Press.

Gupta. Anil (1982): "Truth and paradox". *Journal of Philosophical Logic*, vol. 11, pp. 1-60.

Guth, Alan H. (1981): "Inflationary universe: A possible solution of the horizon and flatness problems", *Physical Review D*, vol. 23, pp. 347-356.

Hacking, Ian (1983): *Representing and Intervening: Introductory Topics in the Philosophy of Natural Science*, Cambridge, Cambridge University Press.

Halvorson, Hans y Rob Clifton (2002): "No place por particles in relativistic quantum theories?", *Philosophy of Science*, vol. 69, pp. 1-28.

Hanson, N. R. (1958): *Patterns of Discovery*, Cambridge, Cambridge University Press.

Hartley, R. V. (1928): "Transmission of information", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 7, p. 535.

Hausdorff, Felix (1914): *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit.

Hawking, Stephen W. (1975): "Particle Creation by Black Holes", *Communications of Mathematical Physics*, vol. 43, pp. 199-220.

Healey, Richard (1989): *The Philosophy of Quantum Mechanics: An Interactive Interpretation*, Cambridge, Cambridge University Press.

Hegel, Georg Wilhelm Friedrich (1807): *System der Wissenschaft: Erster Theil, die Phänomenologie des Geistes*, Bamberg, Joseph Anton Goebhardt.

— (1830): *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse*, Zum Gebrauch seiner Vorlesungen, Dritte Ausgabe, Heidelberg, Verwaltung des Oßwald'schen Verlags.

Hegerfeldt, Gerhard C. (1998a): "Causality, particle localization and positivity of the energy", en A. Böhm, *et al.* (eds.), *Irreversibility and Causality*, Nueva York, Springer, pp. 238-245.

— (1998b): "Instantaneous spreading and Einstein causality in quantum theory", *Annalen der Physik*, vol. 7, pp. 716-725.

Heisenberg, Werner (1925): "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen", *Zeitschrift für Physik*, vol. 33, pp. 879-893.

— (1927): "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift für Physik*, vol. 43, pp. 172-198.

Helmholtz, Hermann von (1847): *Über die Erhaltung der Kraft*, Berlín, Reimer.

Hempel, Carl G. (1945): "Studies in the Logic of Confirmation", *Mind*, vol. 54, pp. 1-26, 97-121.

— (1950): "Problems and changes in the empiricist criterion of meaning", *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 11, pp. 41-63.

— (1965): *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science*, Nueva York, Free Press.

—, y P. Oppenheim (1948): "Studies in the logic of explanation", *Philosophy of Science*, vol. 15, pp. 135-175.

Henkin, Leon (1950): "Completeness in the theory of types", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15, pp. 81-91.

— (1949): "The completeness of the first-order functional calculus", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14, pp. 159-166.

Henneaux, Marc, y Claudio Teitelboim (1992): *Quantization of Gauge Systems*, Princeton, Princeton University Press.

Hertz, Heinrich (1892): *Untersuchungen ueber die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, Leipzig, Barth.

Herzberger, H. (1982): "Notes on naive semantics", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 11, pp. 61-102.

Hessenberg, G. (1906): *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Abhandlungen der Friesschen Schule, N.R. [I] 4.

Heyting, Arendt (1930): "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Preussische Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse. Sitzungsberichte*, año 1930, pp. 42-56.

Hilbert, David (1899): "Grundlagen der Geometrie", en *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, Leipzig, Teubner, pp. 3-92.

— (1900): "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung*, vol. 8, pp. 180-194.

— (1931): "Zur Grundlegung der elementaren Zahlenlehre", *Mathematische Annalen*, vol. 104, pp. 485-494.

—, y Wilhelm Ackermann (1928): *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlín, Springer.

—, y Paul Bernays (1934): *Grundlagen der Mathematik*, Band I, Berlín, Springer.

Horwich, Paul (1990): *Truth*, Oxford, Blackwell.

Hoyle, Fred (1948): "A new model for the expanding universe", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 108, pp. 372-382.

Hubble, Edwin P. (1925): "Cepheids in spiral nebulae", *Publications of the American Astronomical Society*, vol. 48, pp. 139-142.

— (1929): "A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 15, pp. 168-173.

— (1935): "Angular rotations of spiral nebulae", *Astrophysical Journal*, vol. 81, pp. 334-335.

—, y M. L. Humason (1931): "The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae", *Astrophysical Journal*, vol. 74, pp. 43-80.

Hull, David (1978): "A matter of individuality", *Philosophy of Science*, vol. 45, pp. 335-360.

Hume, David (1739): *A treatise of human nature: being an attempt to introduce the experimental method of reasoning into moral subjects*, Londres, John Noon / Thomas Longman, 2 vols. (Publicado anónimamente.)

Huntington, E. V. (1904): "Sets of independent postulates for the algebra of logic", *American Mathematical Society Transactions*, vol. 5, pp. 288-309.

Husserl, Edmund (1901): *Logische Untersuchungen*, Zweiter Band: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis. I. Teil, Halle, Niemeyer.

— (1929): "Die Pariser Vorträge", en Edmund Husserl, *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge*, Haag, Martinus Nijhoff, 1950, pp. 3-39.

Huygens, Christiaan (1690): *Traité de la lumière. Où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion, et dans la refraction. Et particulièrement dans l'étrange refraction du cristal d'Islande*. Leide, Pierre van der Aa.

Ingarden, R. S., y K. Urbanik (1962): "Information without probability", *Colloquium Mathematicum*, vol. 9, pp. 131-150.

Ives, Herbert E., y G. R. Stilwell (1937): "Light signals on moving bodies as measured by transported rods and clocks", *Journal of the Optical Society of America*, vol. 27, pp. 177-180.

Jaśkowski, Stanisław (1934): "On the rules of suppositions in formal logic", *Studia Logica*, vol. 1, pp. 5-32.

Jaynes, E. T. (1973): "The Well-Posed Problem", *Foundations of Physics*, vol. 3, pp. 477-493.

Kant, Immanuel (1756): *Metaphysica cum Geometria Iunctae Usus in Philosophia Naturalis, cuius Specimen I. continet Monadologiam Physicam*, Königsberg.

— (1770): *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis*, Regiomonti, Io. Iac. Kanter.

— (1781): *Critik der reinen Vernunft*, Riga, Johann Friedrich Hartknoch.

— (1787): *Critik der reinen Vernunft*, Zweyte hin und wieder verbesserte Auflage, Riga, Johann Friedrich Hartknoch.

Kennedy, R. J., y E. M. Thorndike (1932): "Experimental establishment of the relativity of time", *Physical Review*, vol. 42, pp. 400-418.

Keynes, John Maynard (1921): *A Treatise on Probability*, Londres, Macmillan.

Kleene, Stephen C. (1936): "General recursive functions of natural numbers", *Mathematische Annalen*, vol. 112, pp. 727-742.

Klein, Felix (1872): *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, A. Düchert.

Kochen, S., y E. P. Specker (1967): "The problem of hidden variables in Quantum Mechanics", *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 17, pp. 59-87.

Kolmogorov, A. N. (1933): *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlín, Springer.

— (1963): "On tables of random numbers", *Sankhya, The Indian Journal of Statistics, Series A*, vol. 25, pp. 369-376.

— (1965): "Three approaches to the quantitative definition of information", *Problems of Information Transmission*, vol. 1 (1), pp. 1-7.

Kripke, Saul (1959): "A Completeness Theorem in Modal Logic", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 24, pp. 1-14.

— (1972): "Naming and Necessity", en Donald Davidson y Gilbert Harman (eds.), *Semantics of Natural Languages*, Dordrecht, Reidel, pp. 253-355.

— (1975): "Outline of a theory of truth", *Journal of Philosophy*, vol. 1975, pp. 690-716.

— (1980): *Naming and Necessity*, Oxford, Blackwell. (Versión revisada y ampliada del ensayo publicado bajo el mismo título en 1972.)

Kuhn, Thomas S. (1959): "Energy conservation as an example of simultaneous discovery", en Marshall Clagget (ed.), *Critical Problems in the History of Science*, Madison, WI, University of Wisconsin Press, pp. 321-356.

Kuhn, Thomas S. (1962): *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago, University of Chicago Press.

— (1970): *The Structure of Scientific Revolutions*, segunda edición aumentada, Chicago, University of Chicago Press.

Lakatos, Imre (1970): "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes", en Imre Lakatos y Alan Musgrave (eds.), *Criticism and the Growth of Knowledge*, Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, Londres, 1965, vol. 4, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 91-195.

Lambert, Johann Heinrich (1764): *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein*, Leipzig.

Lange, Ludwig (1885): "Über das Beharrungsgesetz", *K: Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe. Berichte über die Verhandlungen*, vol. 37, pp. 333-351.

Laplace, Pierre Simon (1795): *Essai philosophique sur les probabilités*, en *Œuvres complètes de Laplace*, París: Académie des Sciences, 1878-1912, vol. 7, pp. i-cliii.

Larmor, Joseph (1900): *Aether and Matter: A development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter*, Cambridge, Cambridge University Press.

Laue, Max von (1911): "Zur Dynamik der Relativitätstheorie", *Annalen der Physik*, vol. 35, pp. 524-542.

Lawvere, F. William, y Stephen H. Schanuel (1997): *Conceptual Mathematics: A first introduction to categories*, Cambridge, Cambridge University Press.

Lee, T. D., y C. N. Yang (1956): "Questions of parity conservation in weak interactions", *Physical Review*, vol. 104, pp. 254-258.

Lenard, Philipp (1902): "Über die lichtelektrische Wirkung", *Annalen der Physik*, vol. 8, pp. 149-198.

Leonard, Henry S., y Nelson Goodman (1940): "The calculus of individuals and its uses", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 5, nº 45-55.

Leśniewski, Stanislaw (1931): "O podstawach matematyki, V", *Przeglbd Filozoficzny*, vol. 34.

— (1916): *Zasady ogólnej teoryi mnogosci, I* [Fundamentos de la teoría general de conjuntos], Moscú, Prace Polskiego Kola Naukowego w Moskwie: Sekcya Matematyczno-przyrodnicza.

Lewis, Clarence Irving (1912): "Implication and the algebra of logic", *Mind*, vol. 21, pp. 522-531.

—, y Cooper Harold Langford (1932): *Symbolic Logic*, Nueva York, Century.

Lewis, David (1991): *Parts of Classes*, Oxford, Basil Blackwell.

Linde, A. (1982): "A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogenity, isotropy and primordial monopole problems", *Physical Letters B*, vol. 108, pp. 389-393.

Lindström, Per (1969): "On extensions of elementary logic", *Theoria*, vol. 35, pp. 1-11.

Locke, John (1690): *An Essay concerning Humane Understanding*, In four books, Londres, Printed for Thomas Basset and sold by Edward Mory. (Publicado anónimamente; el nombre del autor fue agregado en la segunda edición.)

Lockwood, M. (1996): "'Many Minds' interpretation of Quantum Mechanics", *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 47, pp. 159-188.

Lorentz, Hendrik Antoon (1895): *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leiden, Brill.

Lorenz, Edward N. (1962): "The statistical predicition of solutions of dynamic equations", en *Proceedings of International Symposium on Numerical Weather Prediction*, Tokio, Meteorological Society of Japan, pp. 629-635, 647.

— (1963): "Deterministic nonperiodic flow", *Journal of Atmospheric Science*, vol. 20, pp. 130-141.

Lorenzen, Paul (1960/1961): "Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung", *Philosophia Naturalis*, vol. 6, pp. 415-431.

— (1964): "Wie ist die Objektivität der Physik möglich?", en Harals Delius y Günther Patzig (eds.), *Argumentationen: Festschrift für Josef König*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, pp. 143-150.

— (1965): *Differential und Integral: eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*, Frankfurt a.M., Akademie Verlag-Gesellschaft.

Lovelock, James (1979): *Gaia: A New Look at Life on Earth*, Oxford, Oxford University Press.

Löwenheim, Leopold (1915): "Über Möglichkeiten im Relativkalkül", *Mathematische Annalen*, vol. 76, pp. 447-470.

Łukasiewicz, Jan: "O logice trójwartoßciowej" [Sobre la lógica trivalente], *Ruch Filozoficzny*, vol. 5, pp. 170-171.

Mac Lane, Saunders (1971): *Categories for the Working Mathematician*, Nueva York, Springer.

Mach, Ernst (1883): *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, Leipzig, F. A. Brockhaus.

Maher, Patrick (1993): *Betting on Theories*, Cambridge, Cambridge University Press.

Malament, David (1996): "In defense of a dogma: Why there cannot be a relativistic quantum mechanics of (localizable) particles", en Rob Clifton (ed.), *Perspectives on Quantum Reality*, Dordrecht, Kluwer, pp. 1-10.

Mal'cev, Anatolii Ivanovich (1936): "Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik", *Matematicheskii sbornik*, vol. 1, pp. 323-336.

Martin, Donald A., y Robert M. Solovay (1970): "Internal Cohen extensions", *Annals of Mathematical Logic*, vol. 2, pp. 143-178.

Martin-Löf, Per (1966): "The definition of random sequences", *Information Control*, vol. 6, pp. 602-619.

Maupertuis, Pierre Louis Moreau de (1744): "Accord des différentes loix de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles", *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp. 417-426 (1748).

— (1746): "Les lois du mouvement et du repos, déduites d'un principe de métaphysique", *Histoire de l'Académie des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, pp. 267-294 (1748).

Maxwell, James Clerk (1855/1856): "On Faraday's lines of force", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. X, pt. I (1857). Leído el 10 de diciembre de 1855 y el 11 de febrero de 1856.

— (1860): "Illustrations of the dynamical theory of gases", *Philosophical Magazine*, vol. 19, pp. 19-32; vol. 20, pp. 21-37.

— (1861/1862): "On physical lines of force", *Philosophical Magazine*, vol. 21, pp. 161-175, 281-291, 338-345 (1861); vol. 23, pp. 12-24, 85-95 (1862).

Mayo, Deborah G. (1996): *Error and the Growth of Experimental Knowledge*, Chicago, University of Chicago Press.

Mayr, Ernst (1942): *Systematics and the Origin of Species*, Nueva York, Columbia University Press.

McGee, Vann (1990): *Truth, Vagueness, and Paradox: An Essay on the Logic of Truth*, Indianapolis, Hackett.

Michelson, Albert Abraham (1881): "The relative motion of the earth and the luminiferous ether", *American Journal of Science*, vol. 22, pp. 120-129.

—, y Edward W. Morley (1887): "On the relative motion of the earth and the luminiferous ether", *American Journal of Science*, vol. 34, pp. 333-345.

Mill, John Stuart (1843): *A System of Logic Ratiocinative and Inductive*, Londres, John W. Parker.

Miller, David (1974): "Popper's qualitative theory of verisimilitude", *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 25, pp. 166-177.

Millikan, Robert Andrew (1914): "A direct determination of '*h*'", *Physical Review*, vol. 4 nº 73-75.

— (1917): *The electron, its isolation and measurement and the determination of some of its properties*, Chicago, University of Chicago Press.

Mills, Robert (1994): *Space, Time and Quanta: An Introduction to Contemporary Physics*, Nueva York, W. H. Freeman.

Milne, Edward Arthur (1933): "World-structure and the expansion of the universe", *Zeitschrift für Astrophysik*, vol. 6, pp. 1-35.

Minkowski, Hermann (1907): "Das Relativitätsprinzip", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 24, pp. 372-382 (1915). Texto de una conferencia de 1907, publicado póstumamente.

— (1908): "Die Grundgleichungen fur die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körper", *Göttinger Nachrichten*, pp. 53-111.

— (1909): "Raum und Zeit", *Physikalische Zeitschrift*, vol. 10, pp. 104-111.

Mirimanoff, Dimitry (1917): "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamentale de la théorie des ensembles", *L'Enseignement Mathématique*, vol. 19, pp. 37-52.

— (1917a): "Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes - I", *L'Enseignement Mathématique*, vol. 19, pp. 209-217.

Mises, Richard von (1928): *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Wien, Springer.

— (1931): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Leipzig, Deuticke.

Moulines, Carlos Ulises (1982): *Exploraciones metacientíficas: Estructura, desarrollo y contenido de la ciencia*, Madrid, Alianza.

— (1991): *Pluralidad y recursión: Estudios epistemológicos*, Madrid, Alianza.

Mycielski, Jan, y Hugo Steinhaus (1962): "A mathematical axiom contradicting the axiom of choice", *Bull. Acad. Polon. Sci.*, vol. 10, pp. 1-3.

Neumann, Carl (1870): *Über die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie:*, Akademische Antrittsvorlesung gehalten in der Aula der Universität Leipzig am 3.November 1869, Leipzig, B.G. Teubner.

Neumann, John von (1922/1923): "Zur Einführung der transfiniten Zahlen", *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae, Sectio Sc. Math.*, pp. 199-208.

— (1925): "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 154, pp. 219-240.

— (1928): "Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, vol. 99, pp. 373-391.

— (1932): *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlín, Springer.

—, y Oskar Morgenstern (1944): *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.

Newton, Isaac (1687): *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini, Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater.

— (1707): *Arithmetica universalis; sive De compositione et resolutione arithmetica liber*, cui accessit Haleiana aequationum radices arithmetice inveniendi methodus, Cantabrigiae, Typis Academicis.

Nicod, Jean (1930): *Foundations of geometry and induction*, Londres, Kegan Paul, Trench, Trubner & Co. (El original francés de *Le problème logique de l'induction* apareció en 1923.)

Noether, Emmy (1918): "Invariante Variationsprobleme", *Göttinger Nachrichten*, pp. 235-257.

Nyquist, H. (1924): "Certain factors affecting telegraph speed", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 3, pp. 324.

Omnès, Roland (1994): *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton NJ, Princeton University Press.

— (1999): *Understanding Quantum Mechanics*, Princeton NJ, Princeton University Press.

Oppenheimer, J. R., y H. Snyder (1939): "On continued gravitational contraction", *Physical Review*, vol. 56, pp. 455-459.

Padoa, Alessandro (1900): "Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque", en *Bibliothèque du Congrès internationale de philosophie, Paris, 1900*, París, Armand Colin, 1901, vol. 3, pp. 309-365.

Pais, Abraham (1991): *Niels Bohr's Times, in Physics, Philosophy, and Polity*, Oxford, Clarendon Press.

Pauli, Wofgang (1921): "Relativitätstheorie", *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, Teubner, vol. V.2, pp. 539-775.

— (1925a): "Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt", *Zeitschrift für Physik*, vol. 31, pp. 373-385.

— (1925b): "Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren", *Zeitschrift für Physik*, vol. 31, pp. 765-783.

— (1940): "The connexion between spin and statistics", *Physical Review*, vol. 58, pp. 716-722.

— (1954): "Wahrscheinlichkeit und Physik", *Dialectica*, vol. 8, pp. 112-124.

Peano, Giuseppe (1889): *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Turín, Bocca.

Pearl, Judea (2000): *Causality: Models, Reasoning and Inference*, Cambridge, Cambridge University Press.

Pears, A. R. (1975): *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge, Cambridge University Press.

Penzias, Arno A., y Robert W. Wilson (1965): "A measurement of excess antenna temperature at 4080 MHz", *Astrophysical Journal*, vol. 142, pp. 419-421.

Planck, Max (1900): "Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum", *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, vol. 2, pp. 237-245.

— (1906): "Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik", *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, vol. 4, pp. 136-141.

Platon: *Œuvres complètes*, París, Société d'Édition Les Belles Lettres, 1920ff. 13 vols. (Citamos a Platón por esta edición; como es habitual, damos las páginas según la edición de Henri Estienne, París, 1578.)

Poincaré, Henri (1887): "Sur les hypothèses fondamentales de la geométrie", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 15, pp. 203-216.

— (1898): "La mésure du temps", *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 6, pp. 1-13.

— (1900): "Sur les rapports de la Physique expérimentale et de la Physique mathématique", en *Rapports presentés au Congrès internationale de Physique réuni à Paris en 1900*, París, Gauthier-Villars, vol. 1, pp. 1-29.

Popper, Karl R. (1935): *Logik der Forschung: Zur Erkenntnistheorie der modernen Naturwissenschaft*, Viena, Springer.

— (1957): "The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory", en Stephan Körner (ed.), *Observation and Interpretation*. A Symposium of Philosophers and Physicists. Proceedings of the Ninth Symposium of the Colston Re-

search Society held in the University of Bristol, April 1st-April 4th, 1957, Londres, Butterworth, pp. 65-70.

Popper, Karl R. (1963): *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*, Londres, Routledge and Kegan Paul.

— (1978): "Appendix 2: Supplementary Remark", en Karl Popper, *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, edición revisada, Oxford: Clarendon Press, 1979.

Putnam, Hilary (1965): "A philosopher looks at quantum mechanics", en R. Colodny (ed.), *Beyond the Edge of Certainty*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, pp. 130-158.

— (1969): "Is logic empirical?", en Robert Cohen y Marx Wartofsky, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, Dordrecht, Reidel, vol. 5, pp. 216-241. (Reproducido con el título "The logic of quantum mechanics" en Hilary Putnam, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge, 1979, pp. 174-197.)

— (1974): "How to think quantum-logically", *Synthese*, vol. 29, pp. 55-61.

— (1975): "The 'Meaning' of Meaning", en Hilary Putnam, *Mind, Language and Reality*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 215-271.

Quine, Willard van Orman (1948): "On What There Is", *Review of Metaphysics*, vol. 2, pp. 21-38.

— (1951): "Two dogmas of empiricism", *Philosophical Review*, vol. 60, pp. 20-43.

— (1990): *The Pursuit of Truth*, Cambridge MA, Harvard University Press.

Ramsey, Frank Plumpton (1926): "Truth and Probability", en Ramsey, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Londres, Routledge and Kegan Paul, 1931, pp. 156-198.

— (1927): "Facts and propositions", *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. suplem. 7, pp. 153-170.

— (1929): "Theories", en Ramsey, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Londres, Routledge and Kegan Paul, 1931, pp. 212-236.

— (1931): *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, edited by R. B. Braithwaite, Londres, Routledge and Kegan Paul.

Resnik, Michael D. (1997): *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford, Clarendon Press.

Révész, Pál (1968): *The Laws of Large Numbers*, Nueva York, Academic Press.

Ricci, Gregorio, y Tullio Levi-Civita (1901): "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen*, vol. 54, pp. 125-201.

Riemann, Bernhard (1854): "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", *Göttinger Abhandlungen*, vol. 13, pp. 133-152 (1867).

Robertson, H. P. (1935/1936): "Kinematics and world-structure", *Astrophysical Journal*, vol. 82, pp. 284-301; vol. 83, pp. 187-201, 257-271.

Robinson, Abraham (1959): "Model theory and non-standard arithmetic", en *Infinitistic Methods*, Symposium on the Foundations of Mathematics, Varsovia, pp. 265-302.

— (1966): *Non-Standard Analysis*, Ámsterdam, North-Holland.

Robinson, Raphael Mitchel (1937): "The theory of classes, a modification of von Neumann's system", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 2, pp. 29-36.

Roll, P. G., R. Krotkov y R. H. Dicke (1964): "The equivalence of inertial and passive gravitational mass", *Annals of Physics*, vol. 26, pp. 442-517.

Rosser, J. B. (1936): "Extensions of some theorems of Gödel and Church", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, pp. 87-91.

Russell, Bertrand (1903): *The Principles of Mathematics*, Volume I, Cambridge, Cambridge University Press.

— (1905): "On denoting", *Mind*, vol. 14, pp. 479-493.

— (1906): "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", *London Mathematical Society Proceedings*, vol. 4, pp. 29-53.

— (1912a): *The Problems of Philosophy*, Oxford, Oxford University Press.

— (1912b): "On the notion of cause, with applications to the free-will problem", en Bertrand Russell, *Mysticism and Logic*, Londres, Allen & Unwin, 1918, pp. 180-205. (Publicado originalmente en *Proceedings of the Aristotelian Society*, 13 (1912/1913)).

— (1918): "The Philosophy of Logical Atomism", en Bertrand Russell, *Logic and Knowledge: Essays 1901-1950*, edited by R. C. Marsh, Londres, George Allen & Unwin, 1956, pp. 177-281. (Conferencias originalmente publicadas en tres números sucesivos de *The Monist*, en 1918.)

Salmon, Wesley C. (ed.) (1970): *Zeno's Paradoxes*, Indianapolis, IN, Bobb-Merrill.

Schröder, Ernst (1890-1905): *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Nueva York, Chelsea, 1966, 3 vols. (Reimpresión corregida de la edición original, publicada en Leipzig, 1890-1905.)

Schrödinger, Erwin (1926): "Quantisierung als Eigenwertproblem", *Annalen der Physik*, vol. 79, pp. 361-376, 489-527; vol. 80, pp. 437-490; vol. 81, pp. 109-139.

— (1926b): "Über das Verhälnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der Meinen", *Annalen der Physik*, vol. 79, pp. 734-756.

— (1935): "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften*, vol. 23, pp. 807-812, 823-828, 844-849.

Schwarzschild, Karl (1916a): "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinsche Theorie", *K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte*, pp. 189-196.

— (1916b): "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinsche Theorie", *K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte*, pp. 424-434.

Scott, Dana S. (1961): "Measurable cardinals and constructible sets", *Bull. Acad. Polon. Sci.*, vol. 9, pp. 521-524.

Searle, John R. (1958): "Proper Names", *Mind*, vol. 67, pp. 166-173.

Shannon, Claude E. (1948): "A mathematical theory of communication", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423, 623-656.

Shannon, Claude E., y Warren Weaver (1949): *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana, IL, University of Illinois Press.

Shapiro, Stuart (1997): *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Nueva York, Oxford University Press.

Sheffer, Henry Maurice (1913): "A set of five independent postulates for Boolean algebras, with applications to logical constants", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 14, pp. 481-488.

Skolem, Thoralf (1920): "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischen Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen", *Videnskabsakademiet i Kristiania, Skrifter*, vol. I, nº 4, pp. 1-36.

— (1922): "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre", *Proceedings of the 5th Scandinavian Math. Congress, Helsinki*, pp. 217-232.

— (1933): "Über die Unmöglichkeit einer Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems", *Norsk Matematisk Forening, Skrifter*, vol. 2, nº 1-12, pp. 73-82.

Slipher, Vesto M. (1913): "The radial velocity of the Andromeda nebula", *Lowell Observatory Bulletin*, nº 58.

— (1915): "Spectrographic observations of nebulae", *Popular Astronomy*, vol. 23, pp. 21-24.

Smuts, J. C. (1926): *Holism and Evolution*, Nueva York, Macmillan.

Sneed, Joseph D. (1971): *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Dordrecht, Reidel.

Sober, Elliott (1984): *The Nature of Selection*, Cambridge MA, MIT Press.

Stegmüller, Wolfgang (1973): *Theorie und Erfahrung*, Zweiter Halbband. Theorienstrukturen und Theoriendynamik, Berlín, Springer.

— (1986): *Theorie und Erfahrung*, Dritter Teilband. Die Entwicklung des neuen Strukturalismus seit 1973, Berlín, Springer.

Stern, Otto y Walther Gerlach (1924): "Über die Richtungsquantelung im Magnetfeld", *Annalen der Physik*, vol. 74, pp. 673-699.

Stone, M. H. (1936): "The theory of representations for Boolean algebras", *American Mathematical Society Transactions*, vol. 40, pp. 37-111.

Strawson, Peter F. (1950): "Truth", *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. suplem. 24.

Strogatz, Steven H. (1994): *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Cambridge MA, Perseus.

Sudbery, Anthony (1986): *Quantum Mechanics and the Particles of Nature: An Outline for Mathematicians*, Cambridge, Cambridge University Press.

Suppes, Patrick (1970): *A Probabilistic Theory of Causality*, Ámsterdam, North-Holland.

Szilard, Leo (1929): "Über die Entropieveränderung in einem theromodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen", *Zeitschrift für Physik*, vol. 53, pp. 840-856.

Tarski, Alfred (1933): *Pojecie prawdy w jezykach nauk dedukcyjnych* [El concepto de verdad en los lenguajes formales], Varsovia, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. III, 34. (Traducción alemana, 1935; traducción inglesa, 1956.)

— (1933b): "Einige Betrachtungen über die Begriffe ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 40, pp. 97-112.

— (1944): "The Semantic Conception of Truth", *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 4, pp. 341-376.

Thiel, Christian (1984): "imprädikativ/Imprädikativität", en Jürgen Mittelstraß, *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Mannheim, Bibliographisches Institut / Stuttgart, J. B. Metzler, vol. 2, pp. 216-218.

Thom, René (1969): "Topological models in biology", *Topology*, vol. 8, pp. 313-335.

— (1972): *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Reading, MA, Benjamin.

Thomson, J. J. (1897): "Cathode rays", *Philosophical Magazine*, vol. 44, pp. 293-311.

Thomson, James (1884): "On the Law of Inertia, the Principle of Chronometry and the Principle of Absolute Clinural Rest, and of Absolute Rotation", *Royal Society of Edinburgh Proceedings*, vol. 12, pp. 568-578.

Thomson, William (1853): "On the dynamical theory of heat; with numerical results deduced from Mr. Joule's 'Equivalent of a thermal unit' and M. Regnault's 'Observations on steam'", Part I, *Royal Society of Edinburgh Transactions*, vol. 20, pp. 261-298.

—, y Peter Guthrie Tait (1879/1883): *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Parts 1 & 2, Cambridge, Cambridge University Press.

Tolman, Richard C. (1938): *The Principles of Statistical Mechanics*, Oxford, Oxford University Press.

Trakhtenbrot, B. A. (1950): "La imposibilidad de un algoritmo para el problema de la decisión para dominios finitos", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 70, pp. 569-572. En ruso.

Turing, Alan M. (1936): "On computable numbers, with an application to the *Entscheidungsproblem*", *London Mathematical Society Proceedings*, vol. 42, pp. 230-265.

Uhlenbeck, G. E., y S. Goudsmit (1925): "Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons", *Naturwissenschaften*, vol. 13, pp. 953-954.

van Fraassen, Bas C. (1972): "A formal approach to the philosophy of science", en R. G. Colodny (ed.), *Paradigms and Paradoxes: The Philosophical Challenge of the Quantum Domain*, Pittsburgh, University of Pittsburgh Press, pp. 303-366.

— (1980): *The Scientific Image*, Oxford, Oxford University Press.

— (1991): *Quantum Mechanics: An Empiricist View*, Oxford, Clarendon Press.

Ville, J. (1939): *Étude critique sur la notion de collectif*, París, Gauthier-Villars.

Wald, Abraham (1937): "Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, vol. 8, pp. 38-72.

Walker, A. G. (1937): "On Milne's theory of world-structure", *London Mathematical Society Proceedings*, vol. 42, pp. 90-127.

Watson, James y Francis Crick (1953): "A structure for deoxyribose nucleic acid", *Nature*, vol. 171, pp. 737-738.

Watson, John Broadus (1914): *Behavior: an introduction to comparative psychology*, Nueva York, H. Holt & Co.

Weyl, Hermann (1918): "Gravitation und Elektrizität", *Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte*, pp. 465-480.

— (1920): "Elektrizität und Gravitation", *Physikalische Zeitschrift*, vol. 21, pp. 649-650.

— (1931): *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, traducido por H. P. Robertson de la segunda edición alemana. (Publicado originalmente en alemán en 1929, bajo el título: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.)

Whitehead, Alfred North, y Bertrand Russell (1910-1913): *Principia Mathematica*, Cambridge, Cambridge University Press, 3 vols.

Wigner, Eugene P. (1939): "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group", *Annals of Mathematics*, vol. 40, pp. 149-204.

Williams, Mary (1970): "Deducing the consequences of evolution", *Journal of Theoretical Biology*, vol. 29, pp. 343-385.

Winnie, John A. (1986): "Invariants and objectivity: A theory with applications to relativity and geometry", en Robert G. Colodny (ed.), *From Quarks to Quasars: Philosophical Problems of Modern Physics*, Pittsburgh, University of Pittsburgh Press, pp. 71-180.

Wittgenstein, Ludwig (1922): *Tractatus Logico-Philosophicus*, Londres, Routledge and Kegan Paul.

Wu, C. S., *et al.* (1957): "Experimental test of parity conservation in Beta decay", *Physical Review*, vol. 105, pp. 1413-1415.

Young, Thomas (1807): *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, Londres, J. Johnson.

Zadeh, L. A. (1965): "Fuzzy sets", *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353.

Zeldovich, Y. A. (1968): "The cosmological constant and the theory of elementary particles", *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 11, pp. 381-393.

Zermelo, Ernst (1904): "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen*, vol. 59, pp. 514-516.

— (1908a): "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", *Mathematische Annalen*, vol. 65, pp. 261-281.

Filósofos y científicos

Solo se incluyen nombres de personas fallecidas. Las fechas anteriores a nuestra era son aproximadas. En nuestra era, las fechas que solo se conocen aproximadamente se señalan con signo de interrogación (?).

LISTA ALFABÉTICA

Abbe, Ernst (1840-1905)
Abel, Niels (1802-1829)
Ackermann, Wilhelm (1896-1962)
Agustín de Hipona (354-430)
al-Khwarizmi (780?-850?)
Ampère, André Marie (1775-1836)
Anselmo de Cantorbery (1033-1109)
Apolonio de Perga (260-190 a.C.)
Aristarco de Samos (216-144 a.C.)
Aristóteles (384-322 a.C.)
Arquímedes (287-212 a.C.)
Avenarius, Richard (1843-1896)
Avicena (980-1037)
Avogadro, Amedeo (1776-1856)
Bacon, Francis (1561-1626)
Baire, René Louis (1874-1932)
Balmer, Johann Jakob (1825-1898)
Banach, Stefan (1892-1945)
Barwise, Jon (1942-2000)
Bayes, Thomas (1702-1761)
Becquerel, Antoine Henri (1852-1908)
Berkeley, George (1685-1753)
Bernard, Claude (1813-1878)
Bernays, Paul (1888-1977)
Bernoulli, Daniel (1700-1782)
Bernoulli, Jacques (1654-1705)
Berthollet, Claude Louis (1748-1822)
Berzelius, Jöns Jakob (1779-1848)
Beth, Evert W. (1908-1964)
Birkhoff, Garrett (1911-1996)
Birkhoff, George David (1884-1944)
Bohr, Niels (1885-1962)
Boltzmann, Ludwig (1844-1906)
Bolyai, János (1802-1860)
Bolzano, Bernard (1781-1848)
Boole, George (1815-1864)
Borel, Émile (1871-1956)
Born, Max (1882-1970)
Boscovic, Rogelio José (1711-1787)
Bose, Satyedra Nath (1894-1974)
Boyle, Robert (1627-1691)
Brahe, Tycho (1546-1601)
Bridgman, Percy William (1882-1961)
Broglie, Louis de (1892-1987)
Broglie, Louis-Victor de (1892-1987)
Brouwer, L. E. J. (1881-1966)
Bruno, Giordano (1548-1600)
Burali-Forti, Cesare (1861-1931)
Canizzaro, Stanislao (1826-1910)
Cantor, Georg (1845-1918)
Caratheodory, Constantin (1873-1950)
Carnap, Rudolf (1891-1970)
Carnot, Sadi (1796-1832)
Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857)
Charles, Jacques Alexandre César (1746-1823)
Chuaqui, Rolando (1935-1994)
Church, Alonzo (1903-1995)
Chwistek, Leon (1884-1944)
Clausius, Rudolf (1822-1888)
Comte, Auguste (1798-1857)
Copérnico, Nicolás (1437-1543)
Couturat, Louis (1868-1915)
Crescas, Hasdai (1340-1410?)
Curie, Pierre (1859-1906)

Löwenheim, Leopold (1878-1957)
Lucrecio (99-55 a.C.)
Łukasiewicz, Jan (1878-1956)
MacColl, Hugh (1837-1909)
Mach, Ernst (1838-1916)
Malčev, Anatoli (1909-1967)
Mariotte, Edme (1620-1684)
Markov, Andrei (1856-1922)
Markov, Andrei (1903-1987)
Maxwell, James Clerk (1831-1879)
Mayer, Julius Robert (1814-1878)
Mendel, Gregor (1822-1884)
Mendeleieff, Dmitri Ivanovich (1834-1907)
Mill, John Stuart (1806-1873)
Millikan, Robert Andrews (1868-1953)
Milstein, Cesar (1927-2002)
Minkowski, Hermann (1864-1909)
Monod, Jacques (1910-1976)
Morris, Charles (1901-1979)
Mostovski, Andrei (1913-1975)
Nernst, Walther (1864-1941)
Neumann, John von (1903-1957)
Neurath, Otto (1882-1945)
Newton, Isaac (1642-1727)
Noether, Emmy (1882-1935)
Novikov, Piotr (1901-1975)
Ockam, Guillermo de (1280?-1349)
Ochoa, Severo (1905-1993)
Oersted, Hans Christian (1777-1851)
Ohm, Georg Simon (1789-1854)
Ortega y Gasset, José (1883-1955)
Ostwald, Friedrich Wilhelm (1853-1832)
Padoa, Alessandro (1868-1937)
Pascal, Blaise (1623-1662)
Pasteur, Louis (1822-1895)
Pauli, Wolfgang (1900-1958)
Peano, Giuseppe (1858-1932)
Peirce, Charles S. (1839-1914)
Perrin, Jean (1870-1942)
Planck, Max (1858-1947)
Platón (427-347 a.C.)
Poincaré, Henri (1854-1912)
Poncelet, Jean-Victor (1788-1867)
Popper, Karl (1902-1994)
Post, Emil (1897-1954)
Proust, Joseph-Louis (1754-1826)
Ptolomeo, Claudio (85?-165?)
Quine, Willard van Orman (1908-2000)
Ramanujan, Srinivasa (1887-1920)
Ramón y Cajal, Santiago (1852-1934)
Ramsey, Frank Plumpton (1903-1930)
Rasiowa, Helena (1917-1994)
Reichenbach, Hans (1891-1953)
Ricci-Curbastro, Gregorio (1853-1925)
Riemann, Bernhard (1826-1866)
Robinson, Abraham (1918-1974)
Robinson, Julia (1919-1985)
Rømer, Ole (1644-1710)
Röntgen, Wilhelm Konrad von (1845-1923)
Russell, Bertrand (1872-1970)
Sacristán, Manuel (1925-1985)
Salmon, Wesley (1925-2001)
Saussure, Ferdinand de (1857-1913)
Schelling, Friedrich Wilhelm Joseph (1776-1856)
Schlick, Moritz (1882-1936)
Schröder, Ernst (1841-1902)
Schrödinger, Erwin (1887-1961)
Schwann, Theodor (1810-1882)
Schwarz, Hermann A. (1843-1921)
Sexto Empírico (*ca.* 200)
Shannon, Claude Elwood (1916-2001)
Shapley, Harlow (1885-1972)
Sierpiński, Wacław (1882-1969)
Simon, Herbert (1916-2001)
Simplicio (490?-560?)
Sitter, Willem de (1872-1934)
Skolem, Thoralf (1887-1963)
Snel, Wilebrord (1580-1626)
Spencer, Herbert (1820-1903)
Stegmüller, Wolfgang (1923-1991)
Stieltjes, Thomas Jan (1856-1894)
Stokes, George Gabriel (1819-1903)
Tarski, Alfred (1901-1983)
Thomson, George Paget (1892-1975)
Thomson, Joseph John (1856-1940)
Thomson, William, Lord Kelvin (1824-1907)
Tomás de Aquino (1225-1274)
Turing, Alan (1912-1954)
Venn, John (1834-1923)
Wallace, Alfred R. (1823-1913)
Weierstrass, Karl T. W. (1815-1897)
Weyl, Hermann (1885-1955)
Whitehead, Alfred North (1861-1947)
Wiener, Norbert (1894-1964)
Wittgenstein, Ludwig (1889-1951)
Young, Thomas (1773-1829)
Zeeman, Pieter (1865-1945)
Zenón de Elea (siglo V a.C.)
Zermelo, Ernst (1871-1953)
Zorn, Max (1906-1993)

LISTA CRONOLÓGICA

Zenón de Elea (siglo V a.C.)
Leucipo (siglo V a.C.)
Demócrito (470-380 a.C.)
Platón (427-347 a.C.)
Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.)
Aristóteles (384-322 a.C.)
Epicuro (341-270 a.C.)
Euclides (siglos IV y III a.C.)
Arquímedes (287-212 a.C.)
Apolonio de Perga (260-190 a.C.)
Aristarco de Samos (216-144 a.C.)
Hiparco de Nicea (190-120 a.C.)
Lucrecio (99-55 a.C.)
Claudio Ptolomeo (85?-165?)
Galeno de Pérgamo (129-216?)
Sexto Empírico (*ca.* 200)
Diofanto de Alejandría (200?-284?)
Agustín de Hipona (354-430)
Simplicio (490?-560?)
al-Khwarizmi (780?-850?)
Avicena (980-1037)
Anselmo de Cantorbery (1033-1109)
Tomás de Aquino (1225-1274)
Guillermo de Ockam (1280?-1349)
Crescas, Hasdai (1340-1410?)
Copérnico, Nicolás (1437-1543)
Brahe, Tycho (1546-1601)
Bruno, Giordano (1548-1600)
Bacon, Francis (1561-1626)
Galileo Galilei (1564-1642)
Kepler, Johannes (1571-1630)
Snel, Wilebrord (1580-1626)
Gassendi, Pierre (1592-1655)
Descartes, René (1596-1650)
Fermat, Pierre de (1601-1665)
Grimaldi, Francesco Maria (1618-1663)
Mariotte, Edme (1620-1684)
Pascal, Blaise (1623-1662)
Boyle, Robert (1627-1691)
Huygens, Christiaan (1629-1695)
Locke, John (1632-1706)
Hooke, Robert (1635-1703)
Newton, Isaac (1642-1727)
Rømer, Ole (1644-1710)
Leibniz, Gottfried, Wilhelm (1646-1715)
Bernoulli, Jacques (1654-1705)
Berkeley, George (1685-1753)
Bernoulli, Daniel (1700-1782)
Bayes, Thomas (1702-1761)
Linné, Carl von (1707-1778)
Euler, Leonard (1707-1783)
Hume, David (1711-1776)
Boscovic, Rogelio José (1711-1787)
Kant, Immanuel (1724-1804)
Lagrange, Joseph Louis (1736-1813)
Herschel, William (1738-1832)
Lavoisier, Antoine Laurent (1743-1794)
Charles, Jacques Alexandre César (1746-1823)
Berthollet, Claude Louis (1748-1822)
Laplace, Pierre Simon de (1749-1827)
Proust, Joseph-Louis (1754-1826)
Dalton, John (1766-1844)
Fourier, Joseph (1768-1830)
Hegel, Georg Wilhelm Friedrich (1770-1830)
Young, Thomas (1773-1829)
Ampère, André Marie (1775-1836)
Avogadro, Amedeo (1776-1856)
Schelling, Friedrich Wilhelm Joseph (1776-1856)
Oersted, Hans Christian (1777-1851)
Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)
Gay-Lussac, Joseph Louis (1778-1850)
Berzelius, Jöns Jakob (1779-1848)
Bolzano, Bernard (1781-1848)
Fraunhofer, Josef von (1787-1826)
Dulong, Pierre-Louis (1785-1838)

Fresnel, Augustin-Jean (1788-1827)
Poncelet, Jean-Victor (1788-1867)
Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857)
Ohm, Georg Simon (1789-1854)
Faraday, Michael (1791-1867)
Lobachevski, Nikolai (1793-1856)
Carnot, Sadi (1796-1832)
Comte, Auguste (1798-1857)
Abel, Niels (1802-1829)
Bolyai, János (1802-1860)
Doppler, Christian Johann (1803-1853)
Dirichlet, Peter G. L. (1805-1859)
Hamilton, William Rowan (1805-1865)
de Morgan, Augustus (1806-1871)
Mill, John Stuart (1806-1873)
Darwin, Charles (1809-1882)
Schwann, Theodor (1810-1882)
Kummer, Ernst, (1810-1893)
Galois, Évariste (1811-1832)
Bernard, Claude (1813-1878)
Mayer, Julius Robert (1814-1878)
Boole, George (1815-1864)
Weierstrass, Karl T. W. (1815-1897)
Joule, James Prescott (1818-1889)
Stokes, George Gabriel (1819-1903)
Spencer, Herbert (1820-1903)
Helmholtz, Hermann von (1821-1894)
Mendel, Gregor (1822-1884)
Clausius, Rudolf (1822-1888)
Pasteur, Louis (1822-1895)
Wallace, Alfred R. (1823-1913)
Kronecker, Leopold (1823-1891)
Kirchhoff, Gustav Robert (1824-1887)
Thomson, William, Lord Kelvin (1824-1907)
Huxley, Thomas (1825-1895)
Balmer, Johann Jakob (1825-1898)
Riemann, Bernhard (1826-1866)
Canizzaro, Stanislao (1826-1910)
Maxwell, James Clerk (1831-1879)
Dedekind, Richard (1831-1916)
Mendeleieff, Dmitri Ivanovich (1834-1907)
Haeckel, Ernst (1834-1919)
Venn, John (1834-1923)
Jevons, William, S. (1835-1882)
MacColl, Hugh (1837-1909)
Mach, Ernst (1838-1916)
Gibbs, J. Willard (1839-1903)
Peirce, Charles S. (1839-1914)
Abbe, Ernst (1840-1905)
Schröder, Ernst (1841-1902)
Lie, Sophus (1842-1899)
Avenarius, Richard (1843-1896)
Schwarz, Hermann A. (1843-1921)
Boltzmann, Ludwig (1844-1906)
Cantor, Georg (1845-1918)
Röntgen, Wilhelm Konrad von (1845-1923)
Eötvös, Lóránd (1848-1919)
Frege, Gottlob (1848-1925)
Klein, Felix (1849-1925)
Heaviside, Oliver (1850-1925)
Becquerel, Antoine Henri (1852-1908)
Ramón y Cajal, Santiago (1852-1934)
Ostwald, Friedrich Wilhelm (1853-1832)
Ricci-Curbastro, Gregorio (1853-1925)
Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928)
Poincaré, Henri (1854-1912)
Markov, Andrei (1856-1922)
Stieltjes, Thomas Jan (1856-1894)
Thomson, Joseph John (1856-1940)
Saussure, Ferdinand de (1857-1913)
Peano, Giuseppe (1858-1932)
Planck, Max (1858-1947)
Curie, Pierre (1859-1906)
Husserl, Edmund (1859-1938)
Dewey, John (1859-1952)
Duhem, Pierre (1861-1916)
Burali-Forte, Cesare (1861-1931)
Whitehead, Alfred North (1861-1947)
Hilbert, David (1862-1943)
Minkowski, Hermann (1864-1909)
Nernst, Walther (1864-1941)
Zeeman, Pieter (1865-1945)
Hadamard, Jacques (1865-1963)
Curie-Sklodowska, Marie (1867-1934)
Couturat, Louis (1868-1915)
Padoa, Alessandro (1868-1937)
Hausdorff, Felix (1868-1942)
Millikan, Robert Andrews (1868-1953)
Perrin, Jean (1870-1942)
Zermelo, Ernst (1871-1953)
Borel, Émile (1871-1956)
Sitter, Willem de (1872-1934)
Russell, Bertrand (1872-1970)
Schwarzschild, Karl (1873-1916)
Levi-Civita, Tullio (1873-1941)
Caratheodory, Constantin (1873-1950)
Baire, René Louis (1874-1932)
Lebesgue, Henri Léon (1875-1941)
Łukasievicz, Jan (1878-1956)
Löwenheim, Leopold (1878-1957)

Einstein, Albert (1879-1955)
Laue, Max von (1879-1960)
Dumas, Jean Baptiste André (1880-1844)
Brouwer, L. E. J. (1881-1966)
Noether, Emmy (1882-1935)
Schlick, Moritz (1882-1936)
Neurath, Otto (1882-1945)
Bridgman, Percy William (1882-1961)
Sierpiński, Wacław (1882-1969)
Born, Max (1882-1970)
Keynes, John Maynard (1883-1946)
Ortega y Gasset, José (1883-1955)
Lewis, Clarence Iriving (1883-1964)
Birkhoff, George David (1884-1944)
Chwistek, Leon (1884-1944)
Weyl, Hermann (1885-1955)
Bohr, Niels (1885-1962)
Shapley, Harlow (1885-1972)
Leśniewski, Stanisław (1886-1939)
Ramanujan, Srinivasa (1887-1920)
Schrödinger, Erwin (1887-1961)
Skolem, Thoralf (1887-1963)
Friedmann, Alexander (1888-1925)
Bernays, Paul (1888-1977)
Wittgenstein, Ludwig (1889-1951)
Hubble, Edwin (1889-1953)
Heidegger, Martin (1889-1976)
Reichenbach, Hans (1891-1953)
Fraenkel, Abraham (1891-1965)
Carnap, Rudolf (1891-1970)
Broglie, Louis-Victor de (1892-1987)
Banach, Stefan (1892-1945)
Thomson, George Paget (1892-1975)
Broglie, Louis de (1892-1987)
Wiener, Norbert (1894-1964)
Lemaître, Georges-Édouard (1894-1966)
Bose, Satyedra Nath (1894-1974)
Ackermann, Wilhelm (1896-1962)
Kuratovski, Kazimierz (1896-1980)
Post, Emil (1897-1954)
Heyting, Arend (1898-1980)
Pauli, Wolfgang (1900-1958)
Dobzhansky, Theodosius (1900-1975)
Fermi, Enrico (1901-1954)
Novikov, Piotr (1901-1975)
Heisenberg, Werner (1901-1976)
Morris, Charles (1901-1979)
Tarski, Alfred (1901-1983)
Dirac, Paul Adrien Maurice (1902-1984)
Popper, Karl (1902-1994)
Ramsey, Frank Plumpton (1903-1930)
Neumann, John von (1903-1957)
Markov, Andrei (1903-1987)
Kolmogorov, Andrei (1903-1987)
Lorenz, Konrad (1903-1989)
Church, Alonzo (1903-1995)
Ochoa, Severo (1905-1993)
Hempel, Carl (1905-1997)
Gödel, Kurt (1906-1978)
Finetti, Bruno de (1906-1985)
Leloir, Luis (1906-1987)
Zorn, Max (1906-1993)
Goodman, Nelson (1906-1998)
Beth Evert W. (1908-1964)
Quine, Willard van Orman (1908-2000)
Malčev, Anatoli (1909-1967)
Kleene, Stephen (1909-1994)
Monod, Jacques (1910-1976)
Birkhoff, Garrett (1911-1996)
Turing, Alan (1912-1954)
Ferrater Mora, José (1912-1991)
Mostovski, Andrei (1913-1975)
Hennig, Willi (1913-1976)
Erdös, Paul (1913-1996)
Simon, Herbert (1916-2001)
Shannon, Claude Elwood (1916-2001)
Rasiowa, Helena (1917-1994)
Robinson, Abraham (1918-1974)
Robinson, Julia (1919-1985)
Lakatos, Imre (1922-1974)
Kuhn, Thomas (1922-1996)
Stegmüller, Wolfgang (1923-1991)
Sacristán, Manuel (1925-1985)
Salmon, Wesley (1925-2001)
Milstein, Cesar (1927-2002)
Chuaqui, Rolando (1935-1994)
Hamilton, William Donald (1936-2000)
Barwise, Jon (1942-2000)
Gould, Stephen Jay (1942-2002)

Relación de voces

Esta relación alfabética de voces presenta todas las entradas del diccionario en **negrita**. Otros términos de interés van en redonda (o en *cursiva*, si son palabras extranjeras), seguidos de las entradas —en VERSALITAS— en que estos términos se comentan. Cuando una entrada contiene solo un mínimo de información, seguido de una referencia a otra entrada, la relación alfabética da en negrita la primera, seguida del signo ↗ y de la entrada a que este remite en versalitas. La relación alfabética incluye los nombres de unos sesenta filósofos y científicos importantes, seguidos de las entradas en que se los menciona; pero no pretende ser un índice de todos los nombres propios que figuran en el diccionario.

sistema comparativo: ESCALA ORDINAL
sistema de referencia: ↗MARCO DE REFERENCIA
sistema extensivo: ESCALA PROPORCIONAL
sistema holonómico: MECÁNICA CLÁSICA, PRINCIPIO DE HAMILTON
sistema internacional de unidades
Skolem, paradoja de: PARADOJA DE SKOLEM
solución de Schwarzschild
spin
steady state: COSMOLOGÍA, PRINCIPIO COSMOLÓGICO PERFECTO
subalternación: SILOGÍSTICA
subconjunto
suborden lineal: ORDEN LINEAL
suborden parcial: ORDEN PARCIAL
subteoría
subvariedad lineal
sucesión: ↗SECUENCIA
sucesor: NÚMERO NATURAL, ORDEN LINEAL
sucesor inmediato: ORDEN LINEAL
sucesor, cardinal: CARDINALES
sucesor, ordinal: ORDINAL SUCESOR
sujeto: SILOGÍSTICA
superficie de Cauchy: DETERMINISMO
supernova
superposición
suposición formal: USO Y MENCIÓN
suposición material: USO Y MENCIÓN
suppositio: USO Y MENCIÓN
supremo

tabla de verdad
tabla periódica de los elementos químicos
tabula rasa
tamaño de un test: ERRORES DE TIPO I Y DE TIPO II
tangente: DERIVADA, ESPACIO TANGENTE
tangente, espacio: ESPACIO TANGENTE
tangente, fibrado: FIBRADO TANGENTE
Tarski, Alfred: ÁLGEBRA DE LA LÓGICA, ÁLGEBRA DE LINDENBAUM, FISICALISMO, LÓGICA DE PRIMER ORDEN, LÓGICA INTUICIONISTA, LÓGICA PROPOSICIONAL, METALENGUAJE, MUNDOS POSIBLES, PARADOJA DEL MENTIROSO, REGLA OMEGA DE INFERENCIA, SEMÁNTICA, TEOREMA DE INDEFINIBILIDAD DE TARSKI, TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM, TEORÍA, VERDAD
tautología
taxón
taxon: CLASIFICACIÓN
taxonomía cladista: TAXÓN
temperatura
temporaloide: MÉTRICA SEMI-RIEMANNIANA
tensor
tensor de energía
tensor de Ricci: ↗CURVATURA
tensor de Riemann: ↗CURVATURA
tensorial, producto: PRODUCTO TENSORIAL
teorema
teorema de Bayes
teorema de Bell
teorema de Bernoulli
teorema de Bernstein
teorema de Cantor
teorema de compacidad
teorema de completud semántica
teorema de corrección: TEOREMA DE COMPLETUD SEMÁNTICA
teorema de definibilidad de Beth
teorema de Fermat [último]
teorema de finitud: TEOREMA DE COMPACIDAD
teorema de incompletud de Gödel
teorema de indefinibilidad de Tarski
teorema de inducción ordinal transfinita: INDUCCIÓN TRANSFINITA
teorema de interpolación
teorema de Kochen y Specker: LÓGICA CUÁNTICA
teorema de la deducción
teorema de Lindström
teorema de Liouville: MECÁNICA ESTADÍSTICA
teorema de Łós-Vaught
teorema de Löwenheim-Skolem
teorema de Noether
teorema de Pitágoras
teorema de recursión transfinita de von Neumann: RECURSIÓN TRANSFINITA
teorema de tricotomía: AXIOMA DE ELECCIÓN
teorema de Zorn: AXIOMA DE ELECCIÓN
teorema del buen orden
teorema del punto fijo para retículos: RETÍCULO
teorema del valor medio: INTEGRAL
teorema fundamental de Shannon: INFORMACIÓN
teoría
teoría axiomatizable
teoría categórica